

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL

RENAN GUSTAVO JUNQUEIRA

**MODELO ANALÍTICO PARA ESTUDO DO DESEMPENHO DE VIGAS
DE CONCRETO ARMADO REABILITADAS E REFORÇADAS À
FLEXÃO**

MARINGÁ
2017

RENAN GUSTAVO JUNQUEIRA

**MODELO ANALÍTICO PARA ESTUDO DO DESEMPENHO DE VIGAS
DE CONCRETO ARMADO REABILITADAS E REFORÇADAS À
FLEXÃO**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Vladimir José Ferrari

MARINGÁ
2017

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

J95m Junqueira, Renan Gustavo
Modelo analítico para estudo do desempenho de vigas de concreto armado reabilitadas e reforçadas à flexão / Renan Gustavo Junqueira. - - Maringá, 2017.
108 f. : il., tabs., figs., quadros.

Orientador: Prof. Dr. Vladimir José Ferrari.
Dissertação (mestrado)- Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2017.

1. Vigas. 2. Modelo analítico. 3. Reabilitação. 4. Reforço. I. Ferrari, Vladimir José, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 22.ed. 691

MGC-001869

RENAN GUSTAVO JUNQUEIRA

MODELO ANALÍTICO PARA ESTUDO DE DESEMPENHO
DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO REABILITADAS E
REFORÇADAS À FLEXÃO.

Dissertação apresentada à Universidade Estadual de Maringá, como parte das exigências do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, na área de concentração Estruturas, para obtenção do título de Mestre.

Aprovada em 20 de fevereiro de 2017.



Prof. Dr. Leandro Vanalli
Universidade Estadual de Maringá

Membro



Prof. Dr. Rodrigo Ribeiro Paccola
Universidade EESC USP

Membro



Prof. Dr. Vladimir José Ferrari
Universidade Estadual de Maringá

Orientador UEM

DEDICATÓRIA

À minha família e amigos que julgo serem os melhores que alguém poderia ter e que me ajudaram a evoluir e construir o meu jeito de ser e viver.

AGRADECIMENTOS

À CAPES e Fundação Araucária pelo suporte com a bolsa de mestrado que me permitiu desenvolvê-lo com maior foco.

Aos meus pais Marli e José e meu irmão Luan que me tornaram o que sou hoje dando sempre todo o apoio e suporte em quaisquer que fossem minhas escolhas.

Aos grandes amigos não só na engenharia, mas também na vida Marcos Silveira, Douglas Takazono, Evandro Rodrigues, Ernani Benincá, Bruna Paes, Petiano Bin e Sandro Alegria (sim, seu sobrenome) que ao longo desse período me mostraram e demonstraram como ser BRAVO em todos os sentidos da palavra.

Aos meus maiores amigos da banda Groovezilla e também de bebedeiras, “rolês”, muitas risadas e épicas noites dos “brows” Wellington “Leli”, Eduardo Gerhardt, Lucas Riegel, Marcelão e Rodão.

Ao meu orientador Vladimir Ferrari pela dedicação, atenção e orientação do trabalho, mas sobretudo pela grande ideia da abordagem analítica em reforço e recuperação de vigas, tema este que desenvolvi com prazer, pois muito me fascinou.

Aos funcionários e professores do departamento de engenharia civil da UEM, em especial à secretária do PCV, Marli Silveira por todo o suporte, prontidão e com o bom humor de sempre ao resolver meus probleminhas de sempre; ao Juarez por sempre atender a todos de forma atenciosa e comprometida e sempre com ótimo humor; Douglas, secretário do PEU pelas conversas e risadas durante as tardes de desenvolvimento do trabalho na sala de estudos; Wesley Wilson Wutsow que me auxiliou no entendimento do temido Método dos Elementos Finitos, bem como na manipulação do programa Wolfram Mathematica; Rafa de Souza, Carlos Humberto, Leandro Vanalli, Nara Villanova, Anamaria, Dante, Romel, Vladimir Ferrari, Miotto e Jeselay que contribuíram tanto na aquisição de conhecimentos nas disciplinas da graduação e do mestrado como na demonstração da arte de dar aulas.

“O universo não foi feito à medida do ser humano, mas tampouco lhe é adverso: é-lhe indiferente.” (SAGAN, C.)

RESUMO

As estruturas de concreto armado devem ser concebidas e projetadas de modo a atenderem algumas condições de segurança, uso e ocupação. Entretanto é muito comum que, com o passar do tempo, ou ainda com a mudança de uso da edificação, a estrutura ou tenha sua resistência afetada ou a nova solicitação se apresente excessiva em relação ao que foi inicialmente projetado. Nesse sentido surge a necessidade de reabilitação de alguns elementos que por ventura estiverem deteriorados, podendo ser citado aqui a corrosão de armadura e do concreto como exemplos bastante corriqueiros. Nos casos em que a nova solicitação é excessiva, torna-se necessário a execução de reforço, sendo muito comum, o reforço utilizando mantas de polímeros reforçados com fibras, conhecidos por PRF. Entretanto, é recomendado pelo ACI que um elemento estrutural só pode ser reforçado se estiver íntegro. Dessa forma, se houver necessidade de reforço em uma viga degradada, deve-se restaurá-la. A partir disso surge a necessidade de se prever o comportamento de uma estrutura a ser reabilitada e reforçada. A dificuldade na previsão e dimensionamento desse tipo de elemento é que os estudos são escassos nesse quesito utilizando uma abordagem analítica que possibilite o dimensionamento de forma segura e simples. Dessa forma, o presente trabalho propõe um modelo analítico para vigas reabilitadas e reforçadas utilizando formulações de outros autores e agrupando-as todas em um único elemento. Isto é, foram utilizadas formulações para o cálculo de tensões no concreto, no aço, no material utilizado para a reabilitação e no material utilizado para o reforço (PRF). Com o modelo desenvolvido e implementado foram feitas comparações com resultados experimentais de diversos autores, sendo comparados resultados das curvas força-deslocamento no meio do vão de vigas em concreto armado convencional, vigas reabilitadas, vigas reforçadas com PRF e viga reabilitada e reforçada com PRF. Os resultados obtidos se mostraram bastante satisfatórios na maioria dos casos, com curvas bastante concordantes e forças notáveis de fissuração, escoamento e ruptura bem próximos. Apesar de poucos resultados experimentais, para os que foram encontrados e modelados neste trabalho, o modelo se mostrou adequado para a representação do comportamento estrutural de vigas reabilitadas e reforçadas.

Palavras-chave: Vigas. Modelo analítico. Reabilitação. Reforço.

ABSTRACT

Concrete structures are designed to attend security, use and occupation conditions. However, over time or with the change of the building use, it is common that the structure have its resistance affected or a new load to high compared to the initial load considered during the structural calculus. Thus it is necessary to repair some elements whose deterioration is caused by the steel and concrete corrosion as unexceptional examples. In cases which the new loading is too excessive a strengthening is needed, being very common fiber reinforced polymer, known as FRP. Although it is recommended by ACI that a structural element can only be strengthened if it is intact. In fact, if a degraded beam needs strengthening, it must be recovered. For this, the behavior of a repaired and strengthened structure must be predicted. A difficulty in this matter remains in the fact that there is not much analytical researches that allows the prediction and design of this kind of structure in a safe and simple way. So this work proposes an analytical model for rehabilitated and strengthened beams using other authors formulation grouping them all in a single element. That was used formulations for the stress calculation of concrete, steel, repair and strengthening (FRP) materials. With the developed and implemented model, a manifold comparison were made to other authors experimental data using for this a force-displacement diagram of conventional RC beams, repaired beams, FRP strengthened beams and both repaired and strengthened beam. The presented results are satisfactory in most cases with concordant curves, cracking, yielding and failure forces very close. In spite of few experimental data, for those found e modelled in this work, the model is adequate for the structural behavior representation of rehabilitated and strengthened beams.

Keywords: Beams. Analytical model. Rehabilitation. Strengthening.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Encaixe dos novos estribos	17
Figura 1.2 – Reforço da armadura longitudinal de vigas	18
Figura 1.3 – Colocação das formas	18
Figura 1.4 – Lançamento do material de reparo com auxílio de forma dotada de cachimbo... 19	
Figura 1.5 - Viga de concreto armado reabilitada e reforçada à flexão.....	21
Figura 2.1 – Processo de transmissão de tensão: (a) concreto sem fibras; (b) concreto com fibras	24
Figura 2.2 – Influência do volume de fibras na fase pós-fissuração	25
Figura 2.3 – Características básicas de algumas fibras de aço	26
Figura 2.4 – Aspecto do compósito de PRF	27
Figura 2.5 – Sistema curado “in situ”: (a) aplicação do epóxi; (b) manta pré-saturada com epóxi	28
Figura 2.6 – Ilustração da técnica NSM	29
Figura 2.7 – Descolamento e desprendimento do sistema EBR: (a) Comportamento de uma viga à flexão reforçada com PRF; (b) Descolamento ocasionado pelo surgimento de fissuras; (c) Desprendimento iniciado na extremidade da aplicação do reforço	30
Figura 2.8 – Detalhamento geral das vigas e esquema de ensaio utilizada por Andreolli	32
Figura 2.9 – Função momento-curvatura para seção retangular comparando as normas NBR 6118 e FIB Model Code (1990).....	33
Figura 2.10 – Função momento-curvatura para seção T comparando as normas NBR 6118 e MODEL CODE 90	33
Figura 2.11 – Modelo trilinear para construção do diagrama momento-curvatura.....	34
Figura 2.12 – Carga versus deslocamento no meio do vão para a viga testemunho	35
Figura 2.13 - Carga versus deslocamento no meio do vão para a viga reforçada com laminados não-protendidos.....	35
Figura 2.14 - Carga versus deslocamento no meio do vão para a viga reforçada com laminados protendidos.....	36
Figura 2.17 – Curvas momento-curvatura para corpos de prova com fibras Dramix 60/80 (40 kg/m ³). Dimensões 16 x 16 x 100 cm com um entalhe de 1 cm no meio do vão.....	43
Figura 2.18 – Viga de Kassimi	44
Figura 3.1 – Deformações em uma seção genérica de viga recuperada e reforçada	48
Figura 3.2 – Distribuição de tensões em uma seção transversal de concreto simples.....	53

Figura 3.3 – Seção genérica de uma viga reabilitada e reforçada: (a) seção esquemática; (b) distribuição de deformações, tensões e forças da seção	55
Figura 3.4 – Diagrama de deformações e tensões com as posições dos diferenciais de altura (dh) para cada lei constitutiva.....	58
Figura 4.1 – Fluxograma do processo de cálculo	78
Figura 5.1 – Configuração de carregamento e geometria de todas as vigas de Ferrari	79
Figura 5.2 – Detalhe das armaduras das vigas de Ferrari	80
Figura 5.3 – Viga do grupo VA de Vieira	83
Figura 5.5 – Esquema da viga V2C de Ferrari	99

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores de cargas e deslocamentos obtidos experimentalmente e por meio da solução analítica proposta pelos autores.....	36
Tabela 2.2 – Resultados das vigas de Kassimi et al. (2014).....	45
Tabela 5.1 – Propriedades das vigas.....	80
Tabela 5.2 – Forças notáveis para viga V1A de Ferrari	81
Tabela 5.3 – Propriedades das vigas de Vieira.....	83
Tabela 5.4 – Forças notáveis para vigas em concreto armado de Vieira.....	85
Tabela 5.5 – Propriedades da viga CVC.....	86
Tabela 5.6 – Forças notáveis para a viga de Kassimi.....	86
Tabela 5.7 – Propriedades da viga V1C de Ferrari.....	88
Tabela 5.8 – Forças notáveis para viga V1C de Ferrari	89
Tabela 5.9 – Propriedades das vigas de Vieira.....	90
Tabela 5.10 – Forças notáveis para as vigas de Vieira.....	95
Tabela 5.11 – Propriedades das vigas de Kassimi.....	96
Tabela 5.12 – Forças notáveis para as vigas de Kassimi.....	98
Tabela 5.13 – Propriedades da viga V2C de Ferrari	100
Tabela 5.14 – Forças notáveis para viga V2C de Ferrari	101
Tabela 5.15 – Resumo de resultados	102

LISTA DE EQUAÇÕES

(2.1)	30
(2.2)	31
(2.3)	31
(2.4)	38
(2.5)	38
(2.6)	38
(2.7)	38
(2.8)	39
(2.9)	39
(2.10)	39
(2.11)	39
(2.12)	40
(2.13)	40
(2.14)	40
(2.15)	41
(2.16)	41
(2.17)	41
(2.18)	41
(2.19)	41
(2.20)	41
(2.21)	41
(2.22)	42
(2.23)	42
(2.24)	44
(2.25)	45
(3.1)	48
(3.2)	49
(3.3)	49
(3.4)	49
(3.5)	49
(3.6)	49
(3.7)	49
(3.8)	50

(3.9)	51
(3.10)	51
(3.11)	52
(3.12)	52
(3.13)	52
(3.14)	53
(3.15)	54
(3.16)	56
(3.17)	56
(3.18)	56
(3.19)	57
(3.20)	57
(3.21)	57
(3.22)	58
(3.23)	58
(3.24) - a	59
(3.25)	59
(3.26) - a	60
(3.27) - a	60
(3.28)	60
(3.29)	61
(3.30) - a	61
(3.31)	61
(3.32) - a	62
(3.33) - a	62
(3.34) - a	62
(3.35) - a	63
(3.36) - a	63
(3.37) - a	63
(3.38)	64
(3.39)	64
(3.40)	64
(3.41)	64
(3.42)	64

(3.43)	65
(3.44)	65
(3.45)	66
(3.46)	66
(3.47)	66
(3.48)	66
(3.49)	66
(3.50)	66
(3.51)	66
(3.52)	66
(3.53)	66
(3.54)	66
(3.55)	66
(3.56)	67
(3.57)	67
(3.58)	67
(3.59)	67
(3.60)	67
(3.61)	67
(3.62)	67
(3.63)	67
(3.64)	67
(3.65)	67
(3.66)	68
(3.67)	68
(3.68)	68
(3.69)	68
(3.70)	69
(3.71)	69
(3.72)	69
(3.73)	69
(3.74)	70
(3.75) - a	70
(3.76) - a	70

(3.77)	70
(3.78)	71
(3.79) – a.....	71
(3.80) – a.....	71
(3.81) – a.....	72
(3.82)	73
(3.83)	73
(3.84)	73
(3.85)	73
(3.86)	73
(3.87)	74
(3.88)	74
(3.89)	74
(3.90)	74
(3.91)	74
(3.92)	74
(3.93)	74
(3.94)	75
(3.95)	75
(3.96)	75
(3.97)	75
(3.98)	75
(3.99)	75
(3.100)	75
(3.101)	75
(4.1)	76
(4.2)	76
(4.3)	76
(4.4)	76
(5.1)	99

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
1.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS	16
1.2	JUSTIFICATIVA	21
1.3	OBJETIVOS	22
1.3.1	Objetivo geral.....	22
1.3.2	Objetivos específicos.....	22
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....	23
2.1	INTRODUÇÃO.....	23
2.2	CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO (CRFA)	23
2.3	SISTEMA DE REFORÇO COM PRF	26
2.3.1	Modelo de ruína proposto pelo ACI	29
2.4	MODELOS ANALÍTICOS DE VIGAS REFORÇADAS COM PRF.....	31
2.4.1	Modelo de Andreoli	31
2.4.2	Modelo de Garcez e Silva Filho	34
2.5	MODELOS DE VIGAS DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS	37
2.5.1	Modelo de Lok e Pei	37
2.5.2	Modelo de Casanova e Rossi (1996).....	42
2.6	MODELOS DE VIGAS REABILITADAS CUJA FAIXA DO BANZO TRACIONADO FOI SUBSTITUÍDA POR COMPÓSITO DE CRFA	43
2.6.1	Predição de Kassimi	43
3	O TRATAMENTO ANALÍTICO.....	47
3.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	47
3.2	RELAÇÕES GEOMÉTRICAS	48
3.2.1	Deformações e curvatura	48
3.2.2	Deslocamento vertical.....	49
3.3	LEIS CONSTITUTIVAS	50
3.3.1	Concreto	50
3.3.2	Aço	53
3.3.3	Compósito cimentício com fibras de aço	54
3.3.4	Polímero Reforçado com Fibras.....	54
3.4	EQUILÍBRIO DE FORÇAS	55

3.4.1	Força resistente de compressão do concreto - F_{cc}	58
3.4.2	Força resistente de tração do concreto - F_{ct}	61
3.4.3	Força do compósito cimentício – F_r	63
3.5	MOMENTO RESISTENTE	68
3.5.1	Momento resistente de compressão do concreto - M_{cc}	69
3.5.2	Momento resistente de tração do concreto - M_{ct}	71
3.5.3	Momento resistente do compósito cimentício	73
4	FORMULAÇÃO GERAL PARA VIGAS REABILITADAS E REFORÇADAS....	76
4.1	PROCEDIMENTO GERAL DE CÁLCULO	76
5	RESULTADOS: VERIFICAÇÃO DO MODELO.....	79
5.1	VIGA EM CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL	79
5.1.1	Comparação com resultados experimentais de Ferrari.....	79
5.1.2	Comparação com resultados experimentais de Vieira.....	82
5.1.3	Comparação com resultados experimentais de Kassimi.....	85
5.2	VIGA EM CONCRETO ARMADO REFORÇADA À FLEXÃO COM PRF.....	87
5.2.1	Comparação com resultados experimentais de Ferrari.....	87
5.2.2	Comparação com resultados experimentais de Vieira.....	89
5.3	VIGA EM CONCRETO ARMADO REABILITADA COM CRFA	96
5.3.1	Comparação com resultados de Kassimi.....	96
5.4	VIGA DE CONCRETO ARMADO REABILITADA E REFORÇADA.....	99
5.4.1	Comparação com resultados de Ferrari.....	99
5.5	ANÁLISE FINAL	101
6	CONCLUSÃO.....	103
7	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	105

1 INTRODUÇÃO

1.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS

As estruturas de concreto armado são projetadas de modo a permitir diversos tipos de utilização, os quais podem ser classificados como residencial, comercial, industrial, ou qualquer outro tipo de serviço que seja requisitado pelo cliente. Além disso, a edificação deve garantir tal funcionalidade durante um certo período de tempo denominado vida útil de projeto (VUP) conforme definição da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT) NBR 15575-1:2013.

Entretanto, é comum que a vida útil real seja atingida antes da VUP, impossibilitando o uso adequado da estrutura. Muitas vezes isso ocorre devido à manifestação de diversas patologias que culminam na deterioração do concreto ou, em casos mais avançados, a despassivação e, posteriormente, corrosão do aço. Nesse caso torna-se necessário reabilitar a estrutura ou ainda reforçá-la em situações que a resistência for menor do que a solicitação do elemento estrutural ou vice-versa.

Existem diferentes técnicas para se reforçar uma estrutura. Dentre elas, Joaquim (2004) cita o aumento da seção transversal, a protensão externa, chapa de aço colada com resina epóxi e ainda o reforço com materiais compósitos como os polímeros reforçados com fibras (PRF), tradução do inglês para *fiber reinforced polymer* (FRP). Com exceção deste último método, todos os outros podem ser executados conforme de Souza e Ripper (1998).

Segundo o *American Concrete Institute* (ACI) 440.2R-08, o reforço de PRF não pode ser realizado em estruturas cuja armadura esteja em processo de corrosão ou o concreto em deterioração. Para esses casos é necessário que seja feita a reabilitação do substrato danificado, substituindo o concreto afetado por um material com propriedades mecânicas adequadas de modo a transmitir adequadamente as tensões do sistema de reforço.

De acordo com Ferrari (2007), uma alternativa viável para esse material de substituição são os materiais à base de cimento Portland tais como argamassas e microconcretos reforçados com fibras de aço que foi denominado simplesmente por compósitos cimentícios.

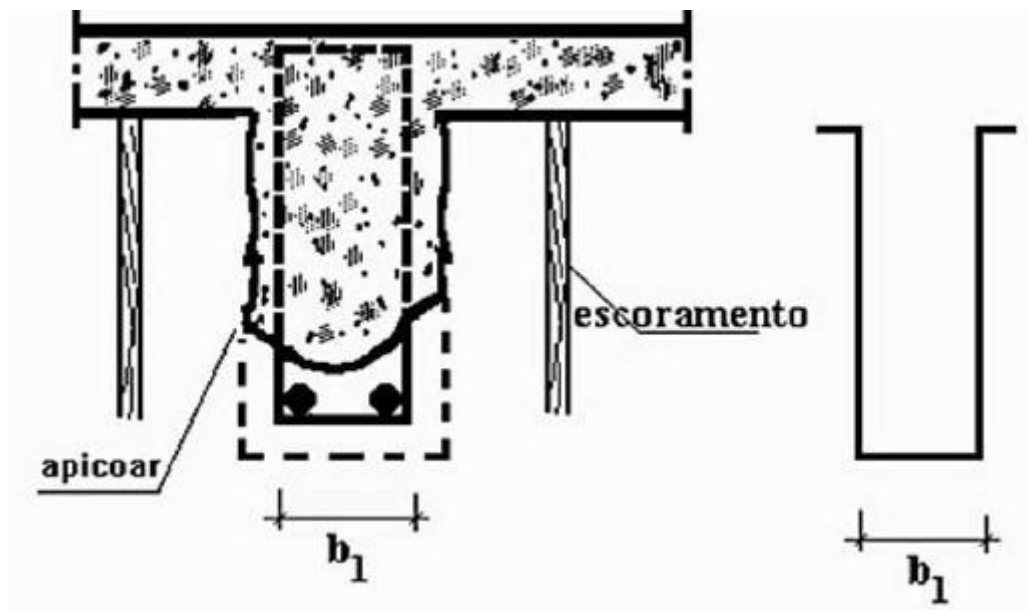
Para Souza e Ripper (1998) a execução de reparos profundos (aqueles que atingem profundidades superiores a 5,0 cm) deve ser realizada tomando cuidado para que as cavidades sejam preparadas removendo-se todo o concreto danificado até atingir o concreto sã. Após isso, a superfície deve ser regularizada, mas não alisada de modo a não prejudicar a aderência.

Para o caso de reabilitação de vigas que apresentarem corrosão nas armaduras, Souza e Ripper (1998) sugerem aumentar a armadura longitudinal da seção ou a própria seção de

concreto. Para isso as lajes adjacentes devem ser escoradas e então são adotados os seguintes procedimentos:

- Cortar a face inferior da viga até cerca de 2,5 cm acima da armadura;
- Fazer sulcos verticais na viga de modo a permitir a perfeita inserção dos novos estribos. Isto pode não ser necessário caso não haja deficiência na capacidade resistente ao cisalhamento;
- Apicoar as faces laterais da viga;

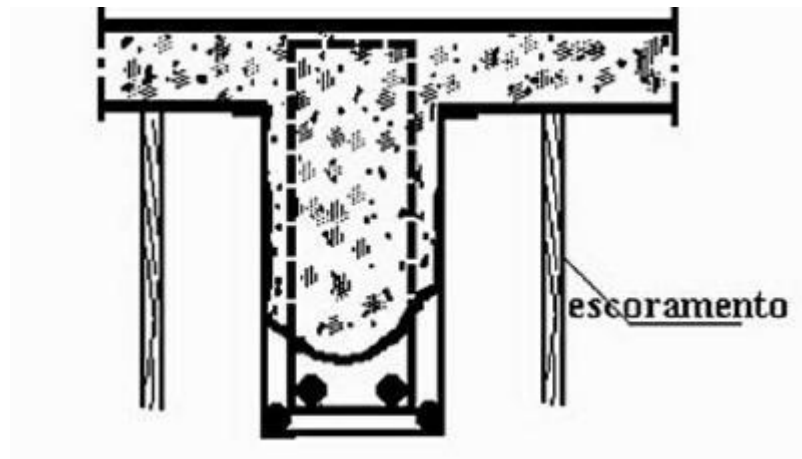
Figura 1.1 – Encaixe dos novos estribos



Fonte: Souza e Ripper (1998)

- Colocar as novas armaduras em posição;

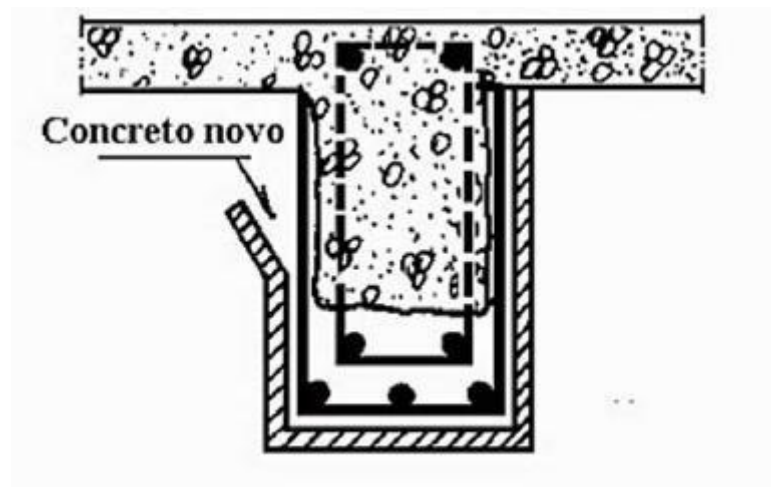
Figura 1.2 – Reforço da armadura longitudinal de vigas



Fonte: Souza e Ripper (1998)

- Uso de forma “cachimbo” para lançamento do material novo

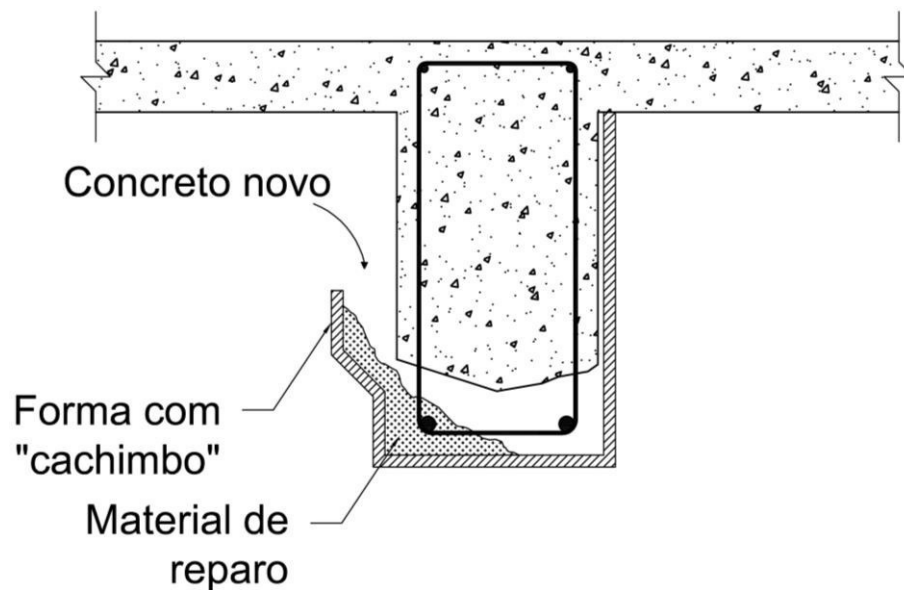
Figura 1.3 – Colocação das formas



Fonte: Souza e Ripper (1998)

Para o caso de substituição do concreto danificado pelo compósito cimentício, sem o aumento de armadura ou seção de concreto (apenas reabilitação do concreto deteriorado), é possível utilizar o mesmo procedimento anterior no entanto, excluindo as fases de inserção das armaduras extras e ajustando as formas de modo a manter a geometria original da seção da viga, conforme é mostrado na Figura 1.4.

Figura 1.4 – Lançamento do material de reparo com auxílio de forma dotada de cachimbo



Fonte: Adaptado de Souza e Ripper (1998)

As diversas pesquisas já desenvolvidas sobre o tema de reforço estrutural de vigas de concreto armado têm sido baseadas sobre o tripé: programa experimental, simulação numérica e abordagem analítica.

A abordagem analítica se reveste de grande importância visto que as normas são baseadas em equações matemáticas. Gamino et al. (2009) comentam que no projeto de um sistema de reforço ocorre a necessidade da adoção de modelos matemáticos adequados que permitam simular com precisão o comportamento dos elementos reforçados.

E, nesse sentido, no Brasil ainda não existem normas que abordem as recomendações técnicas sobre o reforço com PRF (Polímeros Reforçados com Fibras), o que leva os projetistas à busca pelas normas internacionais. O problema dessa conduta é que, segundo Amaral e Padaratz (2013), pesquisadores e normas apresentam métodos que mostram divergências nos resultados, demonstrando assim a grande importância de explorar cada vez mais esse conteúdo.

A abordagem analítica torna a análise mais palpável por apresentar equações matemáticas que não dependem de programas robustos de análise numérica. Além disso, segundo Takeya (2010), atualmente a informática permite a elaboração de problemas difíceis, analiticamente formulados, que sem tal formulação o cálculo, na prática, não seria possível. Essa forma de análise também é de grande importância na implementação de normas técnicas, pois essas são baseadas em recomendações técnicas e formulações matemáticas.

Bandini (2015), Basto e Barros (2008), Lima et al. (2003) e Schirmbeck (1988) desenvolveram, entre outros autores, estudos analíticos bem-sucedidos para a previsão do comportamento estrutural de vigas em concreto armado convencional por meio da obtenção de diagramas momento-curvatura ou ainda, da relação carga-deslocamento.

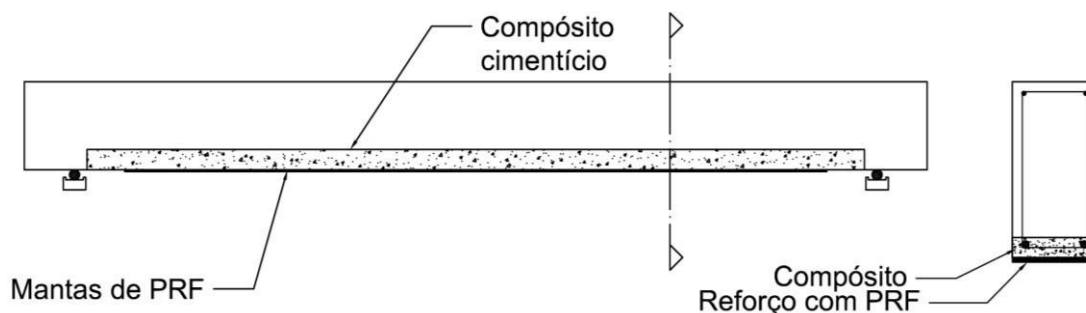
Avançando nesse assunto, Andreolli (2016), Dundar et al. (2015), Garcez e Silva Filho (2008), Picard et al. (1995) e Zaid et al. (2012) estudaram o comportamento de vigas de concreto armado reforçadas à flexão com PRF e obtiveram êxito nas análises.

Casanova e Rossi (1996), Casanova e Rossi (1997), Lok e Pei (1998) desenvolveram formulações matemáticas para análise de vigas de concreto com fibras de aço submetidas à flexão em três pontos, sendo apresentados gráficos de momento-curvatura e diagramas carga-deslocamento. Os resultados obtidos se mostraram fiéis aos experimentais, demonstrando a validade das equações propostas nesses trabalhos.

Apesar de existirem diversos trabalhos no meio científico que tratam de modelos analíticos visando o estudo de vigas de concreto armado, vigas de concreto com fibras de aço e de vigas reforçadas à flexão com PRF, não se tem conhecimento de pesquisas que englobem, entretanto, o comportamento de vigas recuperadas e reforçadas à flexão. É o caso, por exemplo, da viga indicada na Figura 1.5.

Trata-se de uma viga que teve o seu banzo inferior tracionado completamente removido e reconstituído usando-se um compósito cimentício de alto desempenho à base de fibras metálicas. A viga ilustrada representa o que ocorre na prática da engenharia, onde é comum deparar-se com vigas que necessitam ser reforçadas, mas previamente precisam ter o seu banzo tracionado recuperado por consequências da degradação do concreto pelo efeito da fissuração, corrosão, entre outros.

Figura 1.5 - Viga de concreto armado reabilitada e reforçada à flexão



Dessa forma, o presente trabalho tem como objetivo principal o desenvolvimento de um modelo matemático que possibilite representar o comportamento de uma viga de concreto armado que tenha a camada inferior do seu banzo tracionado recuperada pela adição de um concreto com fibras de aço bem como, a camada de reforço externo em PRF. A validação do referido modelo será feita utilizando-se resultados experimentais de trabalhos onde vigas foram previamente recuperadas e em seguida reforçadas a flexão.

1.2 JUSTIFICATIVA

O estudo analítico fornece ao projetista de estruturas meios para que se desenvolvam métodos de dimensionamento ou análise de elementos estruturais. Dessa forma, as normas técnicas se baseiam nas formulações matemáticas que são frutos desses estudos analíticos.

Dentre as normas técnicas que regem o dimensionamento de reforço de estruturas, destacam-se o ACI 440.2R-08, o *Japanese Concrete Institute (JCI) TC952* e o *Fédération Internationale du Béton (FIB) CEB-bulletin 14*. Por outro lado, as principais normas que apresentam aspectos de dimensionamento e análise de elementos confeccionados integralmente em concreto com fibras são o ACI 544.4R-88 e RILEM TC 162-TDF.

No Brasil não existem normas sobre dimensionamento de reforço de estruturas tampouco sobre concreto com fibras de aço. De qualquer forma, não existem normas, tanto dentro quanto fora do país, que contemplem o dimensionamento e análise de estruturas reabilitadas e reforçadas.

Nesse sentido o modelo a ser desenvolvido nesta dissertação se justifica na medida em que fornece o embasamento para o dimensionamento e análise de estruturas reabilitadas e reforçadas.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

O presente trabalho tem por objetivo geral o desenvolvimento e a validação de um modelo analítico que represente o comportamento de uma viga recuperada e reforçada com PRF.

1.3.2 Objetivos específicos

- Desenvolver modelo analítico que preveja o comportamento estrutural de uma viga reabilitada e reforçada à flexão, apresentando um diagrama de força *versus* deslocamento no meio do vão;
- Comparar os resultados obtidos do modelo analítico com resultados experimentais de outros autores;
- Validar o modelo desenvolvido com base nas comparações com os resultados experimentais.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 INTRODUÇÃO

Neste item serão abordados alguns conceitos com relação à reabilitação de estruturas e também o sistema de reforço com PRF, englobando as formas de utilização e as técnicas utilizadas para sua instalação.

Tratando-se de reabilitação, serão abordados alguns conceitos sobre o concreto reforçado com fibras de aço (CRFA) cujo embasamento teórico é extraído principalmente de Figueiredo (2000).

Além disso são apresentados os modelos analíticos de alguns autores como forma de respaldo para a comparação dos resultados a serem obtidos no final desta dissertação.

2.2 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO (CRFA)

O concreto é um material muito interessante na construção civil, sendo fácil de manipular e obtendo grande resistência à compressão. Em contrapartida, sua resistência à tração é muito baixa além de ser um material pouco deformável e de ruptura frágil, fazendo-se necessário o uso de algum reforço.

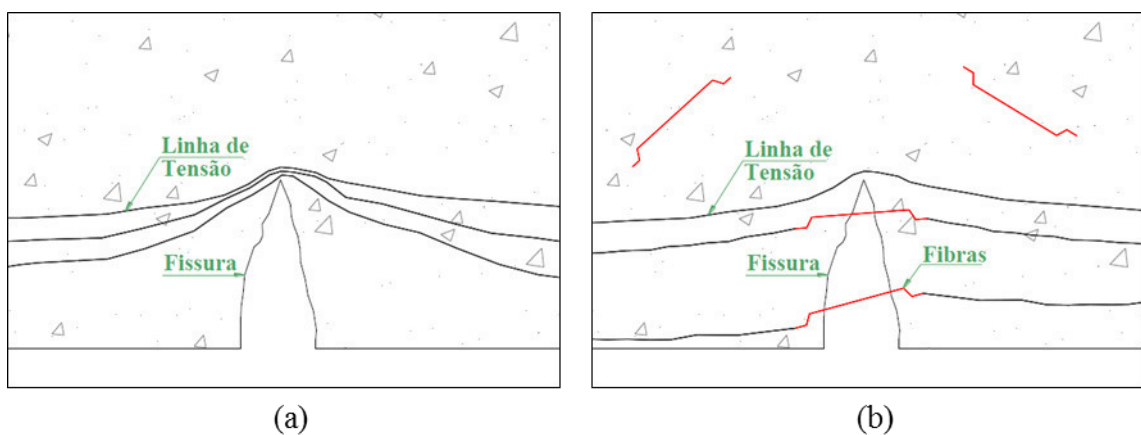
O material de reforço mais comum para o concreto é o aço que se faz presente em forma de barras que são embebidas na massa de concreto, sendo esse conjunto denominado de concreto armado. Por outro lado, existem pesquisas com relação ao uso de fibras na matriz do concreto, em especial fibras de aço que contribuem para o aumento da resistência após o início da formação de fissuras. Além das fibras de aço, existe ainda uma grande variedade de fibras para a utilização em materiais compósitos tais como: fibras de amianto, fibras de vidro, fibras de carbono, fibras naturais como as de sisal, cânhamo, juta, coco, fibras de polímero como as de polipropileno e polietileno (OLIVEIRA, 2005).

Nesse sentido Figueiredo (2000) atribui duas fases à composição do concreto reforçado com fibras: a matriz e as fibras. Essas fibras podem atuar como um reforço da matriz e o comportamento do material é função das propriedades de ambos os materiais. Dessa forma, o concreto deixa de ser um material frágil e passa a ser pseudo-dúctil, isto é, apresenta uma resistência residual mesmo após o início da fissuração da matriz cimentícia.

Esse material compósito com fibras possui diversas aplicações na construção civil podendo ser citado seu uso em telhas, painéis de vedação vertical, estruturas de concreto como túneis e pavimentos e outras aplicações em concreto projetado (FIGUEIREDO, 2000).

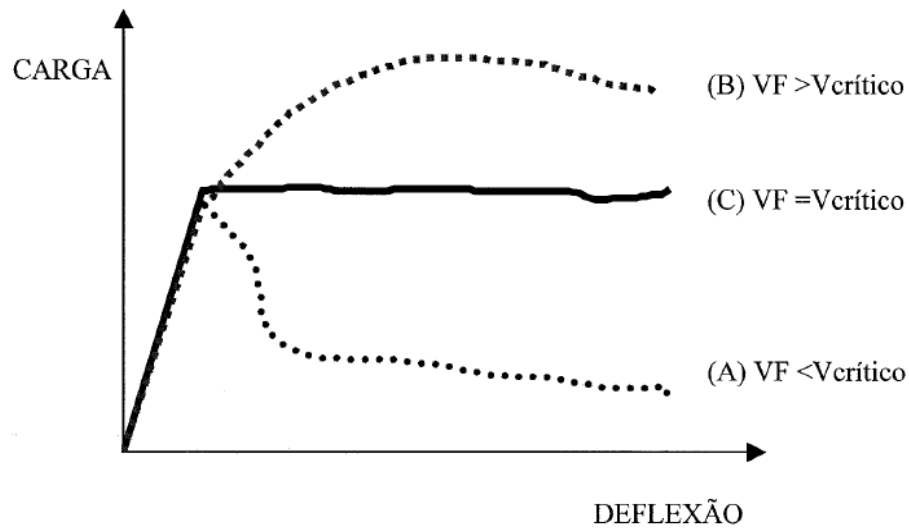
Para Arquez (2010) quando se trata de reforço estrutural, às vezes a relação benefício-custo permite utilizar as fibras em algumas aplicações. As fibras são materiais descontínuos e esbeltos e são adicionadas ao concreto com a finalidade de melhorar o desempenho da matriz cimentícia no período pós-fissuração. Dessa forma, a tensão concentrada na ponta da fissura é minimizada de forma a retardar o processo de fissuração (ARQUEZ, 2010) conforme é mostrado na Figura 2.1.

Figura 2.1 – Processo de transmissão de tensão: (a) concreto sem fibras; (b) concreto com fibras



Fonte: Adaptado de Arquez (2010)


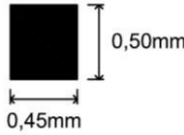

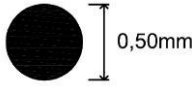

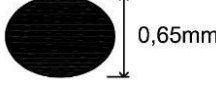

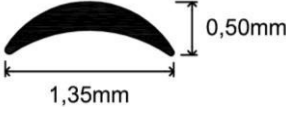
De acordo com Figueiredo (2000) quando são adicionadas fibras de resistência e módulo de elasticidade adequados e em teor apropriado, o concreto deixa de apresentar caráter estritamente frágil. Esse teor, ou volume de fibras (VF), influencia diretamente no comportamento do compósito. Assim, existe um volume de fibras crítico em que o diagrama carga-deslocamento passa a ser horizontal após a carga de fissuração. Quando o volume é maior que o crítico, a curva passa a ser mais acentuada na fase pós-fissuração e menos acentuada quando o volume é menor. Veja a Figura 2.2.

Figura 2.2 – Influência do volume de fibras na fase pós-fissuração

Fonte: Figueiredo (2000)

Essas fibras utilizadas como reforço para o concreto são definidas como curtas, de comprimentos discretos tendo o fator de forma (razão entre comprimento e diâmetro) entre 20 e 100 podendo apresentar qualquer tipo de seção transversal e são suficientemente pequenas para serem randomicamente dispersas em uma massa de concreto utilizando processos usuais de mistura (ACI 544.1R-96, 2002). A Figura 2.3 apresenta alguns exemplos de fibras metálicas.

Figura 2.3 – Características básicas de algumas fibras de aço

FIBRA	FORMATO LONGITUDINAL	SEÇÃO TRANSVERSAL	FATOR DE FORMA
F1			46,7
F2			60,0
F3			46,2
F4			27,3

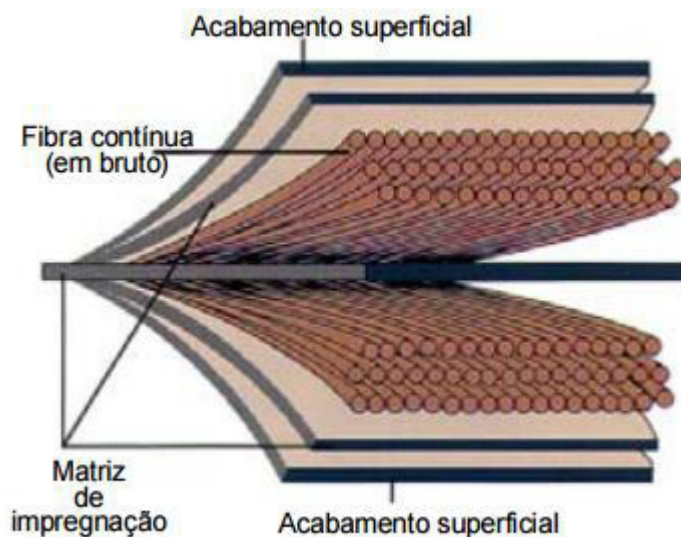
Fonte: Adaptado de Figueiredo (2000)

2.3 SISTEMA DE REFORÇO COM PRF

Os polímeros reforçados com fibras (PRF) são materiais compósitos e possuem três fases (Figura 2.4):

- Reforço: fase responsável pela resistência e rigidez do compósito;
- Matriz: fase que protege o reforço e permite a transmissão de esforços entre as camadas de reforços;
- Interface: determina os mecanismos de ruptura sendo responsável por transmitir os esforços entre o substrato de concreto e o sistema de reforço.

Figura 2.4 – Aspecto do compósito de PRF



Fonte: Juvandes (1999)

Segundo Juvandes (1999), a partir das principais fibras comercializadas como o vidro (G), o carbono (C) e a aramida (A) constroem-se os respectivos compósitos denominados internacionalmente por *GFRP* (*glass fiber reinforced polymer*), *CFRP* (*carbono fiber reinforced polymer*) e *AFRP* (*aramida fiber reinforced polymer*).

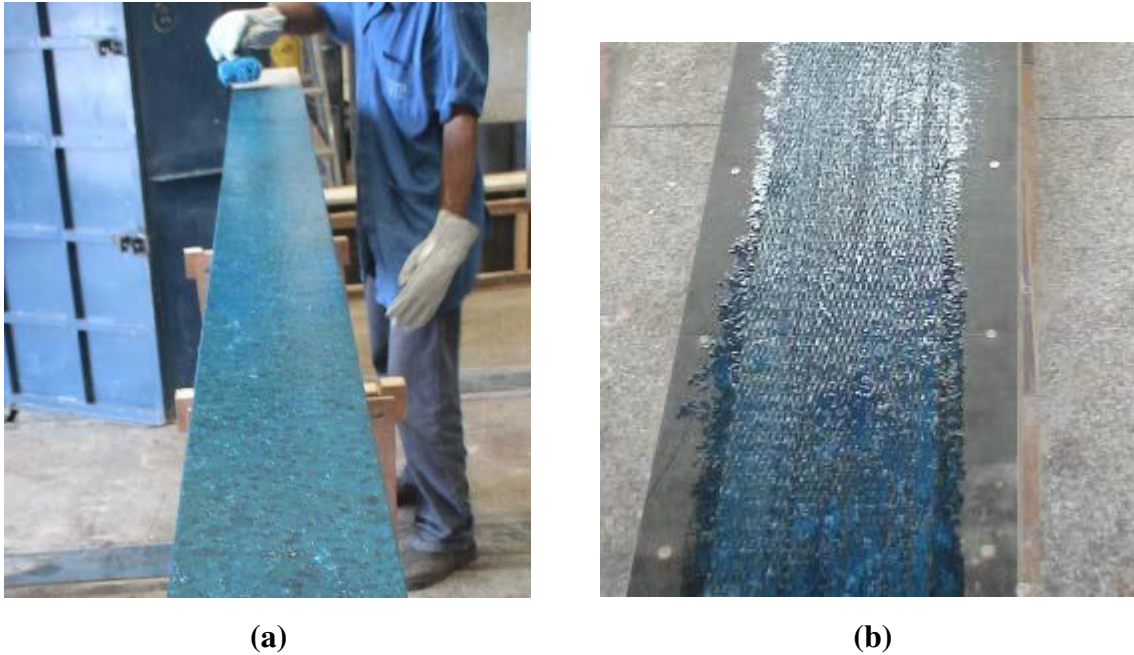
De acordo com o ACI 440R-96 (2002), a forma mais comum para o uso do polímero reforçado com fibras em aplicações estruturais é denominada *laminado*. Esses laminados são fabricados empilhando-se um determinado número de camadas finas de fibras e matriz consolidando-os de modo a se obter a espessura desejada. Além disso, a orientação e ordem de cada uma dessas camadas podem ser controlados para gerar diversas propriedades físicas e mecânicas. Dessa forma, Juvandes (1999) classifica esse material em três grupos: *unidirecionais (1D)*, *bidirecionais (2D)* e *multidirecionais (3D)*.

Juvandes (1999) distingue duas formas de utilização do PRF: *sistemas pré-fabricados* e os *sistemas curados “in situ”*. Para ele, os sistemas pré-fabricados se baseiam na substituição do uso das tradicionais chapas rígidas de aço por laminados semi-rígidos de PRF unidirecionais. Já os sistemas curados “in situ” consistem na aplicação de fibras em forma de *fiôs*, *mantas* ou *tecidos* sobre uma camada de adesivo epóxi que tenha sido previamente espalhada sobre a superfície a se instalar o reforço.

Tratando-se de técnicas de aplicação, no meio científico é dado bastante ênfase à técnica de colagem externa (*externally bonded reinforcement, EBR*) cuja instalação pode ser feita com

mantas de PRF por meio do sistema curado “in situ” ou com faixas de laminados pré-fabricados. A Figura 2.5 apresenta um exemplo de aplicação do sistema curado “in situ” que também representa a técnica EBR.

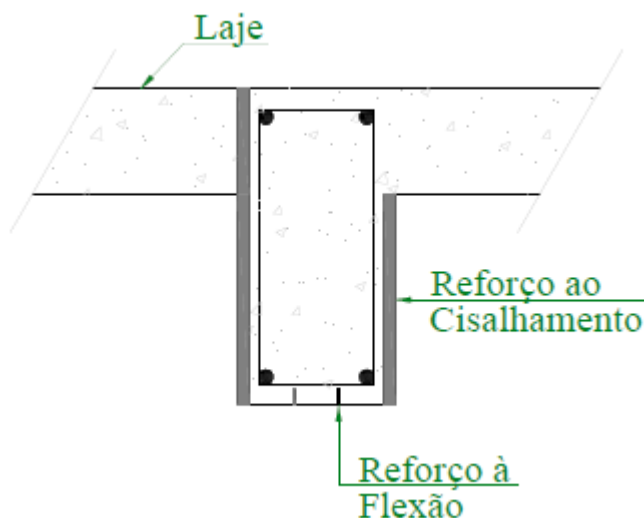
Figura 2.5 – Sistema curado “in situ”: (a) aplicação do epóxi; (b) manta pré-saturada com epóxi



Fonte: Ferrari (2007)

Além da técnica EBR de aplicação do reforço, também é bastante difundido a técnica de inserção dos elementos de reforço em entalhes. Essa técnica é conhecida internacionalmente como *Near Surface Mounted (NSM)* e, para Arquez (2010), veio para suprir diversas deficiências encontradas no sistema de colagem externa tais como o desprendimento prematuro do reforço, suscetibilidade ao vandalismo, fogo e raios ultravioleta. A Figura 2.6 apresenta uma ilustração dessa técnica.

Figura 2.6 – Ilustração da técnica NSM



Fonte: Arquez (2010)

2.3.1 Modelo de ruína proposto pelo ACI

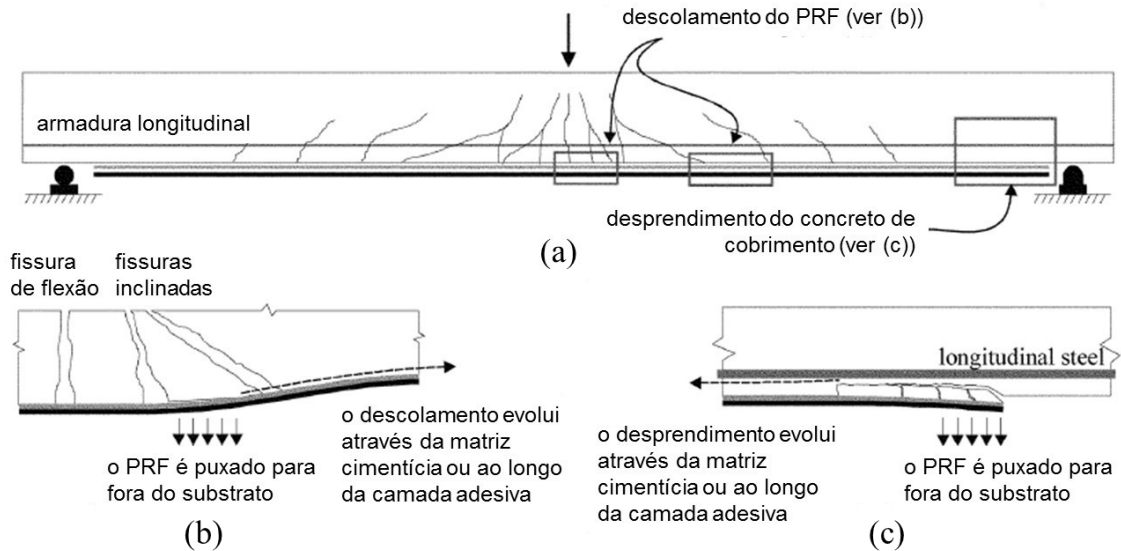
Segundo o ACI 440.2R-08, os modos de ruína de uma viga reforçada podem ocorrer nas seguintes formas:

- Esmagamento do concreto na compressão antes do escoamento do aço;
- Escoamento do aço tracionado seguido de ruptura do PRF;
- Escoamento do aço tracionado seguido do esmagamento do concreto comprimido;
- Descolamento do PRF do substrato de concreto (*debonding*).
- Desprendimento do concreto de cobertura da armadura ao longo do banzo tracionado (*delamination*);

Vale salientar que o desprendimento e o descolamento muitas vezes são alvos de dúvida, mas consistem em dois diferentes modos de ruína. O descolamento (ou *debonding*, em inglês) está relacionado à falha da interface entre o reforço de PRF e o concreto em que a manta ou a placa está aderida, ocasionando a ruptura do sistema de reforço. Já o desprendimento (ou *delamination*, em inglês) está associado à falha na matriz cimentícia do concreto que cobre a armadura levando ao “rasgamento” desse concreto de cobertura e perda da efetividade do reforço, além de deixar a armadura exposta.

A Figura 2.7 apresenta uma ilustração dos modos de ruína relacionados à falha do PRF (descolamento e desprendimento).

Figura 2.7 – Descolamento e desprendimento do sistema EBR: (a) Comportamento de uma viga à flexão reforçada com PRF; (b) Descolamento ocasionado pelo surgimento de fissuras; (c) Desprendimento iniciado na extremidade da aplicação do reforço



Fonte: Adaptado de ACI 440.2R (2008)

Para que seja evitado o descolamento do PRF, a norma prescreve uma deformação máxima para o reforço, ε_{fd} , conforme apresentado na equação (2.1).

$$\varepsilon_{fd} = 0,41 \sqrt{\frac{f'_c}{nE_f t_f}} \leq 0,9\varepsilon_{fu} \quad (2.1)$$

Em que:

f'_c : Resistência à compressão do concreto;

n : Número de camadas de reforço;

E_f : Módulo de elasticidade do PRF;

t_f : Espessura da manta de reforço;

ε_{fu} : Deformação última à tração do PRF.

O nível de deformação no reforço de PRF na ruptura é dado pela equação (2.2).

$$\varepsilon_{fe} = \varepsilon_{cu} \left(\frac{d_f - c}{c} \right) - \varepsilon_{bi} \leq \varepsilon_{fd} \quad (2.2)$$

Sendo:

ε_{cu} : Deformação última de compressão do concreto;

c : Posição da linha neutra;

ε_{bi} : Deformação inicial do substrato antes da aplicação do reforço.

Cabe aqui observar que se tratando de uma análise do comportamento de vigas e não do dimensionamento delas, a parcela ε_{bi} é suprimida, visto que, em laboratório, o sistema de reforço é instalado antes da aplicação de qualquer carga.

A tensão desenvolvida no reforço, σ_{fe} é dada pela equação (2.3).

$$\sigma_{fe} = E_f \varepsilon_{fe} \quad (2.3)$$

2.4 MODELOS ANALÍTICOS DE VIGAS REFORÇADAS COM PRF

2.4.1 Modelo de Andreolli

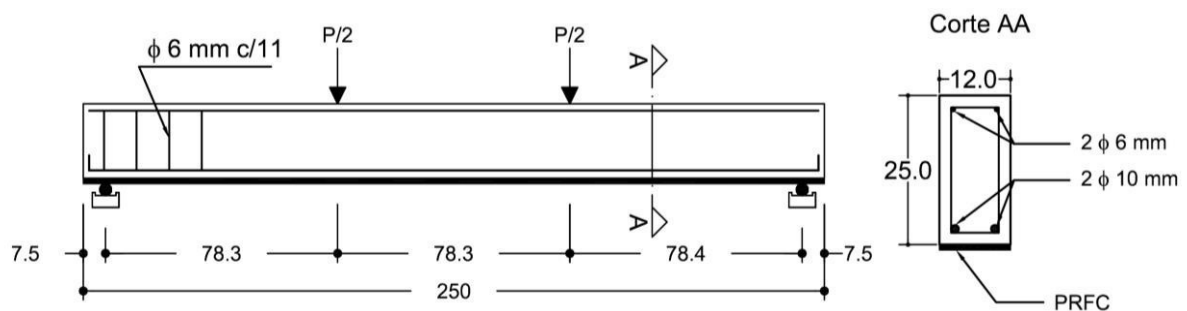
Andreolli (2016) desenvolveu um modelo analítico para obtenção do diagrama momento – curvatura para avaliação de reforço à flexão com PRFC de vigas com seção retangular e seção T. Em seu trabalho são utilizadas leis constitutivas de concreto segundo a ABNT NBR 6118 (2007) e FIB Model code (1990).

No modelo o autor não considerou o comportamento à tração do concreto, desprezando-se assim a resistência desse material na porção abaixo da linha neutra. Comparando seu modelo com resultados experimentais de Beber et al. (2000) e Andreolli et al. (2000), para vigas de concreto armado convencional, sem reforço, obteve erros em torno de 4% ao avaliar cargas de ruptura para ambas as normas. Já para vigas reforçadas com apenas uma camada de PRFC, a previsão de ruptura ficou na ordem de 6% também comparando os resultados experimentais com os resultados das duas normas. Para vigas com 4 camadas o valor teórico de ruptura de utilizando as duas normas se aproximam bastante, mas ao comparar com resultados experimentais, foi obtido um erro em torno de 15%. Com 7 camadas o erro obtido considerando

as prescrições da NBR 6118 foi de 5%, mas ao utilizar o modelo da FIB Model Code (1990), foi obtido um valor quase exato, cujo erro foi menor que 1%. Por fim, ao modelar uma viga com 10 camadas de PRFC, pela NBR 6118 (2007) o erro obtido na previsão de ruptura foi de aproximadamente 3%, contra um erro de quase 7% para a consideração do comportamento do concreto segundo a FIB Model Code (1990).

A Figura 2.8 apresenta o detalhamento do protótipo e esquema de ensaio realizado por Beber et al. (2000).

Figura 2.8 – Detalhamento geral das vigas e esquema de ensaio utilizada por Andreolli



CONCRETO

Traço – 1:2,49:3,69 a/c=0,59
 Cimento CPV 316kg/m³
 Abatimento médio - 54±10 mm
 $f_c = 33,58 \pm 2,74$ MPa

ARMADURA

CA-50A – $\sigma_e = 565$ MPa (armadura principal)
 CA-60A – $\sigma_e = 738$ MPa (armadura construtiva/estribos)

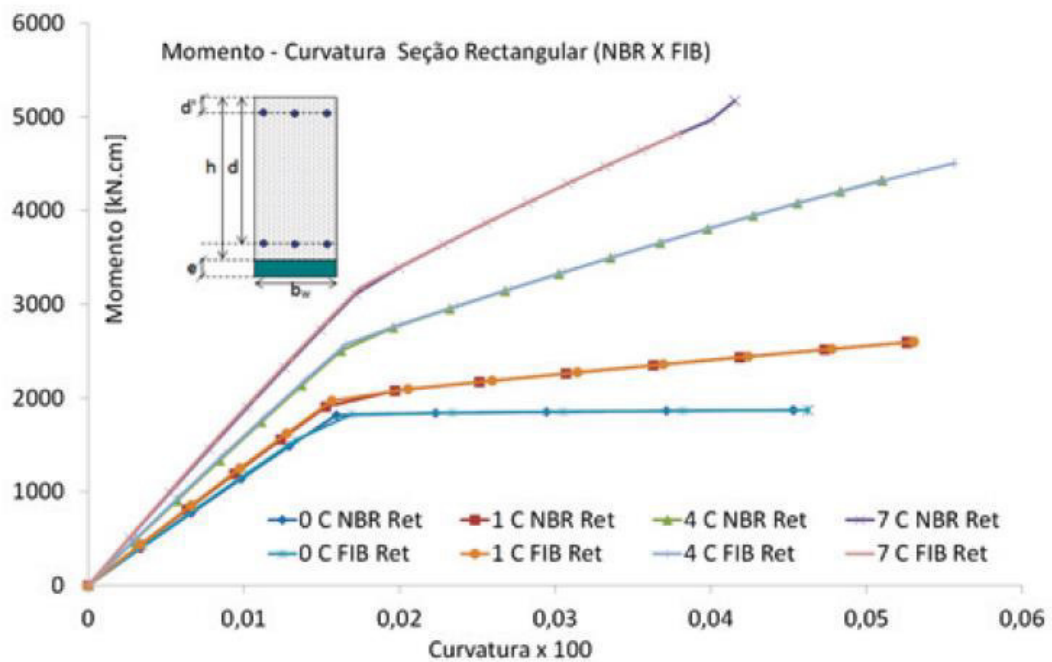
REFORÇO

$f_f = 3400$ MPa; $E_f = 230$ GPa

Fonte: Adaptado de Andreolli (2016)

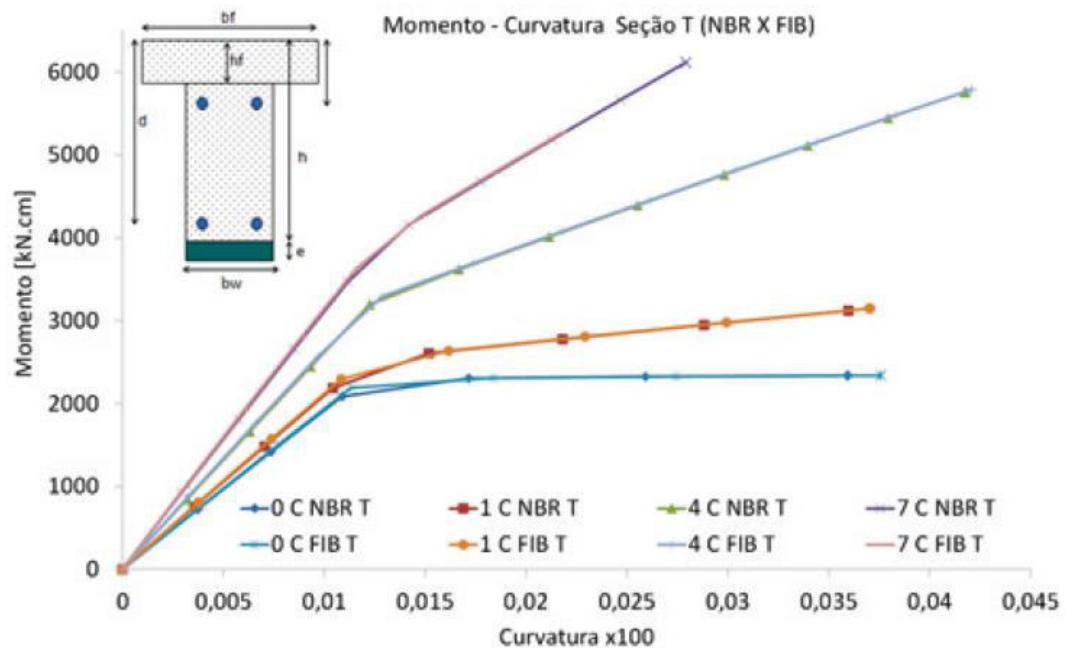
A Figura 2.9 e Figura 2.10 apresentam curvas da função momento-curvatura para seção retangular e seção T em que são comparadas as formulações da NBR 6118 (2007) e FIB Model Code (1990) em relação a vigas de referência, sem reforço e vigas reforçadas com 1, 4 e 7 camadas de PRF.

Figura 2.9 – Função momento-curvatura para seção retangular comparando as normas NBR 6118 e FIB Model Code (1990)



Fonte: Andreolli (2016)

Figura 2.10 – Função momento-curvatura para seção T comparando as normas NBR 6118 e MODEL CODE 90

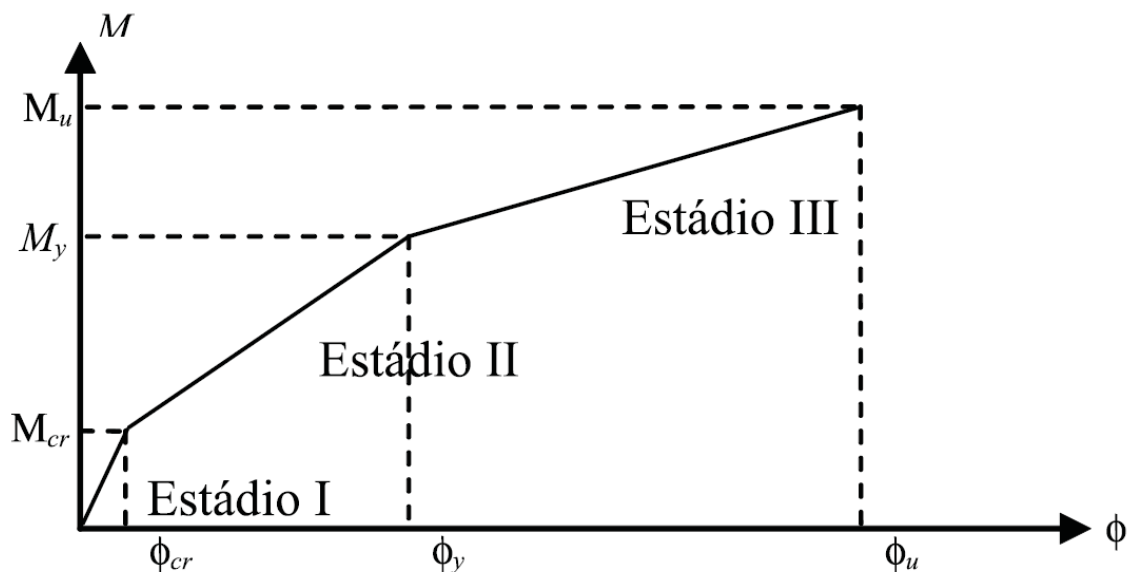


Fonte: Andreolli (2016)

2.4.2 Modelo de Garcez e Silva Filho

Garcez e Silva Filho (2009) propuseram uma solução analítica trilinear para o comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRF protendidos e não protendidos. O modelo consiste na construção da curva momento-curvatura discretizada em três fases lineares de carregamento denominadas Estádios. Cada estágio é separado por um ponto característico de Momento e Curvatura. Dessa forma o fim do Estádio I e início do Estádio II é delimitado pelo ponto (M_{cr}, Φ_{cr}) que representam o início da fissuração da peça. O limite entre Estádio II e Estádio III é o ponto (M_y, Φ_y) , determinando o ponto onde ocorre escoamento da armadura. Por último, a ruptura do material e fim do Estádio III ocorre no ponto (M_u, Φ_u) onde é determinado se a ruptura ocorre no PRF ou no concreto comprimido. A Figura 2.11 apresenta o diagrama trilinear proposto por esse autor.

Figura 2.11 – Modelo trilinear para construção do diagrama momento-curvatura



Fonte: Garcez e Silva Filho (2009)

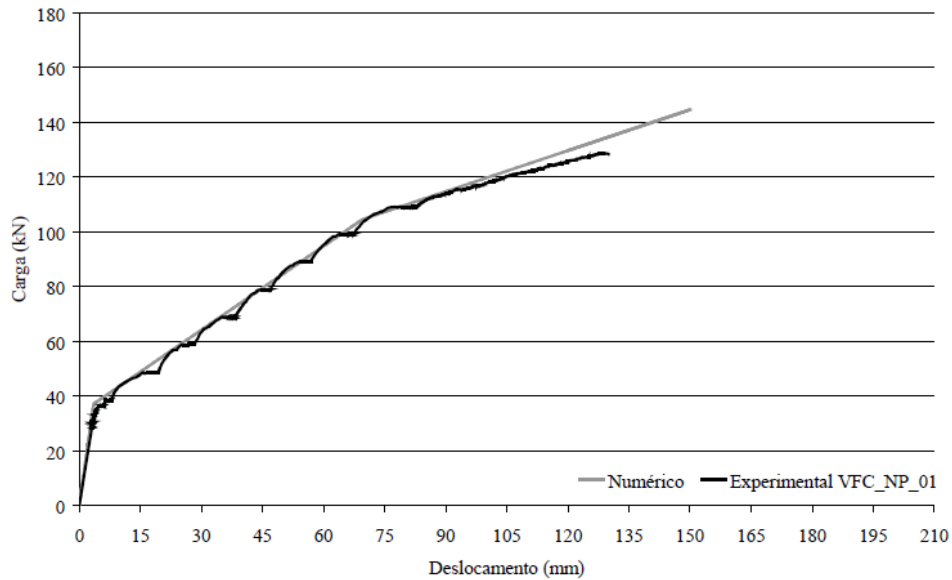
No cálculo do momento último são consideradas as possibilidades de ruptura tanto do PRF quanto do concreto comprimido, sendo utilizada a formulação de Teng et al (2002, apud GARCEZ e SILVA FILHO, 2009) para a determinação da força máxima ancorada pelo reforço.

O modelo obtido pelos autores foi validado ao se realizar comparações com resultados experimentais de três vigas:

- Viga testemunho em concreto armado convencional, sem reforço (VT);
- Viga reforçada com dois laminados de PRF não-protendidos (VFC_NP_01);

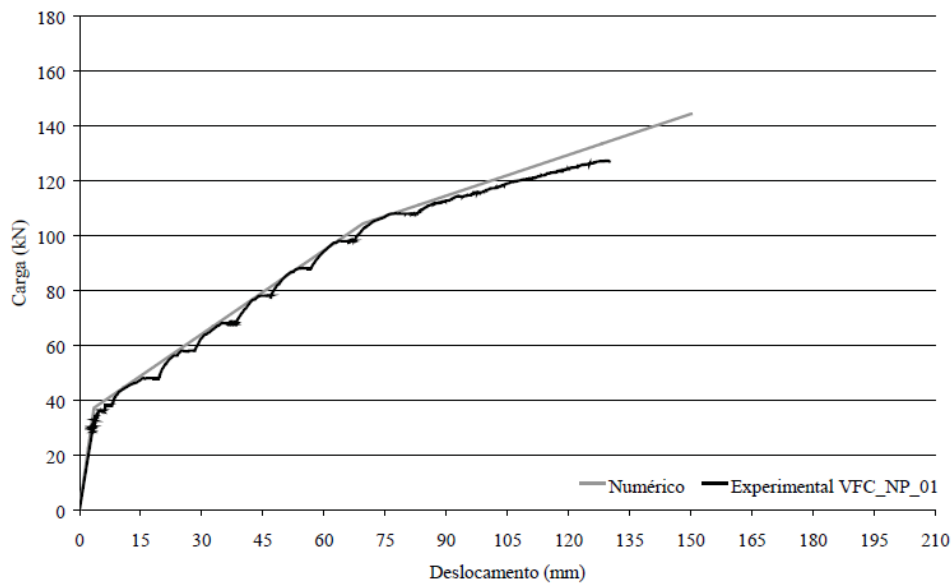
- Viga reforçada com dois laminados de PRF protendidos (VFC_PE_01);

Figura 2.12 – Carga versus deslocamento no meio do vão para a viga testemunho



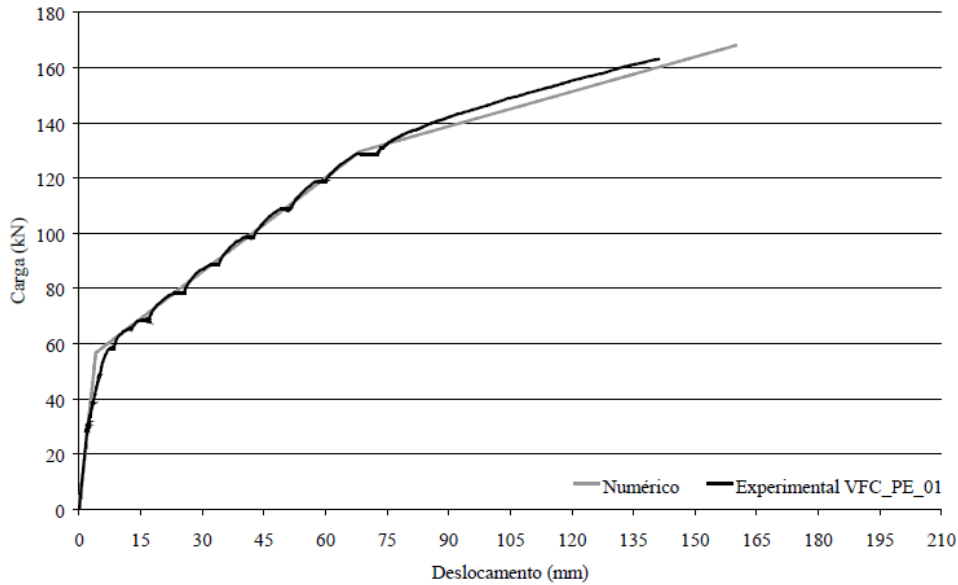
Fonte: Garcez e Silva Filho (2009)

Figura 2.13 - Carga versus deslocamento no meio do vão para a viga reforçada com laminados não-protendidos



Fonte: Garcez e Silva Filho (2009)

Figura 2.14 - Carga versus deslocamento no meio do vão para a viga reforçada com laminados protendidos



Fonte: Garcez e Silva Filho (2009)

A Tabela 2.1 apresenta os valores das cargas e deslocamentos obtidos experimentalmente (P_{exp} , δ_{exp}) e por meio da solução analítica (P_{num} , δ_{num}).

Tabela 2.1 – Valores de cargas e deslocamentos obtidos experimentalmente e por meio da solução analítica proposta pelos autores

Viga	Fase do diagrama	P_{exp} (kN)	δ_{exp} (mm)	P_{num} (kN)	δ_{num} (mm)	$\frac{P_{num}}{P_{exp}}$	$\frac{\delta_{num}}{\delta_{exp}}$
VT	Fissuração do concreto	37,000	3,440	36,970	3,530	0,999	1,026
	Escoamento do aço	88,000	71,380	89,520	67,540	1,017	0,946
	Final do ensaio	100,140	219,910	100,140	198,150	1,000	0,901
VFC_NP_01	Fissuração do concreto	37,000	3,440	36,970	3,530	0,999	1,026
	Escoamento do aço	108,000	76,930	104,210	69,530	0,964	0,903
	Ruptura do reforço	127,250	129,480	144,430	150,460	1,132	1,162
VFC_PE_02	Fissuração do concreto	58,000	7,680	57,890	4,031	0,998	0,524
	Escoamento do aço	128,000	70,870	129,780	69,190	1,014	0,976
	Ruptura do reforço	162,410	144,070	167,780	159,950	1,033	1,110

Fonte: Garcez e Silva Filho (2009)

2.5 MODELOS DE VIGAS DE CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS

2.5.1 Modelo de Lok e Pei

Para Lok e Pei (1998) o concreto reforçado com fibras de aço possui, na compressão, comportamento parabólico até a deformação “última” (entende-se, aqui, como deformação de plastificação) do concreto ϵ_{01} . A partir desse ponto, a tensão absorvida pelo material é constante e igual a σ_{01} até a deformação de ruína ϵ_{1}^{**} .

Já para o comportamento à tração desse material, também é admitido comportamento parabólico em uma fase inicial (pré-fissuração), mas a partir da deformação última de tração ϵ_{02} , o diagrama passa a ser idealizado como bilinear, dividindo-se em dois processos: o primeiro, definido pelos pontos extremos $(\epsilon_{02}, \sigma_{02})$ e $(\epsilon_2^*, \sigma_2^*)$ e o segundo por $(\epsilon_2^*, \sigma_2^*)$ e $(\epsilon_2^{**}, 0)$. O modelo constitutivo pode ser visualizado graficamente com suas respectivas equações no Quadro 2.1.

Quadro 2.1 - Comportamento tensão-deformação do compósito cimentício

$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_{01} - \frac{\sigma_{01}}{(\epsilon_{01})^2} (\epsilon_1 - \epsilon_{01})^2, & 0 \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_{01} \\ \sigma_{01}, & \epsilon_{01} \leq \epsilon_1 \leq \epsilon_1^{**} \end{cases}$	$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma_{02} - \frac{\sigma_{02}}{(\epsilon_{02})^2} (\epsilon_2 - \epsilon_{02})^2, & 0 \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_{02} \\ \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\epsilon_2^* - \epsilon_{02}} \right) \epsilon_2 + \frac{\sigma_{02} \epsilon_2^* - \sigma_2^* \epsilon_{02}}{\epsilon_2^* - \epsilon_{02}}, & \epsilon_{02} \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_2^* \\ \left(\frac{\sigma_2^*}{\epsilon_2^* - \epsilon_2^{**}} \right) \epsilon_2 - \left(\frac{\sigma_2^* \epsilon_2^{**}}{\epsilon_2^* - \epsilon_2^{**}} \right), & \epsilon_2^* \leq \epsilon_2 \leq \epsilon_2^{**} \end{cases}$
(2.4)	(2.7)

Fonte: Adaptado de Lok e Pei (1998)

A relação matemática do comportamento à compressão do compósito cimentício é dada pelos autores e mostrada na equação (2.4).

$$\sigma_1 = \begin{cases} \sigma_{01} - \frac{\sigma_{01}}{(\varepsilon_{01})^2} (\varepsilon_1 - \varepsilon_{01})^2, & 0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_{01} \\ \sigma_{01}, & \varepsilon_{01} \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1^{**} \end{cases} \quad (2.4)$$

Em que:

σ_1 : Tensão de compressão para o compósito cimentício (variável);

ε_1 : Deformação de compressão relacionada a σ_1 ;

σ_{01} : Resistência à compressão última dada pela equação (2.5);

ε_{01} : Deformação última de compressão dada pela equação (2.6);

$$\sigma_{01} = 0,67f_{cu}/\gamma_m \quad (2.5)$$

Sendo:

f_{cu} : Resistência característica à compressão;

γ_m : Fator de segurança parcial do material;

$$\varepsilon_{01} = 2,4 \times 10^{-4} \sqrt{\frac{f_{cu}}{\gamma_m}} \quad (2.6)$$

ε_1^{**} : Deformação de ruína à compressão.

Para esforços de tração, a relação parabólica da fase pré-fissuração é idêntica à relação dada para a compressão, no entanto, apenas o índice “01” é substituído por “02”. Além disso, a fase pós-fissuração (processo I e processo II) é descrita pelas equações de retas de cada processo. Dessa forma, a equação (2.7) descreve o modelo constitutivo à tração do compósito cimentício, segundo Lok e Pei (1998).

$$\sigma_2 = \begin{cases} \sigma_{02} - \frac{\sigma_{02}}{(\varepsilon_{02})^2} (\varepsilon_2 - \varepsilon_{02})^2, & 0 \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_{02} \\ \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) \varepsilon_2 + \frac{\sigma_{02}\varepsilon_2^* - \sigma_2^*\varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}}, & \varepsilon_{02} \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_2^* \\ \left(\frac{\sigma_2^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) \varepsilon_2 - \left(\frac{\sigma_2^*\varepsilon_2^{**}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right), & \varepsilon_2^* \leq \varepsilon_2 \leq \varepsilon_2^{**} \end{cases} \quad (2.7)$$

Conforme já mencionado, a fase pós-fissuração é repartida em dois processos representados, cada um, por uma reta. O processo I é uma reta delimitada pelos pontos $(\varepsilon_{02}; \sigma_{02})$ e $(\varepsilon_2^*; \sigma_2^*)$ sendo essas variáveis descritas pelas equações (2.8), (2.9), (2.10) e (2.11), respectivamente na ordem em que aparecem.

$$\sigma_{02} = f_t \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_{02} = \frac{\varepsilon_{01}}{\sigma_{01}} \sigma_{02} \quad (2.9)$$

$$\varepsilon_2^* = \tau_d \frac{L}{d} \frac{1}{E_{fp}} \quad (2.10)$$

$$\sigma_2^* = \frac{1}{2} V_f \tau_d \frac{L}{d} \quad (2.11)$$

Em que:

σ_{02} : Tensão correspondente ao início da formação de fissuras da matriz cimentícia;

f_t : Resistência à tração direta do compósito;

ε_{02} : Deformação correspondente ao início da formação de fissuras da matriz cimentícia;

σ_2^* : Tensão residual;

ε_2^* : Deformação residual correspondente a σ_2^* ;

ε_2^{**} : Deformação de ruína à tração;

V_f : Concentração do volume de fibra;

τ_d : Tensão de aderência: *dynamic bond stress* igual a 2,297 N/mm² segundo Henagar (1978, apud LOK e PEI, 1998);

L : Comprimento da fibra;

d : Diâmetro equivalente da fibra.

Vale salientar que o quociente L/d é também conhecido como fator de proporção das fibras.

O valor de ε_2^{**} é incerto, mesmo assim, são recomendados alguns valores como 0,02; 0,0145 e 0,1 respectivamente para os casos particulares dos trabalhos de Craig et al. (1987, apud LOK E PEI 1998), Chuang e Mai (1987, apud LOK E PEI 1998) e Sakai e Nakamura (1986, apud LOK E PEI 1998). Em contrapartida, Lok e Pei (1998) demonstraram em seu estudo paramétrico que o valor de ε_2^{**} não possui efeitos significantes no comportamento pós-fissuração de peças de concreto com fibras submetidas à flexão.

A partir disso, são deduzidas equações de modo a calcular as forças e os momentos resistentes de compressão e de tração de uma viga construída apenas com o compósito cimentício (sem armaduras).

As forças resistentes de compressão e tração, denominadas neste trabalho por $F_{r,c}$ e $F_{r,t}$ respectivamente, são dadas pela (2.12) e (2.13).

$$F_{r,c} = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_1 d\varepsilon_1 \quad (2.12)$$

$$F_{r,t} = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_2 d\varepsilon_2 \quad (2.13)$$

Sendo:

b: Largura da viga;

x: Posição da linha neutra a partir da borda mais comprimida;

$F_{r,c}$: Força de resistência à compressão do concreto reforçado com fibras de aço;

$F_{r,t}$: Força de resistência à tração do concreto reforçado com fibras de aço;

ε_{c0} : Deformação da borda mais comprimida da seção;

ε_{t0} : Deformação da borda mais tracionada da seção;

h: Altura total da seção;

σ_1 : Tensão de compressão do concreto reforçado com fibras de aço;

σ_2 : Tensão de tração do concreto reforçado com fibras de aço;

ε_1 : Deformação de compressão do concreto reforçado com fibras de aço;

ε_2 : Deformação de tração do concreto reforçado com fibras de aço;

As integrais $\int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_1 d\varepsilon_1$ e $\int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_2 d\varepsilon_2$ já foram deduzidas no trabalho de Lok e Pei (1998) e são apresentadas nas equações (2.14) e (2.15) respectivamente.

$$\int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_1 d\varepsilon_1 = \begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{\sigma_{01}}{(\varepsilon_{01})^2} (\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{01})^3 + \sigma_{01} \varepsilon_{c0} - \frac{1}{3} \sigma_{01} \varepsilon_{01}, & 0 \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_{01} \\ \sigma_{01} \varepsilon_{c0} - \frac{1}{3} \sigma_{01} \varepsilon_{01}, & \varepsilon_{01} \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_{1}^{**} \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_2 d\varepsilon_2 = \begin{cases} -\frac{1}{3} \frac{\sigma_{02}}{(\varepsilon_{02})^2} (\varepsilon_{t0} - \varepsilon_{02})^3 + \sigma_{02} \varepsilon_{t0} - \frac{1}{3} \sigma_{02} \varepsilon_{02}, 0 \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{02} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_{t0})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{02} \varepsilon_2^* - \sigma_2^* \varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) \varepsilon_{t0} + C_{21}^*, \varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^* \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) (\varepsilon_{t0})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^* \varepsilon_2^{**}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) \varepsilon_{t0} + C_{22}^*, \varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**} \end{cases} \quad (2.15)$$

Em que as constantes C_{21}^* e C_{22}^* são calculadas por meio das relações presentes nas equações (2.16) e (2.17).

$$C_{21}^* = \frac{2}{3} \sigma_{02} \varepsilon_{02} - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_{02})^2 + \left(\frac{\sigma_{02} \varepsilon_2^* - \sigma_2^* \varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) \varepsilon_{02} \right] \quad (2.16)$$

$$C_{22}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_2^*)^2 + \left(\frac{\sigma_{02} \varepsilon_2^* - \sigma_2^* \varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) \varepsilon_2^* + C_{21}^* - \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) (\varepsilon_2^*)^2 - \left(\frac{\sigma_2^* \varepsilon_2^{**}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) \varepsilon_2^* \right] \quad (2.17)$$

Os momentos resistentes de compressão e de tração são dadas conforme equações (2.18) e (2.19), segundo Lok e Pei (1998).

$$M_{r,c} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_1 \varepsilon_1 d\varepsilon_1 \quad (2.18)$$

$$M_{r,t} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_2 \varepsilon_2 d\varepsilon_2 \quad (2.19)$$

Sendo:

$\int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_1 \varepsilon_1 d\varepsilon_1$: Equação fornecida por Lok e Pei (1998) reproduzida na equação (2.20);

$\int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_2 \varepsilon_2 d\varepsilon_2$: Equação fornecida por Lok e Pei (1998) reproduzida na equação (2.21);

$$\int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_1 \varepsilon_1 d\varepsilon_1 = \begin{cases} -\frac{1}{4} \frac{\sigma_{01}}{(\varepsilon_{01})^2} (\varepsilon_{c0})^4 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_{01}}{\varepsilon_{01}} (\varepsilon_{c0})^3, 0 \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_{01} \\ \frac{1}{2} \sigma_{01} (\varepsilon_{c0})^2 - \frac{1}{12} \sigma_{01} (\varepsilon_{01})^2, \varepsilon_{01} \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_1^{**} \end{cases} \quad (2.20)$$

$$\int_0^{\varepsilon_{t0}} \sigma_2 \varepsilon_2 d\varepsilon_2 = \begin{cases} -\frac{1}{4} \frac{\sigma_{02}}{(\varepsilon_{02})^2} (\varepsilon_{t0})^4 + \frac{2}{3} \frac{\sigma_{02}}{\varepsilon_{02}} (\varepsilon_{t0})^3, 0 \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{02} \\ \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_{t0})^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{02} \varepsilon_2^* - \sigma_2^* \varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_{t0})^2 + C_{21}^{**}, \varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^* \\ \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_2^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) (\varepsilon_{t0})^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^* \varepsilon_2^{**}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) (\varepsilon_{t0})^2 + C_{22}^{**}, \varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**} \end{cases} \quad (2.21)$$

Sendo C_{21}^{**} e C_{22}^{**} constantes dadas pelas equações (2.22) e (2.23), respectivamente.

$$C_{21}^{**} = \frac{5}{12} \sigma_{02} (\varepsilon_{02})^2 - \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_{02})^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{02} \varepsilon_2^* - \sigma_2^* \varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_{02})^2 \right] \quad (2.22)$$

$$C_{22}^* = \frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_2^*)^3 + \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_{02} \varepsilon_2^* - \sigma_2^* \varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) (\varepsilon_2^*)^2 + C_{21}^{**} - \left[\frac{1}{3} \left(\frac{\sigma_2^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) (\varepsilon_2^*)^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_2^* \varepsilon_2^{**}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) (\varepsilon_2^*)^2 \right] \quad (2.23)$$

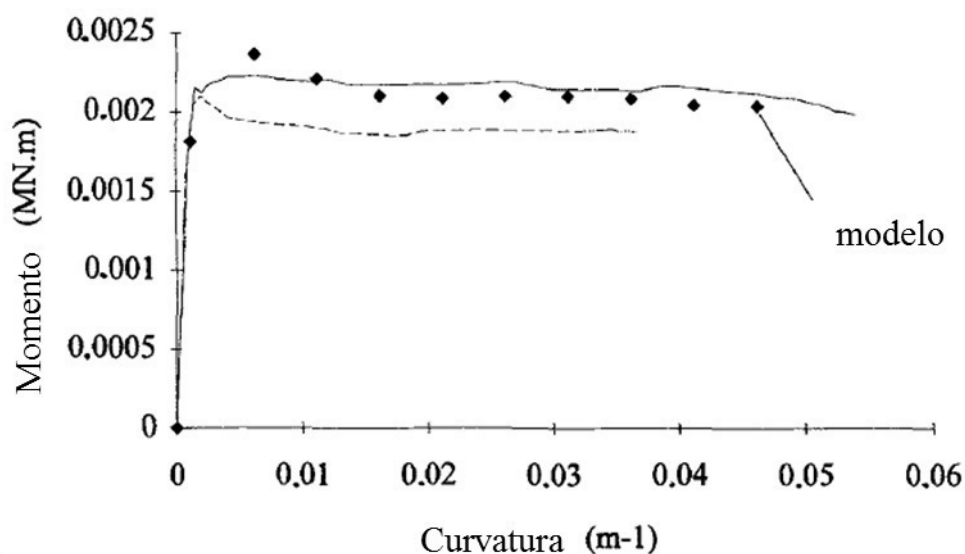
2.5.2 Modelo de Casanova e Rossi (1996)

Casanova e Rossi (1996) desenvolveram um modelo analítico para estudar o comportamento de vigas de concreto com fibras metálicas sem armadura submetidas à flexão e também à flexo-compressão. Os autores utilizam as equações de equilíbrio de forças e equilíbrio de momentos para representar o comportamento da viga. A validação do modelo proposto por eles foi conduzida a partir de trinta ensaios de flexão utilizando variados teores de fibras.

A força de tração do material é escrita a partir da relação tensão-abertura de fissura, obtida de ensaio de tração uniaxial. Já a força de compressão é obtida por meio de uma relação da tensão com a deformação. Os momentos ocasionados por essas forças, são descritos da mesma forma, acrescentando, dentro das integrais das equações, o braço de alavanca em relação a um determinado ponto, podendo ser qualquer um na seção, desde que exista o equilíbrio de forças.

Nesse trabalho os autores apresentam alguns exemplos de resultados em que se compararam curvas momento-curvatura e carga-deslocamento experimentais e teóricas conforme Figura 2.15.

Figura 2.15 – Curvas momento-curvatura para corpos de prova com fibras Dramix 60/80 (40 kg/m³). Dimensões 16 x 16 x 100 cm com um entalhe de 1 cm no meio do vão



Fonte: Adaptado de Casanova e Rossi (1996)

Como conclusão, Casanova e Rossi (1996) afirmam que a consideração de abertura de fissura, após a ocasião dessa abertura, a estrutura se comporta como se a seção fissurada fosse uma rótula plástica. O cálculo da relação momento-curvatura dessa rótula considera a divisão da seção em duas partes: a macrofissura e o concreto acima dela. As comparações com ensaios experimentais apresentados se mostraram satisfatórios tanto no comportamento global (diagrama carga-deslocamento) quanto no local (diagrama abertura de fissura-deformação de compressão).

2.6 MODELOS DE VIGAS REABILITADAS CUJA FAIXA DO BANZO TRACIONADO FOI SUBSTITUÍDA POR COMPÓSITO DE CRFA

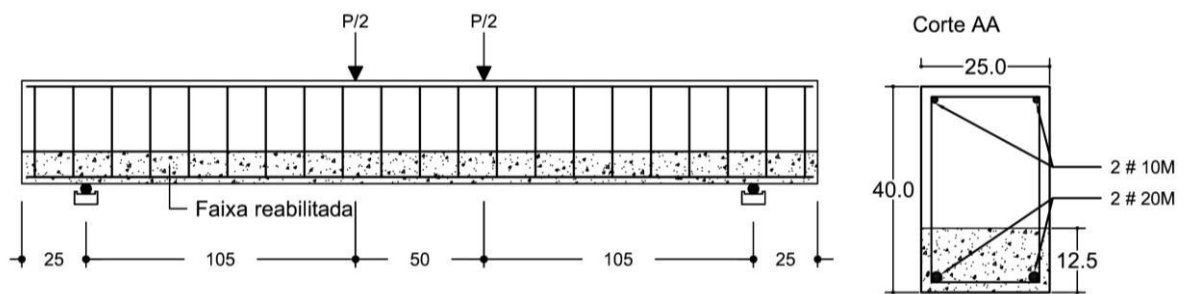
2.6.1 Predição de Kassimi

Kassimi et al. (2014) estudaram experimentalmente o comportamento de vigas de concreto armado rehabilitadas usando-se concreto auto-adensável reforçado com fibras. Nesse trabalho foram investigados diversos tipos de fibras tais como de monofilamento de polipropileno, multifilamento de polipropileno, híbridas e de aço. Para identificar esses tipos de fibras, os autores convencionaram as letras P, M, H e S respectivamente para os tipos de fibras citados anteriormente.

Como corpo de prova de referência, Kassimi et al. (2014) confeccionaram uma viga em concreto armado vibrado convencional denominando-a de CVC (*conventional vibrated concrete*). Além disso, foram moldadas vigas em concreto auto-adensável foram denominadas por SCC (*self-consolidating concrete*) e também uma viga em argamassa auto-adensável denominada por SCM (*self-consolidating mortar*) com volume de fibras de 1,4%. Foram moldadas as vigas com dois teores diferentes para cada fibra, isto é, para cada tipo de fibra (P, M, H e S) foram utilizados os teores de 0,3 e 0,5 % de fibras, totalizando em oito corpos de prova da série SCC.

Para as armaduras foram utilizadas barras nº 20M ($d_b = 19,5$ mm) para as barras inferiores e nº 10M ($d_b = 11,5$ mm) para as barras superiores com módulo de elasticidade igual a 200 GPa. A Figura 2.16 mostra a geometria das vigas ensaiadas por Kassimi et al. (2014).

Figura 2.16 – Viga de Kassimi



Fonte: Adaptado de Kassimi et al. (2014)

Além do estudo experimental, Kassimi et al. (2014) compararam seus resultados experimentais com suas previsões teóricas cujo equacionamento se dá de acordo com o cálculo do momento resistente último dado pela equação (2.24).

$$M_u = A_s f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A'_s f'_y \left(\frac{a}{2} - d' \right) + \sigma_t b (h - e) \left(\frac{h}{2} + \frac{e}{2} - \frac{a}{2} \right) \quad (2.24)$$

Sendo:

A_s e A'_s : Áreas das armaduras de tração e compressão, respectivamente;

f_y e f'_y : Tensões de escoamento das armaduras de tração e compressão, respectivamente;

d e d' : Distâncias da fibra mais comprimida aos centroides das armaduras de tração e compressão, respectivamente;

a : Altura do bloco retangular de tensão na compressão;

b: Largura da viga;

h: Altura da viga;

e: Distância da fibra mais comprimida até a interface do concreto com fibras;

σ_t : Tensão de tração do concreto com fibras e pode ser calculado por meio da equação (2.25) para concreto com fibras de aço.

$$\sigma_t = 0,00772 \frac{L_f}{d_f} V_f F_{be} \quad (2.25)$$

Onde:

L_f : Comprimento da fibra;

d_f : Diâmetro da fibra;

V_f : Porcentagem de fibras em volume;

F_{be} : Eficiência da aderência da fibra. Varia entre 1,0 e 1,2 dependendo das características da fibra.

A Tabela 2.2 apresenta os resultados experimentais comparados com a predição dos próprios autores.

Tabela 2.2 – Resultados das vigas de Kassimi et al. (2014)

Viga	Força de fissuração (kN)	Força última experimental $P_{u,exp}$ (kN)	Força última calculada $P_{u,calc}$ (kN)	$P_{u,exp}/P_{u,calc}$	Desvio %
CVC	45	216	153	1.41	29%
SCC	50	230	153	1.50	33%
P-SCC-0.3	56	206	157	1.31	24%
P-SCC-0.5	58	213	160	1.33	25%
M-SCC-0.3	65	224	157	1.49	30%
M-SCC-0.5	73	226	159	1.42	30%
H-SCC-0.3	55	216	156	1.39	28%
H-SCC-0.5	57	204	157	1.29	23%
S-SCC-0.3	60	230	156	1.47	32%
S-SCC-0.5	65	227	159	1.43	30%
S-SCM-1.4	62	224	168	1.33	25%

Fonte: Adaptado de Kassimi (2014)

A média dos erros em relação às cargas experimental e teórica foi de 28% com um coeficiente de variação igual a 5%.

3 O TRATAMENTO ANALÍTICO

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O modelo analítico proposto neste trabalho é baseado:

- Na análise dos esforços desenvolvidos a nível de seção transversal de vigas submetidas à flexão;
- A viga em análise possui uma camada do seu banzo tracionado formado por um compósito cimentício com fibras de aço;
- A viga é reforçada externamente à flexão com o uso de PRF (técnica EBR);
- As fibras do reforço são unidirecionais (1D) no sentido do comprimento da viga.
- O material é considerado homogêneo e contínuo;
- As seções permanecem planas mesmo após a deformação do elemento estrutural;
- É desconsiderado o deslizamento relativo entre o aço e o concreto;
- O deslizamento relativo entre o sistema de reforço e o substrato cimentício também é negligenciado;
- A deformação ϵ_{c2} do concreto é de 2,0‰ conforme NBR 6118:2014;
- A deformação de ruptura na compressão do concreto ϵ_{cu} é de 3,5‰ conforme NBR 6118:2014;
- A deformação de ruptura do aço ϵ_{su} é de 10‰, conforme NBR 6118:2014;
- A deformação de ruptura na tração do concreto ϵ_{cr} é de 0,15‰ conforme NBR 6118:2014;
- Após o concreto tracionado atingir a deformação última ϵ_{cr} , as tensões permanecem atuantes de acordo com o modelo constitutivo utilizado desde que ϵ_t seja menor que ϵ_{cr} ;
- O modelo é válido apenas para $x \leq H - H_r$, pois foi considerado apenas o modelo de tração para o concreto com fibras de aço.

O estudo procura desenvolver um modelo analítico para prever o comportamento de vigas recuperadas e reforçadas à flexão. A intenção é validar o modelo através da comparação com resultados experimentais obtidos em pesquisas desenvolvidas por outros autores.

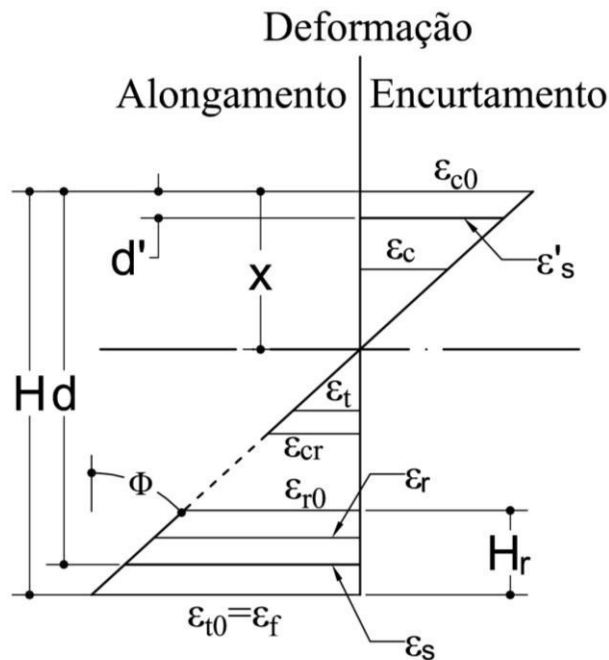
Os parâmetros que serão utilizados para validação do modelo são: a curva carga-deslocamento e os valores das cargas (de fissuração, de escoamento e de ruína).

3.2 RELAÇÕES GEOMÉTRICAS

3.2.1 Deformações e curvatura

A Figura 3.1 mostra uma seção genérica de uma viga recuperada (compósito cimentício) e reforçada (PRF) e a distribuição de deformações ao longo da altura da seção.

Figura 3.1 – Deformações em uma seção genérica de viga recuperada e reforçada



Considerando-se a hipótese de que as seções permanecem planas após o carregamento, é possível utilizar a relação de triângulos para determinação da curvatura (ϕ) conforme indicada na equação (3.1).

$$\phi = \frac{\epsilon_{c0}}{x} \quad (3.1)$$

Em que:

x : Posição da linha neutra a partir da face superior da viga;

ϵ_{c0} : Deformação na fibra mais comprimida;

Todas as deformações da seção podem ser escritas em função de ϵ_{c0} e x . Tem-se então as equações (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5).

$$\varepsilon_{t0} = \frac{\varepsilon_{c0}(H - x)}{x} \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{c0} \left(\frac{d - x}{x} \right) \quad (3.3)$$

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_{c0} \left(\frac{x - d'}{x} \right) \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_f = \varepsilon_{t0} = \frac{\varepsilon_{c0}(H - x)}{x} \quad (3.5)$$

$$\varepsilon_{r0} = \frac{\varepsilon_{c0}(H - x - H_r)}{x} \quad (3.6)$$

Sendo:

ε_{t0} : Deformação na fibra mais tracionada;

ε_s : Deformação da armadura tracionada (inferior);

ε'_s : Deformação da armadura comprimida (superior);

ε_f : Deformação do reforço de PRF (foi igualado a ε_{t0} por serem valores muito próximos);

ε_{r0} : Deformação na interface entre o concreto e o compósito cimentício;

H: Altura total da peça;

H_r : Altura correspondente à camada de concreto reforçado com fibras;

d: Distância da borda mais comprimida da seção até a posição do centro de gravidade da armadura inferior;

d': Distância da borda mais comprimida até o centro de gravidade da armadura superior.

3.2.2 Deslocamento vertical

De posse dos valores de momento resistente e curvatura, é possível calcular o deslocamento vertical no meio do vão para o caso de uma viga submetida à flexão em quatro pontos. Kara e Ashour (2012) utilizam a equação para flecha elástica para determinação de tal deslocamento. Entretanto, a não-linearidade é considerada por meio da rigidez efetiva para cada força considerada no histórico de carregamento. Dessa forma, a flecha é calculada pela equação (3.7).

$$\delta_{max} = \frac{(Pa/2)(3L^2 - 4a^2)}{24EI_{eff}} \quad (3.7)$$

Em que:

P: Força aplicada;

a: Vão de cisalhamento (distância entre a força aplicada e o apoio mais próximo);

L: Vão da viga;

EI_{eff} : Rigidez efetiva dada pela equação (3.8).

$$EI_{eff} = \frac{M}{\varphi} \quad (3.8)$$

Sendo:

M: Momento resistente para um dado carregamento;

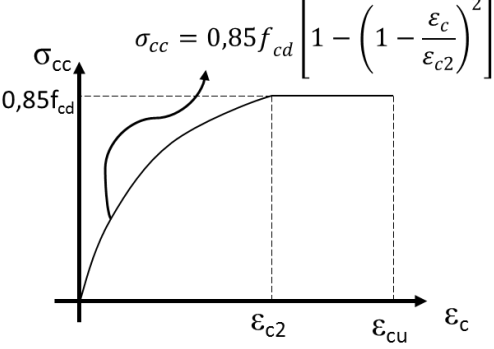
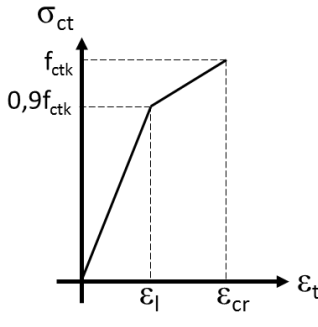
φ : Curvatura respectiva.

3.3 LEIS CONSTITUTIVAS

3.3.1 Concreto

Para a lei constitutiva do concreto foi utilizada a formulação idealizada da NBR 6118:2014 onde, na compressão considera-se o modelo parábola-retângulo e na tração, o modelo bilinear, conforme indicado no Quadro 3.1.

Quadro 3.1 – Lei constitutiva do concreto

	
$\sigma_{cc} = \begin{cases} 0,85f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c2}} \right)^2 \right], & 0 \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{c2} \\ 0,85f_{cd}, & \epsilon_{c2} \leq \epsilon_c \leq \epsilon_{cu} \\ 0, & \epsilon_c > \epsilon_{cu} \end{cases}$	$\sigma_{ct} = \begin{cases} E_{ci}\epsilon_t, & 0 \leq \epsilon_t \leq \epsilon_l \\ c\epsilon_t + f_{ctk} - c\epsilon_{cr}, & \epsilon_l \leq \epsilon_t \leq \epsilon_{cr} \\ 0, & \epsilon_t > \epsilon_{cr} \end{cases}$
(3.9)	(3.10)
a) concreto comprimido	b) concreto tracionado

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118 (2014)

Onde:

σ_{cc} : Tensão atuante no concreto comprimido;

σ_{ct} : Tensão atuante no concreto tracionado;

f_{cd} : Tensão resistente de cálculo de compressão do concreto;

f_{ctk} : Tensão resistente de cálculo de tração do concreto.

O modelo bilinear pode ser matematicamente traduzido de forma explícita, visto que a norma fornece apenas um diagrama representativo, não apresentando as funções matemáticas nessa parte. Dessa forma as retas devem ter suas equações expostas, ou seja, até o valor de tensão igual a $0,9f_{ctk}$, utiliza-se a equação da primeira reta, com a tensão entre $0,9f_{ctk}$ e f_{ctk} , utiliza-se a equação da segunda reta (menos inclinada).

Para tratar o modelo de forma mais genérica, considera-se que a deformação de ruptura do concreto à tração de $0,15\%$, seja denotado por ϵ_{cr} . Já a deformação correspondente à tensão de $0,9f_{ctk}$ será denotado por ϵ_l sendo equivalente a $0,9f_{ctk}/E_{ci}$.

Assumindo a forma geral de equação de reta para ambos os trechos, tem-se a equação (3.11).

$$\sigma_{ct} = \begin{cases} a\varepsilon_t + b, & 0 \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_l \\ c\varepsilon_t + d, & \varepsilon_l \leq \varepsilon_t \leq \varepsilon_{cr} \\ 0, & \varepsilon_t > \varepsilon_{cr} \end{cases} \quad (3.11)$$

Aplicando as condições de contorno nos pontos $(0,0)$, $(\varepsilon_l, 0,9f_{ctk})$ e $(\varepsilon_{cr}, f_{ctk})$, é possível chegar ao seguinte resultado:

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{ci} \\ 0 \\ \frac{0,1f_{ctk}E_{ci}}{E_{ci}\varepsilon_{cr} - 0,9f_{ctk}} \\ f_{ctk} - \left(\frac{0,1f_{ctk}E_{ci}}{E_{ci}\varepsilon_{cr} - 0,9f_{ctk}} \right) \varepsilon_{cr} \end{bmatrix}$$

O parâmetro “d” é função do parâmetro “c” e pode ser descrito conforme mostrado na equação (3.12).

$$d = f_{ctk} - c\varepsilon_{cr} \quad (3.12)$$

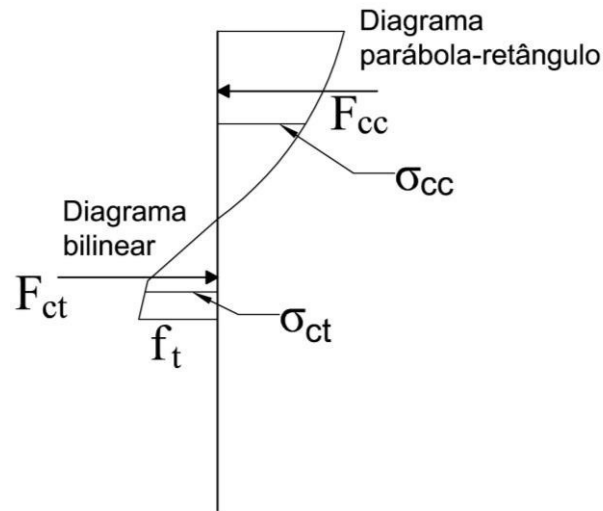
Onde:

$$c = \frac{0,1f_{ctk}E_{ci}}{E_{ci}\varepsilon_{cr} - 0,9f_{ctk}} \quad (3.13)$$

Substituindo os valores de “a”, “b”, “c” e “d” na equação (3.11), chega-se às equações do modelo constitutivo à tração para o concreto segundo a NBR 6118:2014 conforme na mostrado na equação (3.10) do Quadro 3.1.

A Figura 3.2 apresenta o aspecto da distribuição de tensões em uma seção de viga de concreto simples (sem armaduras).

Figura 3.2 – Distribuição de tensões em uma seção transversal de concreto simples



3.3.2 Aço

O comportamento da armadura será considerado como elasto-plástico, conforme NBR 6118:2014. O Quadro 3.2 representa graficamente essa consideração de comportamento para o aço e a respectiva formulação matemática que o traduz.

Quadro 3.2 – Lei constitutiva do aço para armaduras passivas

	$\sigma_s = \begin{cases} E_s \varepsilon_s, & 0 \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{yd} \\ f_{yd}, & \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} \\ 0, & \varepsilon_s > \varepsilon_{su} \end{cases}$
	(3.14)

Fonte: Adaptado de ABNT NBR 6118 (2014)

Sendo:

σ_s : Tensão atuante na armadura;

E_s : Módulo de elasticidade do aço;

Convenciona-se que a deformação em que se inicia o escoamento do material seja denominada por ε_{yd} e a deformação última como ε_{su} , que é equivalente a 10‰.

3.3.3 Compósito cimentício com fibras de aço

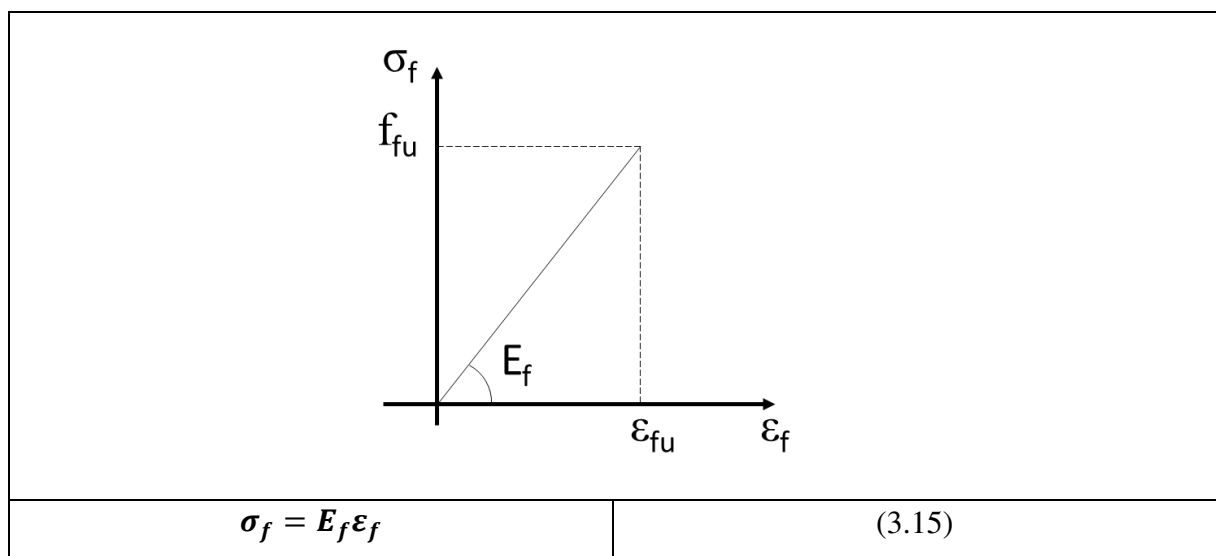
O modelo constitutivo para o compósito cimentício foi extraído de Lok e Pei (1998), conforme já descrito no item 2.5.1.

3.3.4 Polímero Reforçado com Fibras

O PRF pode ser considerado como um material elástico linear até sua ruptura, conforme ACI 440.2R-08. Dessa forma, o diagrama tensão-deformação pode ser idealizado como uma reta de acordo com a clássica Lei de Hooke.

A Quadro 3.3 representa o modelo constitutivo do reforço de PRF, dado pela (3.15 até a ruptura no ponto dado pela deformação última ε_{fu} e a tensão última f_{fu} correspondente e a respectiva equação. Esses valores de deformação e tensão últimos são parâmetros fornecidos pelo material ou ainda determinados experimentalmente por meio de ensaios à tração.

Quadro 3.3 – Comportamento tensão-deformação do PRFC até a ruptura



Em que:

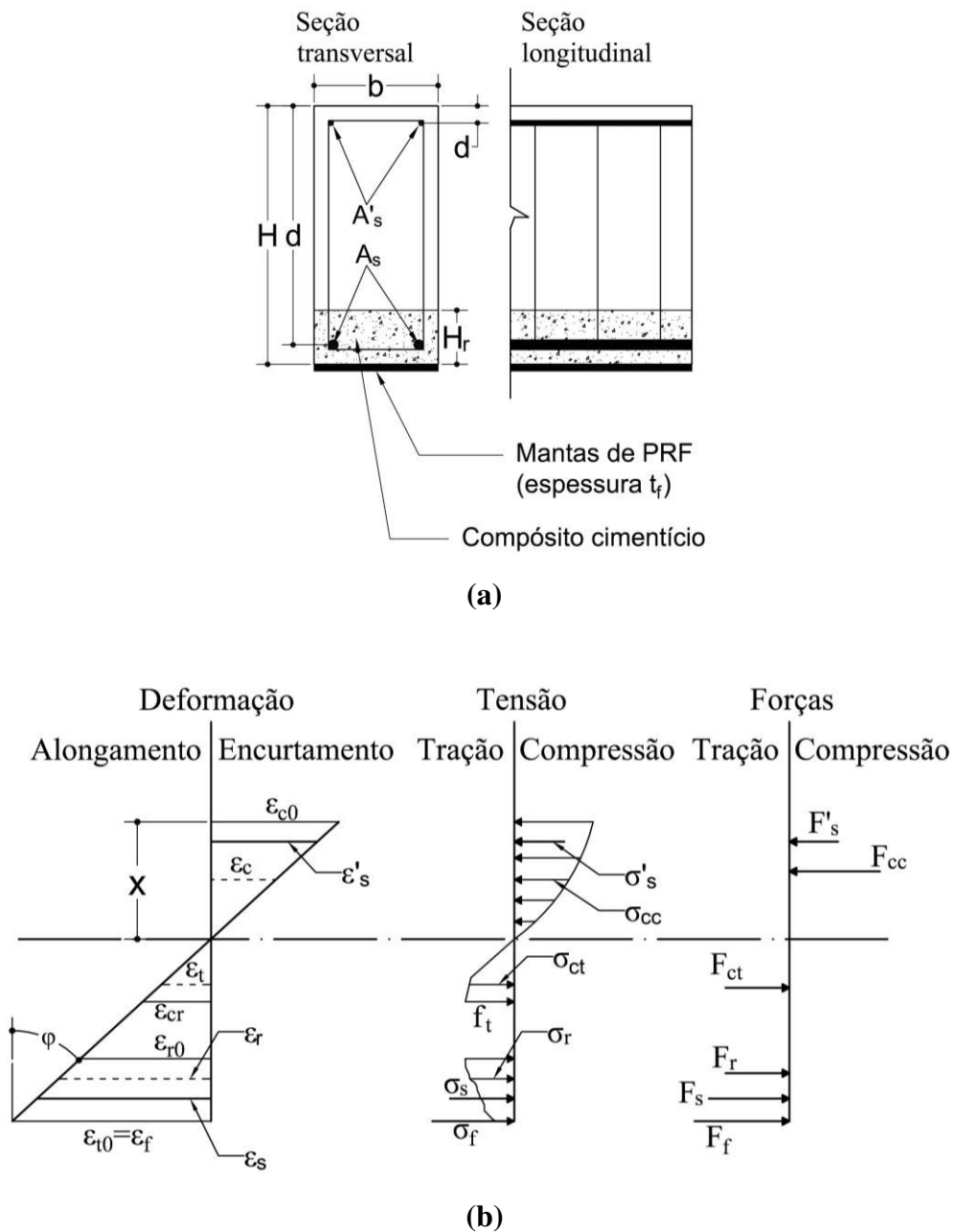
σ_f : Tensão atuante no reforço;

E_f : Módulo de elasticidade do PRF.

3.4 EQUILÍBRIO DE FORÇAS

A Figura 3.3 mostra uma seção genérica de uma viga rehabilitada e reforçada com as distribuições de deformação, tensão e forças resultantes. Perceba que as linhas pontilhadas indicam as deformações variáveis ao longo da altura (concreto comprimido, concreto tracionado e concreto reforçado com fibras tracionado).

Figura 3.3 – Seção genérica de uma viga rehabilitada e reforçada: (a) seção esquemática; (b) distribuição de deformações, tensões e forças da seção



As forças resistentes podem ser escritas em função da posição da linha neutra (x) e da deformação de um ponto específico, sendo aqui adotada a deformação da borda mais comprimida (ϵ_{c0}). O equilíbrio das forças indicadas na Figura 3.3 é dada pela equação (3.16).

$$\sum F_i = 0 \quad (3.16)$$

Em que F_i é a força de contribuição para a resistência de cada material. O índice “i” se refere a cada material e ao tipo de esforço (tração ou compressão). Dessa forma, as forças resistentes a serem consideradas nesse estudo são apresentadas na Quadro 3.4.

Quadro 3.4 – Forças resistentes a serem consideradas

F_{cc}	Força resistente do concreto comprimido
F_{ct}	Força resistente do concreto tracionado
F_s	Força resistente da armadura inferior
F'_s	Força resistente da armadura superior
F_f	Força resistente devido ao reforço de PRF
F_r	Força resistente do compósito cimentício na tração

As forças de tração (F_s) e compressão (F'_s) do aço podem ser descritas, em sua fase elástica, conforme equações (3.17) e (3.18) respectivamente.

$$F_s = A_s \sigma_s \quad (3.17)$$

$$F'_s = A'_s \sigma'_s \quad (3.18)$$

Onde:

F_s : Força de resistência de aço tracionado;

F'_s : Força de resistência do aço comprimido;

A_s : Área da armadura inferior;

A'_s : Área da armadura superior;

σ_s : Tensão atuante na armadura inferior;

σ'_s : Tensão atuante na armadura superior;

Em resumo as forças de tração e compressão do aço são descritas conforme Quadro 3.5.

Quadro 3.5 - Equações e intervalos de validade de F_s e F'_s

F_s	Intervalo para ε_s	F'_s	Intervalo para ε'_s
$A_s E_s \varepsilon_s$	$[0; \varepsilon_{yd}]$	$A'_s E_s \varepsilon'_s$	$[0; \varepsilon_{yd}]$
$A_s f_{yd}$	$[\varepsilon_{yd}; \varepsilon_{su}]$	$A'_s f_{yd}$	$[\varepsilon_{yd}; \varepsilon_{su}]$
0	$(\varepsilon_{su}; \infty)$	0	$(\varepsilon_{su}; \infty)$

A força F_f é calculada conforme equação (3.19).

$$F_f = \sigma_f A_f \quad (3.19)$$

Sendo:

F_f : Força resistente devido ao reforço de PRF;

A_f : Área de reforço dada pela equação (3.20).

$$A_f = n b_f t_f \quad (3.20)$$

Em que:

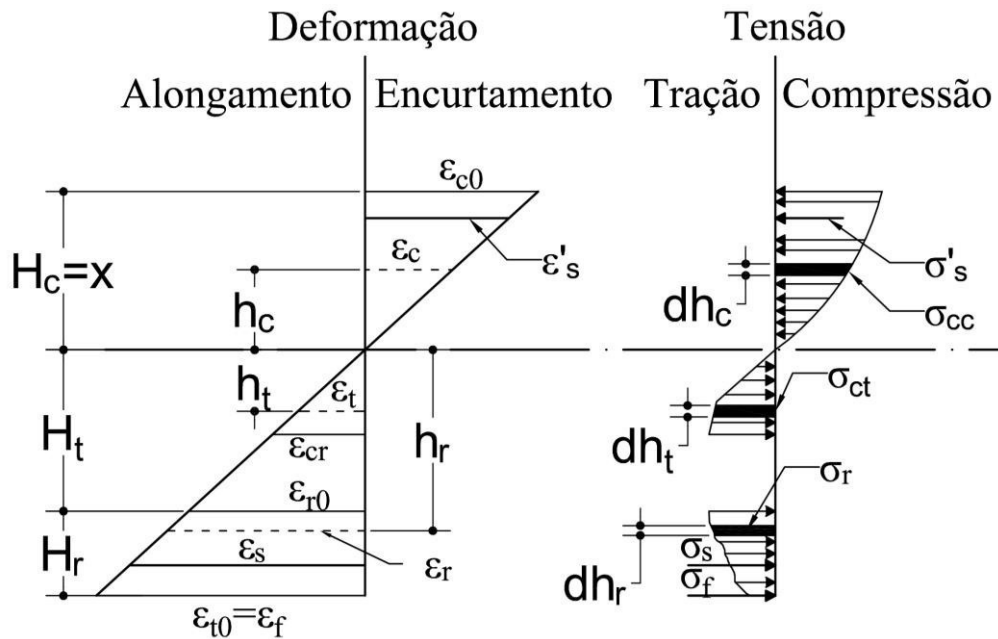
b_f : Largura da manta, normalmente igual à largura da viga (b);

Utilizando o critério da deformação limite de descolamento do reforço ε_{fd} , conforme descrito no item 2.3.1, na equação (2.1) e aplicando-o como condição de ruptura do material, a força do reforço de PRF pode ser descrita conforme equação (3.21).

$$F_f = \begin{cases} E_f \varepsilon_f n b_f t_f, & 0 \leq \varepsilon_f \leq \varepsilon_{fd} \\ 0, & \varepsilon_f > \varepsilon_{fd} \end{cases} \quad (3.21)$$

Vale salientar que, para os materiais em que as deformações têm posições variáveis ao longo da altura da seção, as forças correspondentes são obtidas por meio de integração analítica do diagrama de tensões. Dessa forma faz-se necessário definir alguns elementos diferenciais e suas respectivas posições. Considere, então, a Figura 3.4 para o desenvolvimento das equações à frente.

Figura 3.4 – Diagrama de deformações e tensões com as posições dos diferenciais de altura (dh) para cada lei constitutiva



3.4.1 Força resistente de compressão do concreto - F_{cc}

A tensão atuante à altura h_c , a partir da posição da linha neutra, produz uma força diferencial dF_{cc} que atua como resultante dessa tensão σ_{cc} ao longo da faixa diferencial de espessura dh_c cuja profundidade é igual à largura b da viga. Dessa forma, tem-se a relação dada pela equação (3.22).

$$dF_{cc} = b \sigma_{cc} dh_c \quad (3.22)$$

Para se obter a força equivalente de compressão do concreto que atua sobre toda a faixa acima da linha neutra, basta que se integre a expressão da (3.22) ao longo da altura h_c no intervalo $[0; H_c]$, sendo H_c a distância da linha neutra até a borda mais comprimida, podendo também ser chamado de “ x ” conforme variável de costume para se determinar a posição da linha neutra. A equação integral primária para o cálculo de F_{cc} , em função da altura, é dada pela equação (3.23).

$$F_{cc} = b \int_0^x \sigma_{cc} dh_c \quad (3.23)$$

No entanto percebe-se que, se a integração da equação (3.23) for realizada em termos de dh_c , como está apresentada, o resultado não terá sentido, pois as tensões estão em função das deformações e não de altura da seção. Sendo assim, altera-se a variável de integração para que a expressão fique em função das deformações do concreto. Neste caso, utiliza-se uma relação de triângulos, tendo-se a variável h_c em função da deformação ε_c e, conseqüentemente, o diferencial dh_c em função de $d\varepsilon_c$ conforme equação (3.24).

$$\frac{\varepsilon_c}{h_c} = \frac{\varepsilon_{c0}}{H_c} = \frac{\varepsilon_{c0}}{x} \quad (3.24) - a$$

$$h_c = \frac{x\varepsilon_c}{\varepsilon_{c0}} \quad (3.24) - b$$

$$dh_c = \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}}\right) d\varepsilon_c \quad (3.24) - c$$

O intervalo de integração também é substituído em termos das deformações, ou seja, quando o valor de h_c é zero, ε_c também o é. Quando o valor de h_c é igual a x (ou H_c), ε_c será igual a ε_{c0} . Portanto o intervalo $[0; h_c]$, pode ser convertido para $[0; \varepsilon_{c0}]$ sem maiores problemas já que para ambas as grandezas a variação é linear.

Reescreve-se, então, a equação (3.22) em termos da deformação de compressão do concreto na forma de integral definida no intervalo $[0; \varepsilon_{c0}]$ conforme mostrado na equação (3.25).

$$F_{cc} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}}\right) \int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_{cc} d\varepsilon_c \quad (3.25)$$

A força F_{cc} varia de acordo com valor de ε_{c0} , ou seja, se a deformação máxima de compressão for menor ou igual a ε_{c2} , a força de compressão do concreto será obtida integrando-se apenas a parábola de segundo grau da equação (3.9) (primeira parte da equação, onde existe validade de 0 a ε_{c2}) no intervalo $[0; \varepsilon_{c0}]$. Entretanto, se ε_{c0} ultrapassar o valor de ε_{c2} mas permanecer abaixo de ε_{cu} , então a força resultante de concreto será dada pela soma de duas integrais, onde a primeira será a integral da equação parabólica no intervalo constante $[0; \varepsilon_{c2}]$ e a segunda será a integral da segunda parte da equação (3.9) no intervalo $[\varepsilon_{c2}; \varepsilon_{c0}]$. Finalmente, se a deformação máxima de compressão atingir o valor último de ε_{cu} , caracterizar-se-á a falha do material, logo a força de resistência será assumida como nula.

Assim, se $0 \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_{c2}$, a força de compressão do concreto toma a forma da equação (3.26).

$$F_{cc} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \int_0^{\varepsilon_{c0}} 0,85 f_{cd} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) d\varepsilon_c \quad (3.26) - a$$

$$F_{cc} = \frac{0,85 b f_{cd} x \varepsilon_{c0} (3 \varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c0})}{3 \varepsilon_{c2}^2} \quad (3.26) - b$$

Se $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_{cu}$, a força resistente de compressão do concreto é obtida conforme equação (3.27).

$$F_{cc} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left[\int_0^{\varepsilon_{c2}} \sigma_{cc} d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{c0}} \sigma_{cc} d\varepsilon_c \right] \quad (3.27) - a$$

$$F_{cc} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left[\int_0^{\varepsilon_{c2}} 0,85 f_{cd} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) d\varepsilon_c + \int_{\varepsilon_{c2}}^{\varepsilon_{c0}} 0,85 f_{cd} d\varepsilon_c \right] \quad (3.27) - b$$

$$F_{cc} = 0,85 f_{cd} b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left(\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{c2} + \frac{2 \varepsilon_{c2}}{3} \right) \quad (3.27) - c$$

Por fim, se $\varepsilon_{c0} > \varepsilon_{cu}$, tendo-se a ruptura da peça, a força resistente é assumida como nula, logo, a força resistente de concreto para essa situação é dada pela equação (3.28).

$$F_{cc} = 0 \quad (3.28)$$

Cálculos como estes são muito extensos e suscetíveis a confusões por parte do pesquisador a qualquer momento. Então, qualquer descuido ao longo das manipulações poderia ocasionar resultados extremamente errôneos e não aproveitáveis. Optou-se então pelo uso do programa de manipulação algébrica Wolfram Mathematica visando evitar ao máximo os erros provenientes da mão humana ao se calcular as integrais.

Objetivando a organização das equações e os respectivos intervalos de valores de ε_{c0} que tornam cada equação válida, foi elaborado o Quadro 3.6 como resumo das forças de compressão resistente do concreto.

Quadro 3.6 – Equações e intervalos de validade de F_{cc}

F_{cc}	Intervalo para ε_{c0}
$\frac{0,85f_{cd}bx\varepsilon_{c0}(3\varepsilon_{c2} - \varepsilon_{c0})}{3\varepsilon_{c2}^2}$	$[0; \varepsilon_{c2}]$
$0,85f_{cd}b\left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}}\right)\left(\varepsilon_{c0} - \varepsilon_{c2} + \frac{2\varepsilon_{c2}}{3}\right)$	$[\varepsilon_{c2}; \varepsilon_{cu}]$
0	$(\varepsilon_{cu}; \infty)$

3.4.2 Força resistente de tração do concreto - F_{ct}

Analogamente à dedução de F_{cc} , o diferencial de força dF_{ct} é dado pela equação (3.29).

$$dF_{ct} = b\sigma_{ct}dh_t \quad (3.29)$$

A integração do diagrama de tração do concreto deve ser realizada ao longo da altura H_t . A variável de altura h_t pode ser colocada em função da deformação ε_t , utilizando a relação conforme mostrado na equação (3.30).

$$\frac{\varepsilon_t}{h_t} = \frac{\varepsilon_{r0}}{H_t} \quad (3.30) - a$$

$$h_t = \frac{H_t\varepsilon_t}{\varepsilon_{r0}} \quad (3.30) - b$$

$$dh_t = \frac{H_t}{\varepsilon_{r0}}d\varepsilon_t \quad (3.30) - c$$

Perceba que a deformação ε_{r0} corresponde ao limite entre os materiais concreto e compósito, explicando o porquê de se colocar em função dessa variável.

Substituindo-se o intervalo de integração de $[0; H_t]$ para $[0; \varepsilon_{r0}]$, conforme explicação análoga do item 3.4.1 e deixando a expressão em função das variáveis x e ε_{c0} , tem-se a força de tração conforme integral da equação (3.31).

$$F_{ct} = b\left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}}\right)\int_0^{\varepsilon_{r0}}\sigma_{ct}d\varepsilon_t \quad (3.31)$$

Da mesma forma que o comportamento à compressão, na tração a equação de força será alterada conforme intervalo de deformação. Então, se $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_l$, a força resistente de tração é dada pela equação (3.32).

$$F_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \int_0^{\varepsilon_{r0}} E_{ci} \varepsilon_t d\varepsilon_t \quad (3.32) - a$$

$$F_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \frac{E_{ci} (\varepsilon_{r0})^2}{2} \quad (3.32) - b$$

Para o intervalo $\varepsilon_l \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{cr}$, existe uma soma de integrais, pois o intervalo de integração possui duas funções distintas, sendo uma reta para deformações até o valor de ε_l e uma outra reta para os valores de deformação da seção que ultrapassarem ε_l mas forem menores que ε_{cr} conforme equação (3.33).

$$F_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left[\int_0^{\varepsilon_l} E_{ci} \varepsilon_t d\varepsilon_t + \int_{\varepsilon_l}^{\varepsilon_{r0}} (c\varepsilon_t + f_{ctk} - c\varepsilon_{cr}) d\varepsilon_t \right] \quad (3.33) - a$$

$$F_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left(\frac{E_{ci} \varepsilon_l^2}{2} + \frac{(\varepsilon_{r0} - \varepsilon_l)}{2} (2f_{ctk} + c(\varepsilon_{r0} + \varepsilon_l - 2\varepsilon_{cr})) \right) \quad (3.33) - b$$

Onde:

c: Parâmetro descrito conforme equação (3.13).

Por fim, quando ε_{t0} atingir o valor limite ε_{cr} , a seção começa a fissurar, mas isso não representa a ruptura da viga. Assim, no intervalo onde $\varepsilon_{t0} > \varepsilon_{cr}$, a força resistente será o cálculo da integral cujo intervalo de integração vai de 0 a ε_{cr} . Isso indica que a integral não é feita ao longo de toda a seção, mas apenas até a posição em que a deformação seja igual a ε_{cr} conforme é apresentado na equação (3.34).

$$F_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left[\int_0^{\varepsilon_l} E_{ci} \varepsilon_t d\varepsilon_t + \int_{\varepsilon_l}^{\varepsilon_{cr}} (c\varepsilon_t + f_{ctk} - c\varepsilon_{cr}) d\varepsilon_t \right] \quad (3.34) - a$$

$$F_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left(\frac{E_{ci} \varepsilon_l^2}{2} + \frac{(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_l)}{2} (2f_{ctk} + c(\varepsilon_l - \varepsilon_{cr})) \right) \quad (3.34) - b$$

Organizando essas equações e seus respectivos intervalos de ε_{i0} de validade das equações, tem-se o Quadro 3.7.

Quadro 3.7 - Equações e intervalos de validade de F_{ct}

F_{ct}	Intervalo para ε_{i0}
$b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \frac{E_{ci}(\varepsilon_{r0})^2}{2}$	$[0; \varepsilon_l]$
$b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left(\frac{E_{ci}\varepsilon_l^2}{2} + \frac{(\varepsilon_{r0} - \varepsilon_l)}{2} (2f_{ctk} + c(\varepsilon_{r0} + \varepsilon_l - 2\varepsilon_{cr})) \right)$	$[\varepsilon_l; \varepsilon_{cr}]$
$b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left(\frac{E_{ci}\varepsilon_l^2}{2} + \frac{(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_l)}{2} (2f_{ctk} + c(\varepsilon_l - \varepsilon_{cr})) \right)$	$(\varepsilon_{cr}; \infty)$

Sendo c dado conforme equação (3.13).

$$c = \frac{0,1f_{ctk}E_{ci}}{E_{ci}\varepsilon_{cr} - 0,9f_{ctk}}$$

3.4.3 Força do compósito cimentício – F_r

Para o cálculo da força resistente do compósito cimentício de concreto reforçado com fibras, devem ser consideradas diversas hipóteses para possíveis valores de ε_{r0} e ε_{i0} . Considerando a equação (2.7), ela possui três partes: fase pré-fissuração parabólica e fase pós-fissuração subdividido em processo I e processo II. Dessa forma, para facilitar o entendimento das deduções, cada parte dessa equação será denominada por σ_{r1} , σ_{r2} e σ_{r3} , e os termos σ_2 e ε_2 (tensão e deformação de tração do concreto reforçado com fibras, denominado por Lok e Pei) serão redefinidos como σ_r e ε_r , conforme equações (3.35), (3.36) e (3.37).

$$\sigma_{r1} = \sigma_{02} - \frac{\sigma_{02}}{(\varepsilon_{02})^2} (\varepsilon_r - \varepsilon_{02})^2, 0 \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_{02} \quad (3.35) - a$$

$$\sigma_{r1} = \sigma_{02} - A(\varepsilon_r - \varepsilon_{02})^2, 0 \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_{02} \quad (3.35) - b$$

$$\sigma_{r2} = \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) \varepsilon_r + \frac{\sigma_{02}\varepsilon_2^* - \sigma_2^*\varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}}, \varepsilon_{02} \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_2^* \quad (3.36) - a$$

$$\sigma_{r2} = B\varepsilon_r + C, \varepsilon_{02} \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_2^* \quad (3.36) - b$$

$$\sigma_{r3} = \left(\frac{\sigma_2^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) \varepsilon_r - \left(\frac{\sigma_2^*\varepsilon_2^{**}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right), \varepsilon_2^* \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_2^{**} \quad (3.37) - a$$

$$\sigma_{r3} = D\varepsilon_r - E, \varepsilon_2^* \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_2^{**} \quad (3.37) - b$$

Para reduzir o volume de caracteres a serem manipulados, os termos constantes dessas equações foram agrupados em cinco outras constantes conforme equações (3.38), (3.39), (3.40), (3.41) e (3.42).

$$A = \frac{\sigma_{02}}{(\varepsilon_{02})^2} \quad (3.38)$$

$$B = \left(\frac{\sigma_2^* - \sigma_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \right) \quad (3.39)$$

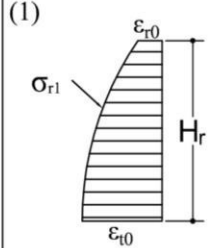
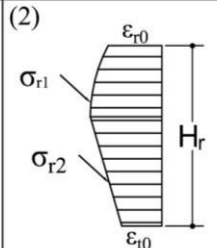
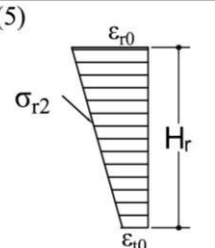
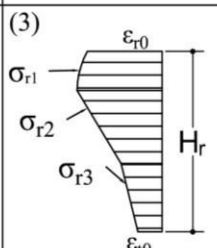
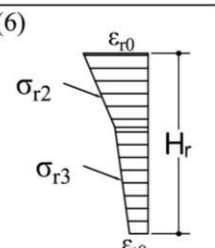
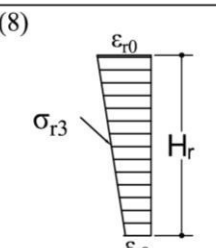
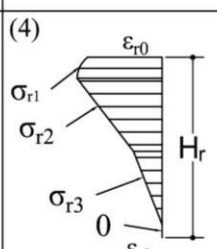
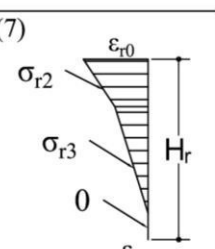
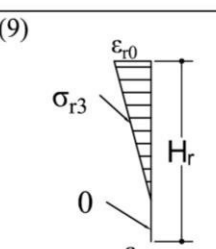
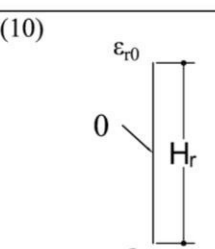
$$C = \frac{\sigma_{02}\varepsilon_2^* - \sigma_2^*\varepsilon_{02}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}} \quad (3.40)$$

$$D = \left(\frac{\sigma_2^*}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) \quad (3.41)$$

$$E = \left(\frac{\sigma_2^*\varepsilon_2^{**}}{\varepsilon_2^* - \varepsilon_2^{**}} \right) \quad (3.42)$$

Existem diversas hipóteses para o comportamento do compósito cimentício uma vez que a lei constituinte do material possui três fases distintas. Dessa forma, dependendo dos valores de deformação na interface concreto-compósito (ε_{r0}) e na borda mais tracionada (ε_{t0}), poderão ocorrer diversas configurações do diagrama de tensão-deformação ao longo da altura H_f (altura do banzo tracionado do compósito). Nesse sentido, o Quadro 3.8 enumera todas as possibilidades de ocorrência de tensões de acordo com os intervalos de valores em que se encontram as deformações ε_{r0} e ε_{t0} .

Quadro 3.8 – Hipóteses de tensões em função das possibilidades de valores de ε_{r0} e ε_{t0}

HIPÓTESES	$0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$	$\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_2^*$	$\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_2^{**}$	$\varepsilon_{r0} \geq \varepsilon_2^{**}$
$0 \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{02}$	(1) 	—	—	—
$\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^*$	(2) 	(5) 	—	—
$\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**}$	(3) 	(6) 	(8) 	—
$\varepsilon_{t0} \geq \varepsilon_2^{**}$	(4) 	(7) 	(9) 	(10) 

Dessa forma, existem 10 condições de intervalos para ε_{r0} e ε_{t0} de modo a definir quais as equações a serem integradas e quais os respectivos intervalos de integração.

Prosseguindo com a mesma lógica utilizada para as deduções de forças para o concreto, é apresentado nas equações (3.43), (3.44), (3.45), (3.46), (3.47), (3.48) e (3.49) a dedução para a expressão integral geral da força F_r em função de tensão e deformação.

$$dF_r = b\sigma_r dh_r \quad (3.43)$$

$$F_r = b \int_{H_t}^{H_r+H_t} \sigma_r dh_r \quad (3.44)$$

Mudança de variável
$$h_r = \frac{(h-x)}{\varepsilon_{t0}} \varepsilon_r \quad (3.45)$$

Mudança de diferencial de integração
$$dh_r = \frac{(h-x)}{\varepsilon_{t0}} d\varepsilon_r \quad (3.46)$$

Mudança de intervalo
$$H_t \leq h_r \leq (h-x) \rightarrow \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_r \leq \varepsilon_{t0} \quad (3.47)$$

Aplicação da mudança de variável
$$F_r = \frac{b(h-x)}{\varepsilon_{t0}} \int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_r d\varepsilon_r \quad (3.48)$$

Aplicação da relação
$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_r d\varepsilon_r \quad (3.49)$$

$$\varepsilon_{t0} = \frac{\varepsilon_{c0}(H-x)}{x}$$

Para a 1ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $0 \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{02}$, tem-se as equações (3.50) e (3.51).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r1} d\varepsilon_r \quad (3.50)$$

$$F_r = b \frac{x}{3\varepsilon_{c0}} (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{t0}) (A(3\varepsilon_{02}^2 + \varepsilon_{r0}^2 + \varepsilon_{r0}\varepsilon_{t0} + \varepsilon_{t0}^2 - 3\varepsilon_{02}(\varepsilon_{r0} + \varepsilon_{t0})) - 3\sigma_{02}) \quad (3.51)$$

Para a 2ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^*$, tem-se as equações (3.52) e (3.53).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{02}} \sigma_{r1} d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{02}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r2} d\varepsilon_r \right] \quad (3.52)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{A}{3} (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{02})^3 + \frac{B}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_{02}^2) + C(\varepsilon_{t0} - \varepsilon_{02}) + \sigma_{02}(\varepsilon_{02} - \varepsilon_{r0}) \right) \quad (3.53)$$

Para a 3ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.54) e (3.55).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{02}} \sigma_{r1} d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{02}}^{\varepsilon_2^*} \sigma_{r2} d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_2^*}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r3} d\varepsilon_r \right] \quad (3.54)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{A}{3} (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{02})^3 + \frac{B}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_{02}^2) + C(\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}) + \frac{D}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_2^{*2}) - E(\varepsilon_{t0} - \varepsilon_2^*) + \sigma_{02}(\varepsilon_{02} - \varepsilon_{r0}) \right) \quad (3.55)$$

Para a 4ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $\varepsilon_{t0} \geq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.56) e (3.57).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{02}} \sigma_{r1} d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{02}}^{\varepsilon_2^*} \sigma_{r2} d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_2^*}^{\varepsilon_2^{**}} \sigma_{r3} d\varepsilon_r \right] \quad (3.56)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{A}{3} (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{02})^3 + \frac{B}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_{02}^2) + C(\varepsilon_2^* - \varepsilon_{02}) + \frac{D}{2} (\varepsilon_2^{**2} - \varepsilon_2^{*2}) - E(\varepsilon_2^{**} - \varepsilon_2^*) + \sigma_{02}(\varepsilon_{02} - \varepsilon_{r0}) \right) \quad (3.57)$$

Para a 5ª hipótese, onde $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^*$ e $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^*$, tem-se as equações (3.58) e (3.59).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r2} d\varepsilon_r \right] \quad (3.58)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{B}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_{r0}^2) + C(\varepsilon_{t0} - \varepsilon_{r0}) \right) \quad (3.59)$$

Para a 6ª hipótese, onde $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_2^*$ e $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.60) e (3.61).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_2^*} \sigma_{r2} d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_2^*}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r3} d\varepsilon_r \right] \quad (3.60)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{B}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_{r0}^2) + C(\varepsilon_2^* - \varepsilon_{r0}) + \frac{D}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_2^{*2}) - E(\varepsilon_{t0} - \varepsilon_2^*) \right) \quad (3.61)$$

Para a 7ª hipótese, onde $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^*$ e $\varepsilon_{t0} \geq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.62) e (3.63).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_2^*} \sigma_{r2} d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_2^*}^{\varepsilon_2^{**}} \sigma_{r3} d\varepsilon_r \right] \quad (3.62)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(C(\varepsilon_2^* - \varepsilon_{r0}) + \frac{B}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_{r0}^2) + \frac{D}{2} (\varepsilon_2^{**2} - \varepsilon_2^{*2}) - E(\varepsilon_2^{**} - \varepsilon_2^*) \right) \quad (3.63)$$

Para a 8ª hipótese, onde $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**}$ e $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.64) e (3.65).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r3} d\varepsilon_r \right] \quad (3.64)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{D}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_{r0}^2) - E(\varepsilon_{t0} - \varepsilon_{r0}) \right) \quad (3.65)$$

Para a 9ª hipótese, onde $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_2^{**}$ e $\varepsilon_{t0} \geq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.66) e (3.67).

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_2^{**}} \sigma_{r3} d\varepsilon_r \right] \quad (3.66)$$

$$F_r = b \frac{x}{\varepsilon_{c0}} \left(\frac{D}{2} (\varepsilon_2^{**2} - \varepsilon_{r0}^2) - E (\varepsilon_2^{**} - \varepsilon_{r0}) \right) \quad (3.67)$$

Por fim, para a 10ª hipótese, em que $\varepsilon_{r0} \geq \varepsilon_2^{**}$, a força do compósito torna-se zero e assim apresenta a ruína desse material, conforme (3.68).

$$F_r = 0 \quad (3.68)$$

3.5 MOMENTO RESISTENTE

O equilíbrio de momentos é obtido de modo que o momento externo seja igual ao resistente conforme apresentado na equação (3.69).

$$\sum M_i = M_{ext} \quad (3.69)$$

Em que:

M_{ext} : Momento externo solicitante.

M_i : Momento de contribuição para resistência de cada material.

O índice “i” se refere a cada material e ao tipo de esforço, conforme mencionado no item 3.4. Assim, os momentos parciais estão relacionados no Quadro 3.9.

Quadro 3.9 - Momentos resistentes a serem considerados

M_{cc}	Momento resistente do concreto comprimido
M_{ct}	Momento resistente do concreto tracionado
M_s	Momento resistente da armadura inferior
M'_s	Momento resistente da armadura superior
M_f	Momento resistente devido ao reforço de PRF (somente na tração)
M_r	Momento resistente do compósito cimentício na tração

Os momentos resistentes de cada material resultam de suas respectivas forças multiplicadas pelos respectivos braços de alavanca. Vale salientar que o braço de alavanca do concreto e do compósito não são valores obtidos de forma direta e assim, o cálculo de momento desses materiais deve ser realizado por meio de integração, conforme detalhado à frente.

Os momentos resistentes do aço são obtidos conforme equações (3.70) e (3.71).

$$M_s = F_s(d - x) \quad (3.70)$$

$$M'_s = F'_s(x - d') \quad (3.71)$$

Sendo:

d: Distância da borda mais comprimida da seção até o centro de gravidade da armadura tracionada;

d': Distância da borda mais comprimida da seção até o centro de gravidade da armadura comprimida;

M_f é dado pela equação (3.72).

$$M_f = F_f(h - x) \quad (3.72)$$

As expressões para M_{cc} , M_{ct} e M_r foram deduzidos a partir das leis constitutivas do concreto comprimido e tracionado e do concreto reforçado com fibras de aço dadas pela NBR 6118 e de Lok e Pei (1998) respectivamente. Essas deduções são apresentadas a seguir.

3.5.1 Momento resistente de compressão do concreto - M_{cc}

Considere novamente a Figura 3.3. O momento infinitesimal dM_{cc} é obtido ao se multiplicar a força infinitesimal dF_{cc} pelo braço de alavanca h_c . Com isso, tem-se a relação apresentada na equação (3.73).

$$dM_{cc} = dF_{cc}h_c = b\sigma_{cc}h_c dh_c \quad (3.73)$$

Assim como no cálculo das forças, a integral para o cálculo do momento também é expressa em função das deformações no intervalo $[0; \epsilon_{c0}]$ conforme (3.74), utilizando a substituição de variáveis da equação (3.24).

$$M_{cc} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_{cc} \varepsilon_c d\varepsilon_c \quad (3.74)$$

Para valores de $0 \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_{c2}$ o momento resistente de compressão do concreto é apresentado na equação (3.75).

$$M_{cc} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_0^{\varepsilon_{c0}} 0,85 f_{cd} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) \varepsilon_c d\varepsilon_c \quad (3.75) - a$$

$$M_{cc} = \frac{0,85 f_{cd} b x^2 \varepsilon_{c0} (8\varepsilon_{c2} - 3\varepsilon_{c0})}{12 \varepsilon_{c2}^2} \quad (3.75) - b$$

Para o intervalo $\varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_{c0} \leq \varepsilon_{cu}$, o momento resistente assume a forma da equação (3.76).

$$M_{cc} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_0^{\varepsilon_{c2}} 0,85 f_{cd} \left(1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right) \varepsilon_c d\varepsilon_c + \int_0^{\varepsilon_{c0}} 0,85 f_{cd} \varepsilon_c d\varepsilon_c \right] \quad (3.76) - a$$

$$M_{cc} = \frac{0,85 f_{cd} b x^2}{\varepsilon_{c0}^2} \left(\frac{5\varepsilon_{c2}^2}{12} + \frac{(\varepsilon_{c0}^2 - \varepsilon_{c2}^2)}{2} \right) \quad (3.76) - b$$

Seguindo o mesmo raciocínio discutido no item 3.4.1, para valores de ε_{c0} maiores que ε_{cu} , a força resistente é nula, conseqüentemente o momento também o será, conforme equação (3.77).

$$M_{cc} = 0 \quad (3.77)$$

Com as equações de momento resistente deduzidas, elabora-se uma tabela organizacional para apresentar as formulações e os respectivos intervalos de validade das equações conforme Quadro 3.10.

Quadro 3.10 – Equações e intervalos de validade de M_{cc}

M_{cc}	Intervalo para ε_{c0}
$\frac{0,85f_{cd}bx^2\varepsilon_{c0}(8\varepsilon_{c2} - 3\varepsilon_{c0})}{12\varepsilon_{c2}^2}$	$[0; \varepsilon_{c2}]$
$\frac{0,85f_{cd}bx^2}{\varepsilon_{c0}^2} \left(\frac{5\varepsilon_{c2}^2}{12} + \frac{(\varepsilon_{c0}^2 - \varepsilon_{c2}^2)}{2} \right)$	$[\varepsilon_{c2}; \varepsilon_{cu}]$
0	$(\varepsilon_{cu}; \infty)$

3.5.2 Momento resistente de tração do concreto - M_{ct}

O momento resistente de tração do concreto é calculado analogamente à metodologia apresentada no item 3.5.1. O momento resistente de tração do concreto é obtido por meio da integral dada pela equação (3.78) considerando as relações de h_t em função de ε_{r0} (equação (3.30)).

$$M_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_0^{\varepsilon_{r0}} \sigma_{ct} \varepsilon_t d\varepsilon_t \quad (3.78)$$

Para o intervalo $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_l$, o momento resistente de tração é dado na equação (3.79).

$$M_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_0^{\varepsilon_{r0}} E_{ci} \varepsilon_t^2 d\varepsilon_t \quad (3.79) - a$$

$$M_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \frac{E_{ci} (\varepsilon_{r0})^3}{3} \quad (3.79) - b$$

Se $\varepsilon_l \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{cr}$, então o momento de tração do concreto é representado pela equação (3.80).

$$M_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_0^{\varepsilon_l} E_{ci} \varepsilon_t^2 d\varepsilon_t + \int_{\varepsilon_l}^{\varepsilon_{r0}} (c\varepsilon_t + f_{ctk} - c\varepsilon_{cr}) \varepsilon_t d\varepsilon_t \right] \quad (3.80) - a$$

$$M_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\frac{E_{ci} \varepsilon_l^3}{3} + \frac{1}{6} (\varepsilon_l^2 (3c\varepsilon_{cr} - 2c\varepsilon_l - 3f_{ctk}) + 3(f_{ctk} - c\varepsilon_{cr}) \varepsilon_{r0}^2 + 2c(\varepsilon_{r0})^3) \right] \quad (3.80) - b$$

Finalmente, para valores de ε_{t0} maiores que ε_{cr} , existe uma resistência residual considerada aqui conforme foi comentada no item 3.4.2, isto é, os intervalos utilizados para se calcular as forças são utilizados da mesma forma neste item, conforme mostrado na equação (3.81).

$$M_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_0^{\varepsilon_l} E_{ci} \varepsilon_t^2 d\varepsilon_t + \int_{\varepsilon_l}^{\varepsilon_{cr}} (c\varepsilon_t + f_{ctk} - c\varepsilon_{cr}) \varepsilon_t d\varepsilon_t \right] \quad (3.81) - a$$

$$M_{ct} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\frac{E_{ci} \varepsilon_l^3}{3} + \frac{1}{6} (\varepsilon_{cr} - \varepsilon_l) (3f_{ctk} (\varepsilon_{cr} + \varepsilon_l) - c(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_l) (\varepsilon_{cr} + 2\varepsilon_l)) \right] \quad (3.81) - b$$

Organizando as equações obtidas com seus respectivos intervalos de ε_{r0} , tem-se o Quadro 3.11.

Quadro 3.11 - Equações e intervalos de validade de M_{ct}

M_{ct}	Intervalo para ε_{r0}
$b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \frac{E_{ci} (\varepsilon_{r0})^3}{3}$	[0; ε_l]
$b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\frac{E_{ci} \varepsilon_l^3}{3} + \frac{1}{6} (\varepsilon_l^2 (3c\varepsilon_{cr} - 2c\varepsilon_l - 3f_{ctk}) + 3(f_{ctk} - c\varepsilon_{cr}) \varepsilon_{r0}^2 + 2c(\varepsilon_{r0})^3) \right]$	[ε_l ; ε_{cr}]
$b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\frac{E_{ci} \varepsilon_l^3}{3} + \frac{1}{6} (\varepsilon_{cr} - \varepsilon_l) (3f_{ctk} (\varepsilon_{cr} + \varepsilon_l) - c(\varepsilon_{cr} - \varepsilon_l) (\varepsilon_{cr} + 2\varepsilon_l)) \right]$	(ε_{cr} ; ∞)

Sendo c dado conforme equação (3.13).

$$c = \frac{0,1f_{ctk}E_{ci}}{E_{ci}\varepsilon_{cr} - 0,9f_{ctk}}$$

3.5.3 Momento resistente do compósito cimentício

Analogamente aos momentos calculados para o concreto comprimido e tracionado, tem-se que o momento proveniente da resistência do compósito cimentício de concreto com fibras, após substituição de variáveis, fique em função da tensão e deformação do material e é dado pela equação (3.82).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_r \varepsilon_r d\varepsilon_r \quad (3.82)$$

De acordo com as deduções de forças do compósito, para o cálculo de momento resistente também serão consideradas as mesmas 10 hipóteses já mencionadas e enumeradas no Quadro 3.8.

Assim, para a 1ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $0 \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{02}$, o momento é obtido conforme equações (3.83) e (3.84).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r1} \varepsilon_r d\varepsilon_r \quad (3.83)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(A \left(\frac{\varepsilon_{02}^2}{2} (\varepsilon_{r0}^2 - \varepsilon_{t0}^2) + \frac{2\varepsilon_{02}}{3} (\varepsilon_{t0}^3 - \varepsilon_{r0}^3) + \frac{1}{4} (\varepsilon_{r0}^4 - \varepsilon_{t0}^4) \right) + \frac{\sigma_{02}}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_{r0}^2) \right) \quad (3.84)$$

Para a 2ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{2}^*$, tem-se as equações (3.85) e (3.86).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{02}} \sigma_{r1} \varepsilon_r d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{02}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r2} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.85)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{A}{12} (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{02})^3 (3\varepsilon_{r0} + \varepsilon_{02}) + \frac{B}{3} (\varepsilon_{t0}^3 - \varepsilon_{02}^3) + \frac{C}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_{02}^2) + \frac{\sigma_{02}}{2} (\varepsilon_{02}^2 - \varepsilon_{r0}^2) \right) \quad (3.86)$$

Para a 3ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $\varepsilon_{2^*} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{2^{**}}$, tem-se as equações (3.87) e (3.88).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{02}} \sigma_{r1} \varepsilon_r d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{02}}^{\varepsilon_{2^*}} \sigma_{r2} \varepsilon_r d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{2^*}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r3} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.87)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{A}{12} (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{02})^3 (3\varepsilon_{r0} + \varepsilon_{02}) + \frac{B}{3} (\varepsilon_{2^*}^3 - \varepsilon_{02}^3) + \frac{C}{2} (\varepsilon_{2^*}^2 - \varepsilon_{02}^2) \right. \\ \left. + \frac{D}{3} (\varepsilon_{t0}^3 - \varepsilon_{2^*}^3) + \frac{E}{2} (\varepsilon_{2^*}^2 - \varepsilon_{t0}^2) + \frac{\sigma_{02}}{2} (\varepsilon_{02}^2 - \varepsilon_{r0}^2) \right) \quad (3.88)$$

Para a 4ª hipótese, onde $0 \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{02}$ e $\varepsilon_{t0} \geq \varepsilon_{2^{**}}$, tem-se as equações (3.89) e (3.90).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{02}} \sigma_{r1} \varepsilon_r d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{02}}^{\varepsilon_{2^*}} \sigma_{r2} \varepsilon_r d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{2^*}}^{\varepsilon_{2^{**}}} \sigma_{r3} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.89)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{A}{12} (\varepsilon_{r0} - \varepsilon_{02})^3 (\varepsilon_{02} + 3\varepsilon_{r0}) + \frac{B}{3} (\varepsilon_{2^*}^3 - \varepsilon_{02}^3) + \frac{C}{2} (\varepsilon_{2^*}^2 - \varepsilon_{02}^2) \right. \\ \left. + \frac{D}{3} (\varepsilon_{2^{**}}^3 - \varepsilon_{2^*}^3) + \frac{E}{2} (\varepsilon_{2^*}^2 - \varepsilon_{2^{**}}^2) + \frac{\sigma_{02}}{2} (\varepsilon_{02}^2 - \varepsilon_{r0}^2) \right) \quad (3.90)$$

Para a 5ª hipótese, onde $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{2^*}$ e $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{2^*}$, tem-se as equações (3.91) e (3.92).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r2} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.91)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{B}{3} (\varepsilon_{t0}^3 - \varepsilon_{r0}^3) + \frac{C}{2} (\varepsilon_{t0}^2 - \varepsilon_{r0}^2) \right) \quad (3.92)$$

Para a 6ª hipótese, onde $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_{2^*}$ e $\varepsilon_{2^*} \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_{2^{**}}$, tem-se as equações (3.93) e (3.94).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{2^*}} \sigma_{r2} \varepsilon_r d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_{2^*}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r3} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.93)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{B}{3} (\varepsilon_2^{*3} - \varepsilon_{r0}^3) + \frac{C}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_{r0}^2) + \frac{D}{3} (\varepsilon_{t0}^3 - \varepsilon_2^{*3}) + \frac{E}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_{t0}^2) \right) \quad (3.94)$$

Para a 7ª hipótese, onde $\varepsilon_{02} \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_2^*$ e $\varepsilon_{t0} \geq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.95) e (3.96).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_2^*} \sigma_{r2} \varepsilon_r d\varepsilon_r + \int_{\varepsilon_2^*}^{\varepsilon_2^{**}} \sigma_{r3} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.95)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{B}{3} (\varepsilon_2^{*3} - \varepsilon_{r0}^3) + \frac{C}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_{r0}^2) + \frac{D}{3} (\varepsilon_2^{**3} - \varepsilon_2^{*3}) + \frac{E}{2} (\varepsilon_2^{*2} - \varepsilon_2^{**2}) \right) \quad (3.96)$$

Para a 8ª hipótese, onde $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_2^{**}$ e $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{t0} \leq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.97) e (3.98).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_{r3} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.97)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{D}{3} (\varepsilon_{t0}^3 - \varepsilon_{r0}^3) + \frac{E}{2} (\varepsilon_{r0}^2 - \varepsilon_{t0}^2) \right) \quad (3.98)$$

Para a 9ª hipótese, onde $\varepsilon_2^* \leq \varepsilon_{r0} \leq \varepsilon_2^{**}$ e $\varepsilon_{t0} \geq \varepsilon_2^{**}$, tem-se as equações (3.99) e (3.100).

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_2^{**}} \sigma_{r3} \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] \quad (3.99)$$

$$M_r = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left(\frac{D}{3} (\varepsilon_2^{**3} - \varepsilon_{r0}^3) + \frac{E}{2} (\varepsilon_{r0}^2 - \varepsilon_2^{**2}) \right) \quad (3.100)$$

Por fim, para a 10ª hipótese, em que $\varepsilon_{r0} \geq \varepsilon_2^{**}$, a força do compósito torna-se zero e assim apresenta a ruína desse material, conforme (3.101).

$$F_r = 0 \quad (3.101)$$

4 FORMULAÇÃO GERAL PARA VIGAS REABILITADAS E REFORÇADAS

Neste item serão aplicadas as formulações obtidas dos itens 3.4 e 3.5 para o caso de vigas que tiveram o banzo tracionado substituído por um compósito cimentício de concreto reforçado com fibras e posteriormente foram reforçadas com PRF utilizando a técnica de colagem externa (EBR), denominadas neste trabalho simplesmente por vigas rehabilitadas e reforçadas.

O equilíbrio de forças deve obedecer a equação (4.1).

$$F_{cc} + F_{ct} + F_r + F_s + F'_s + F_f = 0 \quad (4.1)$$

Assim como para o cálculo de forças, o momento resistente será obtido como resultado da soma dos momentos resistentes para cada material conforme equação (4.2).

$$M_{ext} = M_{cc} + M_{ct} + M_r + M_s + M'_s + M_f \quad (4.2)$$

Substituindo as expressões das forças e dos momentos tem-se as expressões finais para a viga de concreto armado convencional expressas nas equações (4.3) e (4.4).

$$b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right) \left[\int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_{cc} d\varepsilon_c + \int_0^{\varepsilon_{r0}} \sigma_{ct} d\varepsilon_t + \int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_r d\varepsilon_r \right] + A_s \sigma_s + A'_s \sigma'_s + F_f = 0 \quad (4.3)$$

$$M_{ext} = b \left(\frac{x}{\varepsilon_{c0}} \right)^2 \left[\int_0^{\varepsilon_{c0}} \sigma_{cc} \varepsilon_c d\varepsilon_c + \int_0^{\varepsilon_{r0}} \sigma_{ct} \varepsilon_t d\varepsilon_t + \int_{\varepsilon_{r0}}^{\varepsilon_{t0}} \sigma_r \varepsilon_r d\varepsilon_r \right] + \sigma_s A_s (d - x) + \sigma'_s A'_s (x - d') + \sigma_f A_f (H - x) \quad (4.4)$$

4.1 PROCEDIMENTO GERAL DE CÁLCULO

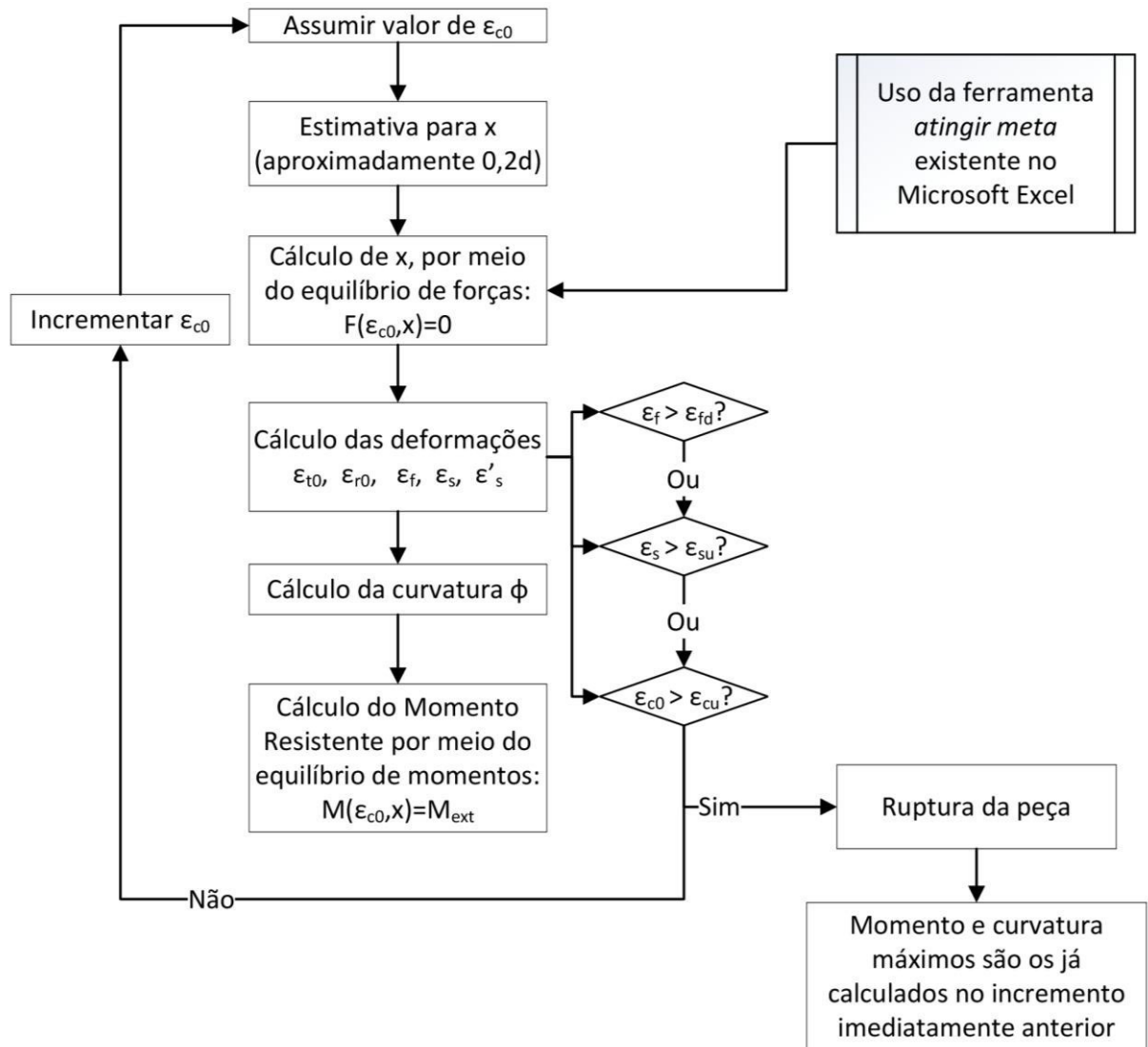
Todas as equações e condições de hipóteses apresentadas e deduzidas até aqui foram implementadas em uma planilha de Microsoft Excel. Para que o modelo seja aplicado em vigas de concreto armado convencional, sem reforço, atribui-se zero à altura H_r além de zerar o número de camadas de mantas de PRF (n). Nesse último caso, é considerada uma condição extra para a força F_f de modo que ela seja nula se $n = 0$.

Todas as equações de equilíbrio de forças e momentos resistentes apresentadas até aqui estão em função das variáveis ε_{c0} e x . O processo se inicia com a adoção de um valor para ε_{c0} e, utilizando a equação de equilíbrio de força (equação (4.3)), obtém-se o valor de x . Com os dois valores em mãos, esses resultados são aplicados na expressão de momento resistente (equação (4.4)). Ainda com os valores de ε_{c0} e x , calcula-se a curvatura ϕ utilizando a equação (3.1). Com posse da curvatura e do momento resistente, pode-se calcular o deslocamento vertical no meio do vão para o caso de vigas submetidas à flexão em quatro pontos por meio da equação (3.7).

O procedimento descrito no parágrafo anterior deve ser repetido para uma sequência crescente de valores ε_{c0} até que se atinja um dos critérios de ruptura (deformação excessiva do concreto comprimido, deformação excessiva da armadura tracionada, deformação excessiva do reforço de PRF ou descolamento do PRF).

Para facilitar o entendimento, elaborou-se um fluxograma do processo conforme mostrado na Figura 4.1.

Figura 4.1 – Fluxograma do processo de cálculo



5 RESULTADOS: VERIFICAÇÃO DO MODELO

Aqui, a validação do modelo é avaliada utilizando-se para tanto resultados experimentais de pesquisas já realizadas por outros autores.

Buscou-se trabalhos que apresentassem dados em relação ao histórico de cargas e deformações do concreto comprimido e armadura tracionada ou do reforço tracionado, de modo a permitir o cálculo da curvatura.

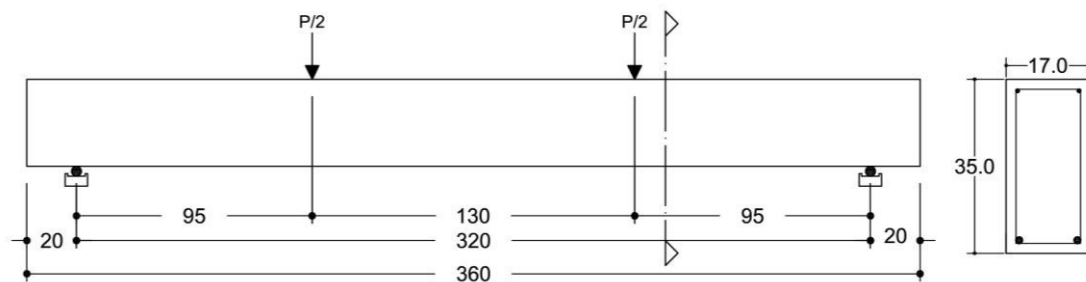
Todas as vigas foram obtidas de trabalhos experimentais desenvolvidos tanto dentro quanto fora do Brasil, onde as peças foram ensaiadas até a ruína. Para validação do modelo, as curvas analíticas serão comparadas com as experimentais tendo-se o objetivo de avaliar a capacidade do modelo em reproduzir a resposta experimental da viga analisada.

5.1 VIGA EM CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL

5.1.1 Comparação com resultados experimentais de Ferrari

A Figura 5.1 e Figura 5.2 mostram a configuração de carregamento, geometria e armaduras de todas as vigas ensaiadas por Ferrari (2007).

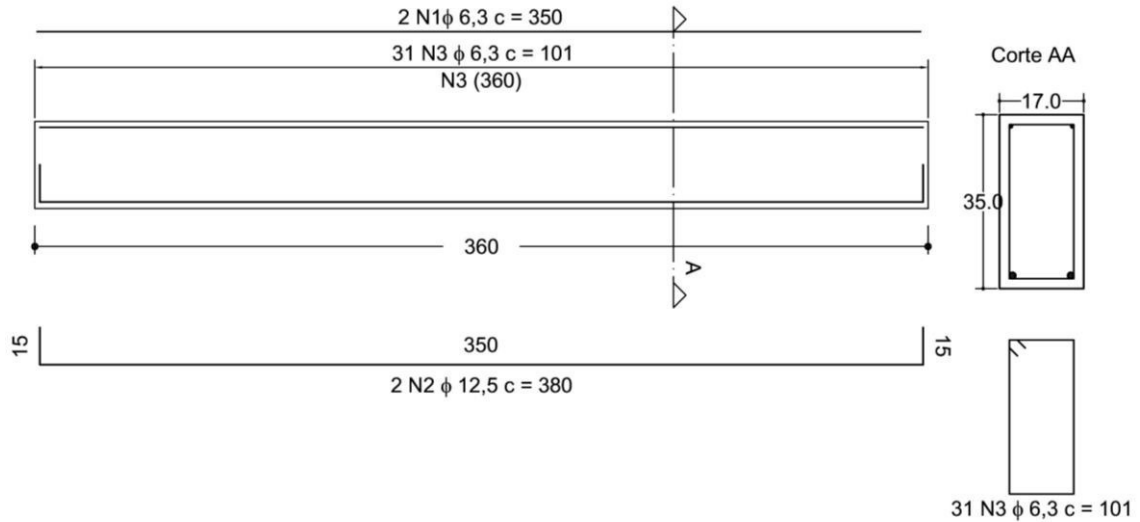
Figura 5.1 – Configuração de carregamento e geometria de todas as vigas de Ferrari



Fonte: Adaptado de Ferrari (2007)

Figura 5.2 – Detalhe das armaduras das vigas de Ferrari

Detalhe das armaduras



Fonte: Adaptado de Ferrari (2007)

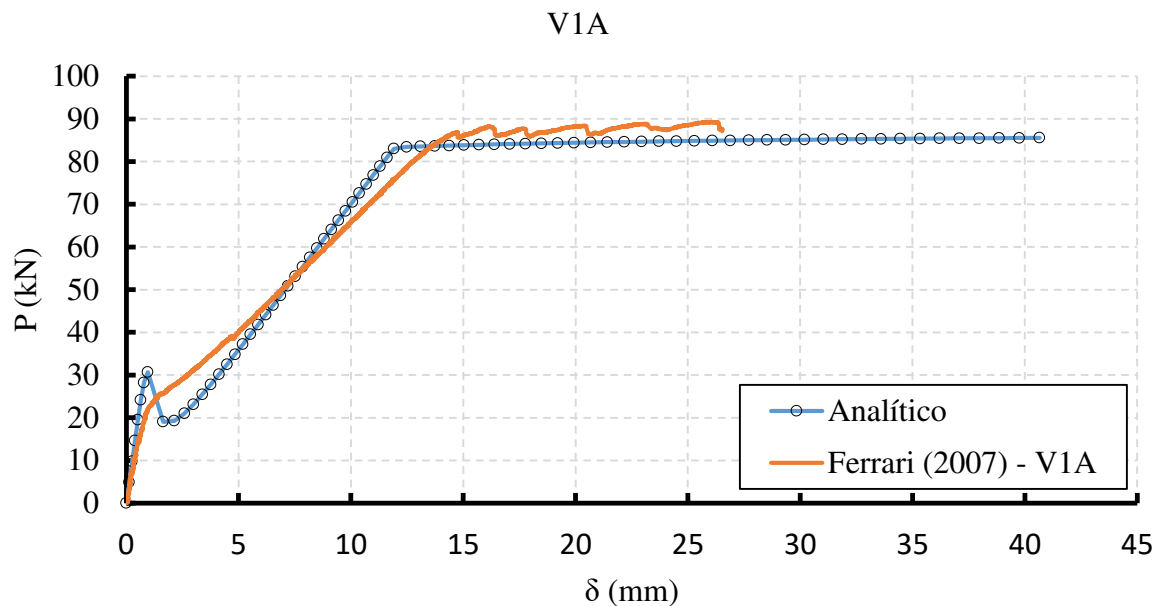
Os parâmetros utilizados por Ferrari (2007) e adotados no modelo analítico foram os indicados na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – Propriedades das vigas

Viga	Seção				Concreto			Aço				
	b (mm)	h (mm)	d (mm)	d' (mm)	E_{cs} (MPa)	f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_s (MPa)	f_y (MPa)	ϵ_y (‰)	A_s (mm ²)	A'_s (mm ²)
VIA	170	350	317	29	30034	38,68	2,907	210921	547,99	3,00	245,43	62,34

No Gráfico 5.1 encontram-se as curvas analíticas e experimentais para a viga VIA.

Gráfico 5.1 – Resultados para a viga V1A de Ferrari



A Tabela 5.2 apresenta um resumo comparativo entre as forças de fissuração, escoamento e ruptura com os respectivos erros percentuais.

Tabela 5.2 – Forças notáveis para viga V1A de Ferrari

Pf (kN)			Py (kN)			Pu (kN)			Falha exp.	Falha an.
Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
21,01	25,55	22%	79,80	83,63	5%	89,27	85,53	4%	1	1

1: Ruptura por deformação excessiva na armadura tracionada

O modelo analítico mostrou-se muito próximo dos resultados experimentais, apresentando força de fissuração igual a 25,55 kN (diferença de 22%), força de escoamento igual a 83,63 kN (diferença de 5%) e força de ruptura igual a 85,53 kN (diferença de 4%). Em ambos os modelos a ruína ocorre devido à deformação excessiva da armadura tracionada (inferior).

É possível notar que a curva analítica apresenta um declínio acentuado após o início da fissuração. Esse efeito está relacionado à não consideração do *tension stiffening* (amolecimento do concreto após atingir sua tensão resistente de tração).

As diferenças obtidas se mostraram menores do que 5% para as forças de escoamento e de ruptura, o que confirma a boa representatividade do modelo para as cargas últimas. Entretanto a força de fissuração se mostrou com erro acentuado, demonstrando má representatividade do modelo apenas para este caso.

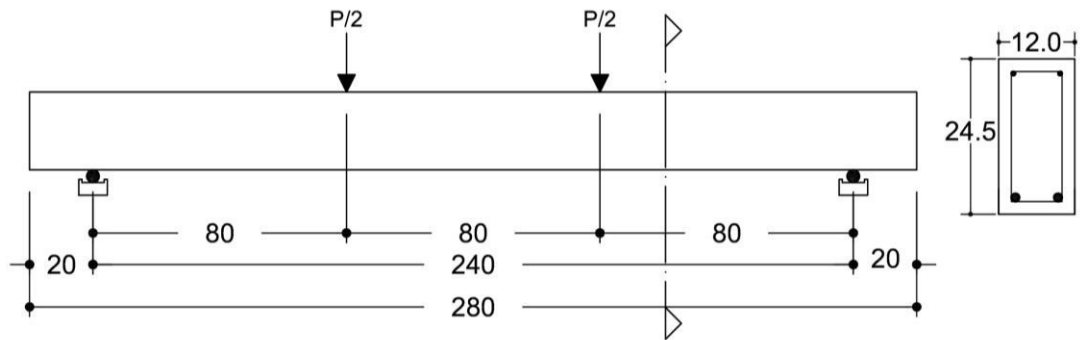
No entanto, se a força de fissuração for calculada conforme o momento de fissuração dado pela NBR 6118:2014, que é baseado na Lei de Hooke de elasticidade, obtém-se o valor de 21,24 kN fornecendo um erro de 1%, mostrando que a expressão para comportamento linear em Estádio I (pré-fissuração) é ideal para a representação de tal força.

5.1.2 Comparação com resultados experimentais de Vieira

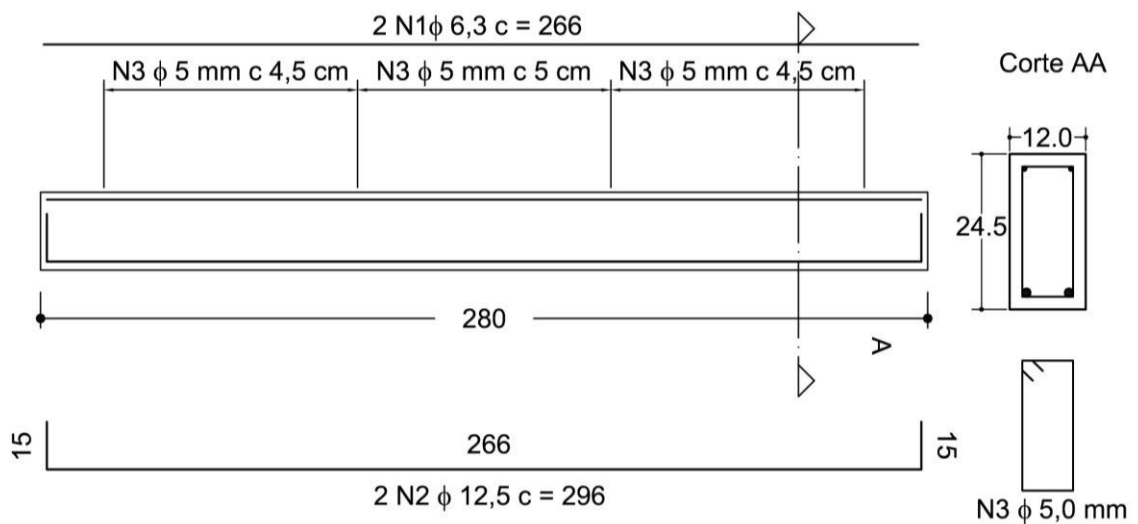
A Figura 5.3 apresenta o esquema das vigas do grupo A ensaiadas por Vieira et al. (2016). Vale salientar que as vigas do grupo B são idênticas às do A, diferindo apenas na taxa de armadura de tração, isto é, as do grupo A foram confeccionadas com barras de 12,5 mm para a armadura tracionada. Já as do grupo B foram montadas com barras inferiores de 10 mm.

Dessa forma as vigas de referência, ou seja, apenas em concreto armado convencional, foram denominadas por VA-R e VB-R, respectivamente para cada grupo.

Figura 5.3 – Viga do grupo VA de Vieira



Detalhe das armaduras



Fonte: Adaptado de Vieira et al. (2016)

Na Tabela 5.3 constam as propriedades utilizadas para o cálculo da curva momento-curvatura das vigas de Vieira et al. (2016).

Tabela 5.3 – Propriedades das vigas de Vieira

Viga	Seção				Concreto				Aço			
	b (mm)	h (mm)	d (mm)	d' (mm)	E_c (MPa)	f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_s (MPa)	f_y (MPa)	ϵ_y (‰)	A_s (mm ²)	$A's$ (mm ²)
VA-R	120	245	214	31	30500	33,5	3,118	217000	656,30	2,55	245,43	62,34
VB-R	120	245	214	31	30500	33,5	3,118	189600	655,00	2,43	157,08	62,34

Fonte: Adaptado de Vieira et al. (2016)

O Gráfico 5.2 e o Gráfico 5.3 mostram a comparação das curvas força-deslocamento analítica com a experimental desse autor.

Gráfico 5.2 – Resultados para viga em concreto armado convencional VA-R de Vieira

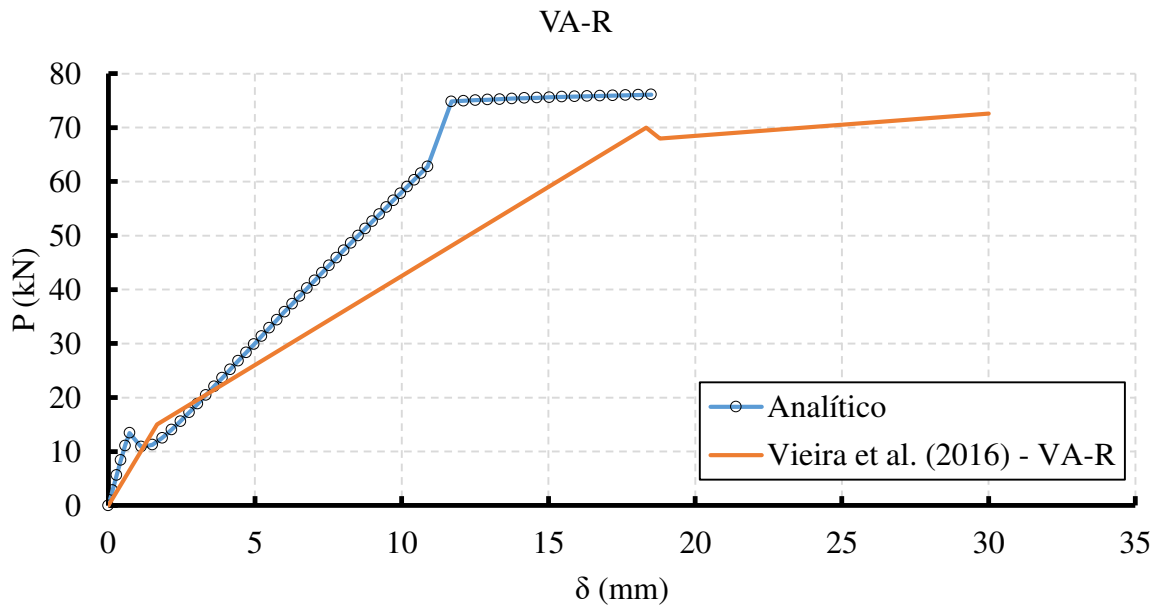
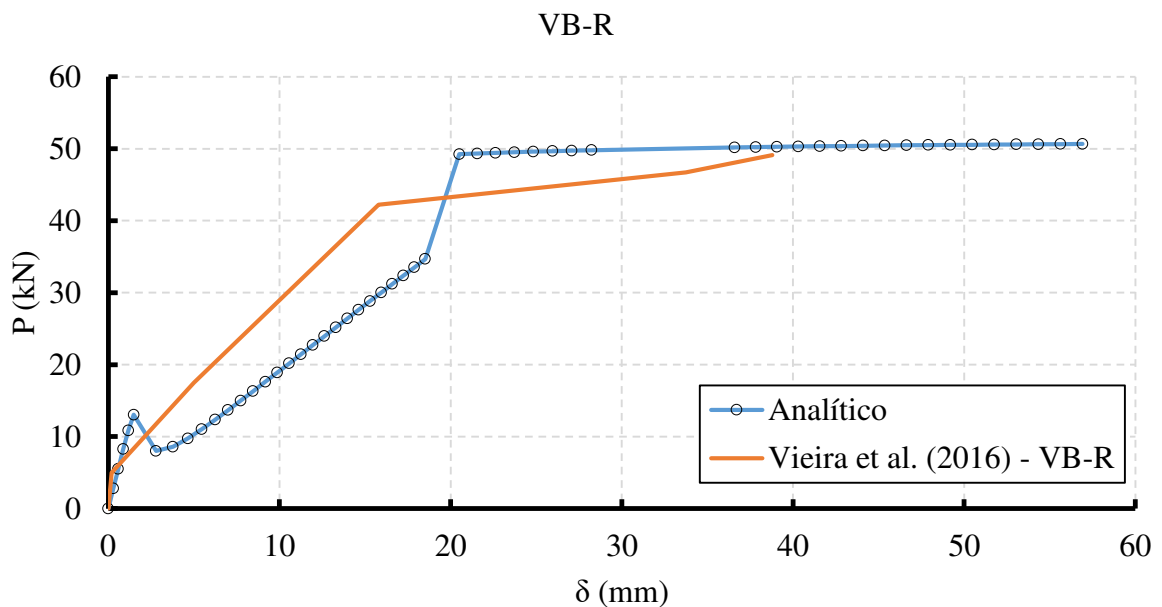


Gráfico 5.3 – Resultados para viga em concreto armado convencional VB-R de Vieira



O modelo teórico da VA-R mostrou-se mais rígido na fase pós-fissuração, em relação à curva experimental. Já para a viga VB-R, embora as curvas tenham se afastado na fase pós-

fissuração, as rupturas de ambas tendem ao mesmo valor numérico. Além disso, em ambas as curvas, existe um salto na curva no momento em que se inicia o escoamento do aço. Tal fato ocorre devido a uma instabilidade numérica que surge quanto mais próxima a deformação do aço estiver da deformação de escoamento (ϵ_y).

A primeira (VA-R) apresentou força de escoamento teórico de 63,26 kN enquanto que a força experimental foi de 56,10 kN, resultando em um erro de 13%. Já para a força última, o modelo fornece o valor de 76,89 kN que, ao se comparar com o valor de ruptura experimental 72,60 kN, se obtém um erro de 6% na análise.

Por outro lado, o modelo analítico da viga VB-R apresentou força de escoamento de 34,93 kN que, comparando-se com a força experimental de 29,90 kN, tem-se o erro de 17%. A comparação entre as forças de ruptura teórica e experimental produz um erro de 3% sendo essas forças respectivamente 50,81 kN e 49,1 kN.

Com base nas análises e comparações com esses resultados experimentais, observa-se que realmente o modelo é adequado às vigas de concreto armado convencional, mostrando-se bastante preciso na predição da ruptura.

A Tabela 5.4 mostra as cargas notáveis de escoamento e última com os respectivos erros em relação ao modelo analítico.

Tabela 5.4 – Forças notáveis para vigas em concreto armado de Vieira

		Py (kN)			Pu (kN)			Falha exp.	Falha an.
		Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
VA-R	Exp.	56,10	63,26	13%	72,60	76,89	6%	1	1
	An.								
VB-R	Exp.	29,90	34,93	16%	49,1	50,81	3%	1	1
	An.								

1: Ruptura por deformação excessiva na armadura tracionada

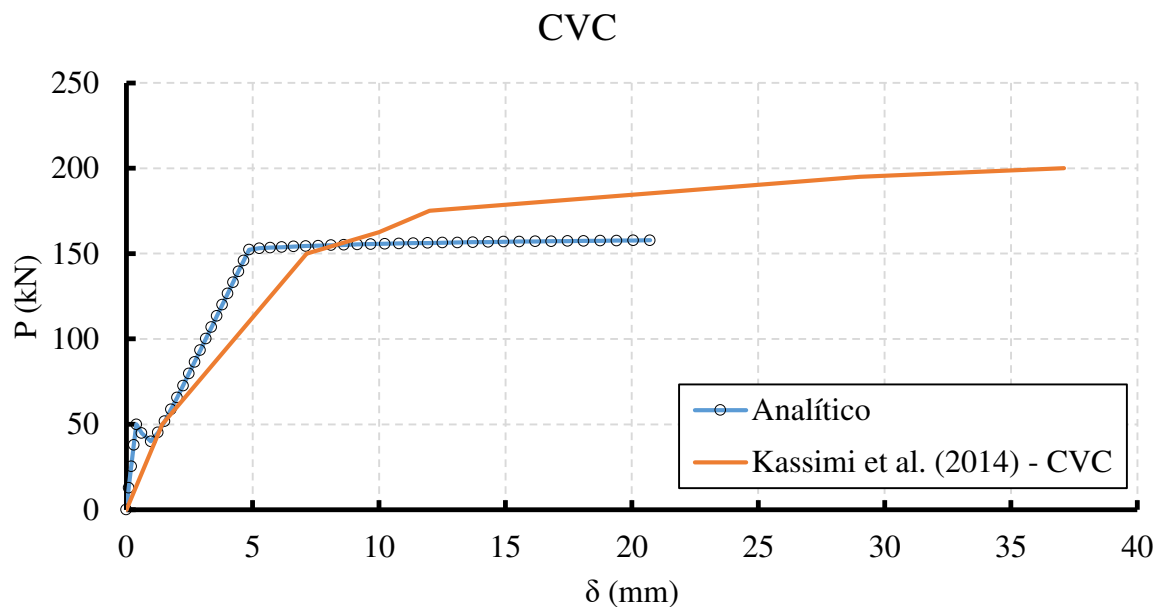
5.1.3 Comparação com resultados experimentais de Kassimi

Nesse item será apresentada uma comparação entre o resultado experimental de uma viga em concreto armado convencional ensaiada por Kassimi et al. (2014), denominada por CVC. As configurações das vigas ensaiadas por eles já foram apresentadas no item 2.6.1 e as propriedades dessa viga constam na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Propriedades da viga CVC

Seção				Concreto			Aço				
b (mm)	h (mm)	d (mm)	d' (mm)	E _{cs} (MPa)	f _c (MPa)	f _{ct} (MPa)	E _s (MPa)	f _y (MPa)	ε _y (%)	A _s (mm ²)	A' _s (mm ²)
250	400	365	35	27500	37,80	3,15	200000	400	2,00	597,30	200,58

O resultado da comparação se encontra no Gráfico 5.4.

Gráfico 5.4 – Resultados para a viga CVC

As forças notáveis de fissuração, escoamento e ruptura são comparadas entre seus valores experimentais e teóricos, sendo apresentadas na Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Forças notáveis para a viga de Kassimi

P _f (kN)			P _y (kN)			P _u (kN)			Falha exp.	Falha an.
Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
45,00	49,98	11%	165,00	152,28	8%	216,00	157,75	27%	2	1

1: Ruptura por deformação excessiva na armadura tracionada

2: Ruptura no concreto comprimido

Observando as curvas nota-se que ambas possuem uma boa aproximação em uma fase de carregamento inicial e intermediário, entretanto, devido à diferença no modo de ruptura,

passam a se distanciar após o início do escoamento. Os erros com relação às forças notáveis se mostraram baixos até o início do escoamento, momento em que o modo de ruptura torna-se de grande importância na determinação da força de ruptura. Dessa forma, o erro para a formação de fissura se dá com 11% comparando o valor de força de fissuração de 45 kN, para a experimental, com o de 49,98 kN, para a teórica. Já o escoamento ocorre em 165 kN, no ensaio experimental, e em 152,28 kN no modelo analítico proposto, fornecendo erro de 8%. Por fim, a ruptura se deu de modo equivocado, sendo que o modelo analítico previu a ruptura da armadura tracionada antes do esmagamento do concreto comprimido, diferentemente do ocorrido em laboratório, onde o concreto rompeu antes. O erro acusado foi de 27%, comparando os valores de 216 kN e 157,75 kN para as forças de ruptura experimental e teórica, respectivamente.

Vale salientar que na predição realizada por Kassimi et al. (2014), conforme mostrado no item 2.6.1, os autores obtiveram erro de 29%, demonstrando que tanto seu modelo quanto o proposto na presente dissertação fornecem o mesmo resultado, visto que a diferença entre os valores teóricos são muito pequenos (comparação entre os erros de 27% e 29%).

5.2 VIGA EM CONCRETO ARMADO REFORÇADA À FLEXÃO COM PRF

5.2.1 Comparação com resultados experimentais de Ferrari

Ferrari (2007) experimentou vigas reforçadas à flexão por meio da técnica de colagem externa (EBR) com três camadas de PRFC. A viga em questão foi denominada pelo autor como V1C cuja geometria é a mesma da viga V1A, mas com o acréscimo das camadas de reforço na face inferior. A geometria e as características de armação e carregamento foram apresentadas no item 5.1.1.

A Tabela 5.7 apresenta as propriedades físicas e geométricas da viga V1C de Ferrari.

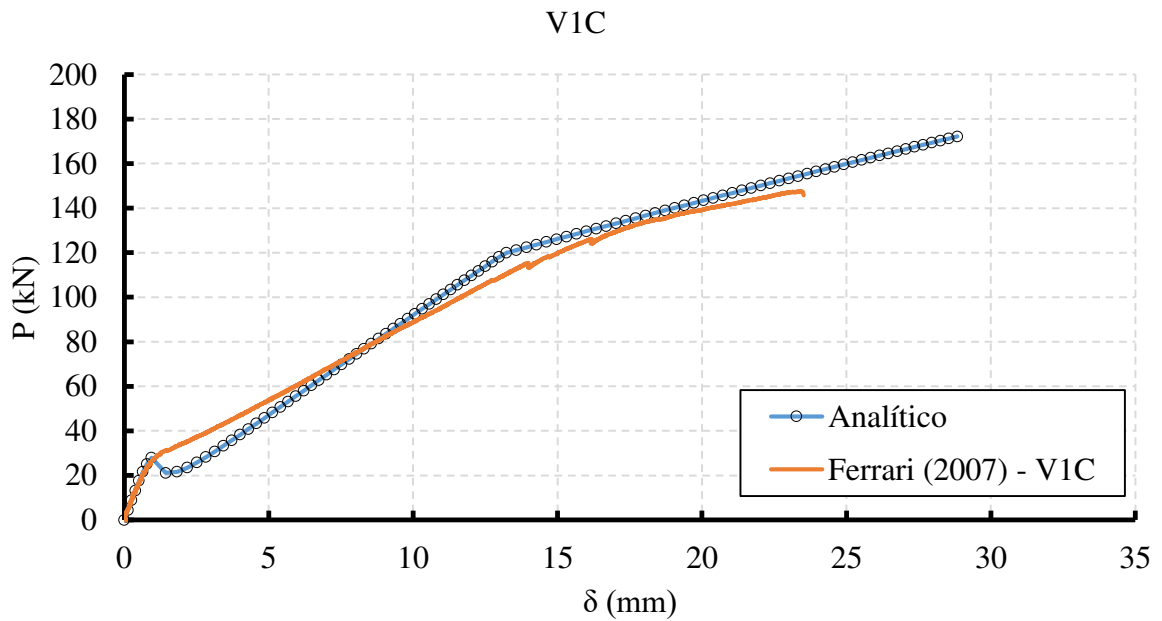
Tabela 5.7 – Propriedades da viga V1C de Ferrari

Seção				Concreto				Aço				
b (mm)	h (mm)	d (mm)	d' (mm)	E _{cs} (MPa)	f _c (MPa)	f _{ct} (MPa)	E _s (MPa)	f _y (MPa)	□ _y (%)	A _s (mm ²)	A' _s (mm ²)	
170	350	317	29	26553	33,95	2,286	199667	532,44	2,67	245,43	62,34	
Reforço												
E _r (MPa)		□ _{fu} (%)		F _{tu} (MPa)		t _r (mm)		n. cam.		A _r (mm ²)		
234000		13,13		3169		0,166		3		84,66		

Fonte: Adaptado de Ferrari (2007)

Aplicando esses dados no modelo proposto neste trabalho, é possível gerar a comparação entre os resultados teórico e experimental por meio do Gráfico 5.5.

Gráfico 5.5 - Resultados para a viga reforçada de Ferrari



A Tabela 5.8 mostra as forças de fissuração, escoamento e de ruptura do modelo analítico e do experimental com os respectivos erros e modos de falha.

Tabela 5.8 – Forças notáveis para viga V1C de Ferrari

Pf (kN)			Py (kN)			Pu (kN)			Falha exp.	Falha an.
Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)	3	4
25,16	27,93	11%	118,45	119,94	1%	147,37	172,81	17%		

3: Desprendimento do sistema de reforço (arrancamento do concreto de cobrimento)

4: Descolamento na interface concreto-reforço

Analisando a curva apresentada neste item, pode-se perceber que as forças notáveis possuem boa aproximação, com erros de 11% ao se comparar a carga de fissuração experimental de 25,16 kN com a teórica, de 27,93 kN; 1% ao confrontar as forças de escoamento de 118,45 kN (experimental) e 119,94 kN (teórico) e 17% para as forças de ruptura de 147,37 kN (experimental) e 172,81 kN (teórico). O erro obtido para a carga última pode ser explicado devido ao critério mais simples utilizado para o desprendimento do reforço.

Pode-se verificar que o modo de ruptura é diferente para cada curva, ou seja, no modelo experimental foi verificado o desprendimento do reforço, ou delaminação do concreto de cobrimento, enquanto que o modelo teórico apontou falha no descolamento na interface entre o concreto e o reforço. Isso se verifica, pois, o presente modelo não comporta a delaminação do concreto, apenas o critério de deformação máxima prevista pelo ACI para que não ocorra o descolamento (*debonding*). No entanto, mesmo que o modo de ruptura tenha se mostrado diferenciado, a porcentagem de erro ainda é aceitável.

5.2.2 Comparação com resultados experimentais de Vieira

As vigas ensaiadas por Vieira et al. (2016) possuem as mesmas configurações já apresentadas na Figura 5.3 e propriedades conforme Tabela 5.3. Da mesma forma, as vigas reforçadas também foram divididas nos grupos A e B, e foram ensaiadas com 2, 3, 4 e 5 camadas de reforço, e, portanto, essas vigas foram denominadas VA-2, VA-3, VA-4, VA-5, VB-2, VB-3, VB-4 e VB-5, tendo o número em cada viga significado da quantidade de camadas coladas.

A Tabela 5.9 mostra as propriedades do reforço de PRF utilizado nas vigas de Vieira et al. (2016).

Tabela 5.9 – Propriedades das vigas de Vieira

Reforço					
E_f (MPa)	ε_{fu} (‰)	F_{fu} (MPa)	t_f (mm)	n. cam.	A_f (mm)
230000	21,00	4830	0,166	Var.	Var.

Fonte: Adaptado de Vieira et al. (2016)

O Gráfico 5.6, Gráfico 5.7, Gráfico 5.8, Gráfico 5.9, Gráfico 5.10, Gráfico 5.11, Gráfico 5.12 e Gráfico 5.13 apresentam os diagramas de Força-Deslocamento no meio do vão para todas as vigas reforçadas de Vieira et al. (2016).

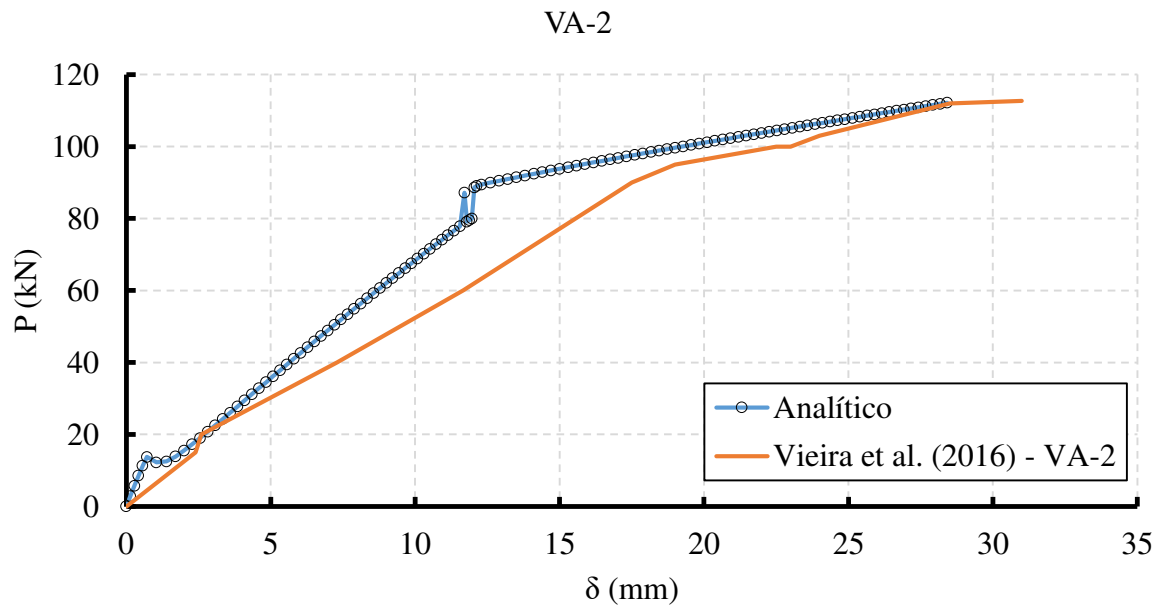
Gráfico 5.6 - Resultados para a viga VA-2

Gráfico 5.7 - Resultados para a viga VA-3

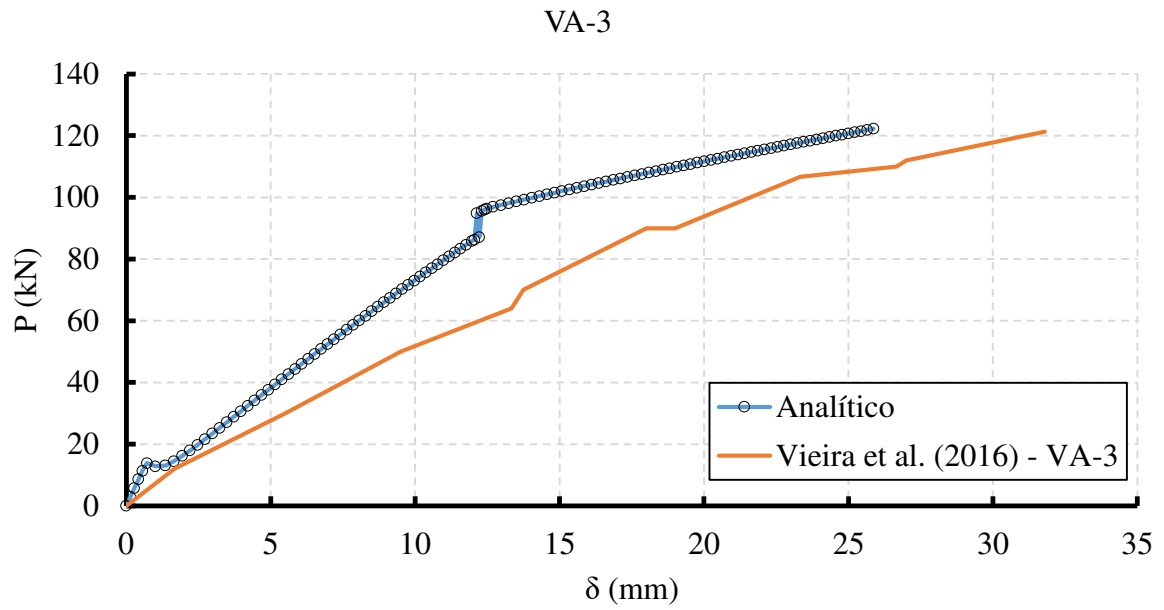


Gráfico 5.8 - Resultados para a viga VA-4

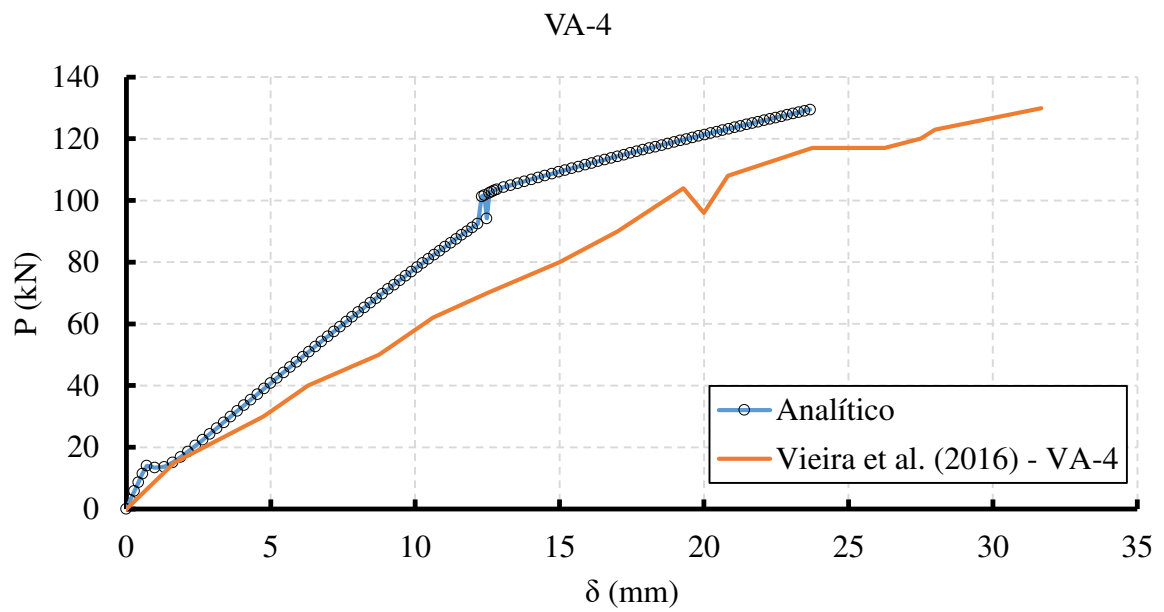


Gráfico 5.9 - Resultados para a viga VA-5

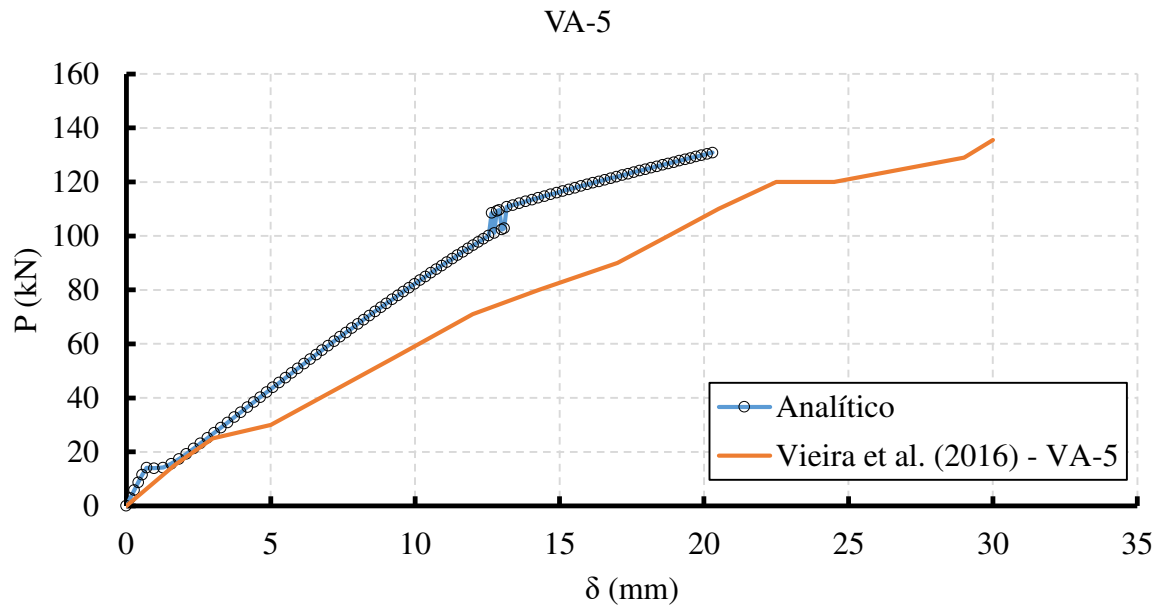


Gráfico 5.10 - Resultados para a viga VB-2

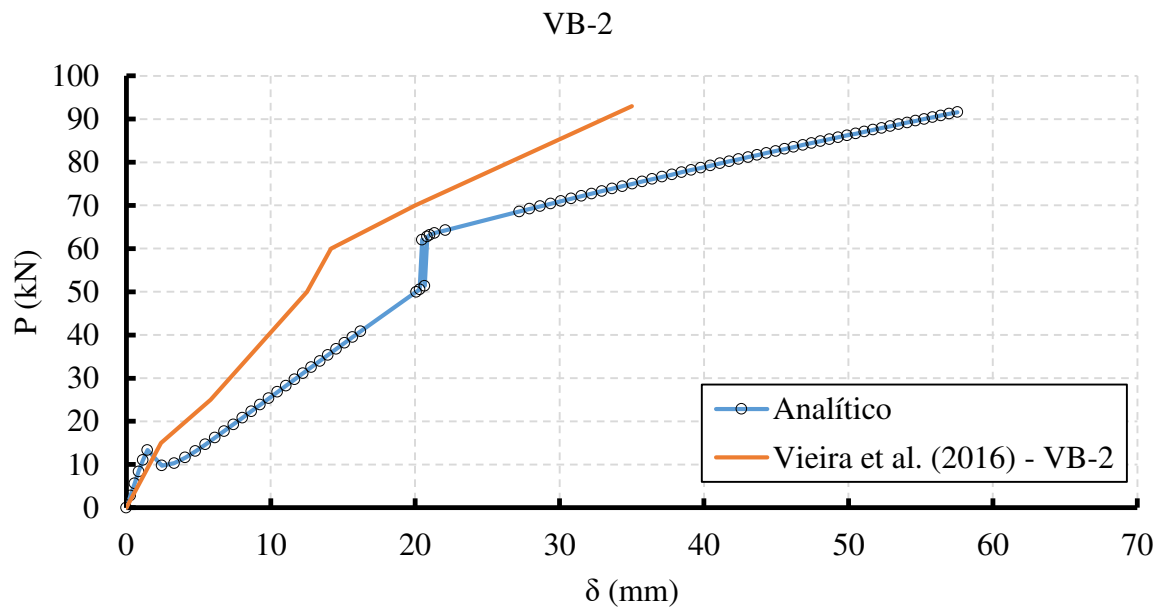


Gráfico 5.11 - Resultados para a viga VB-3

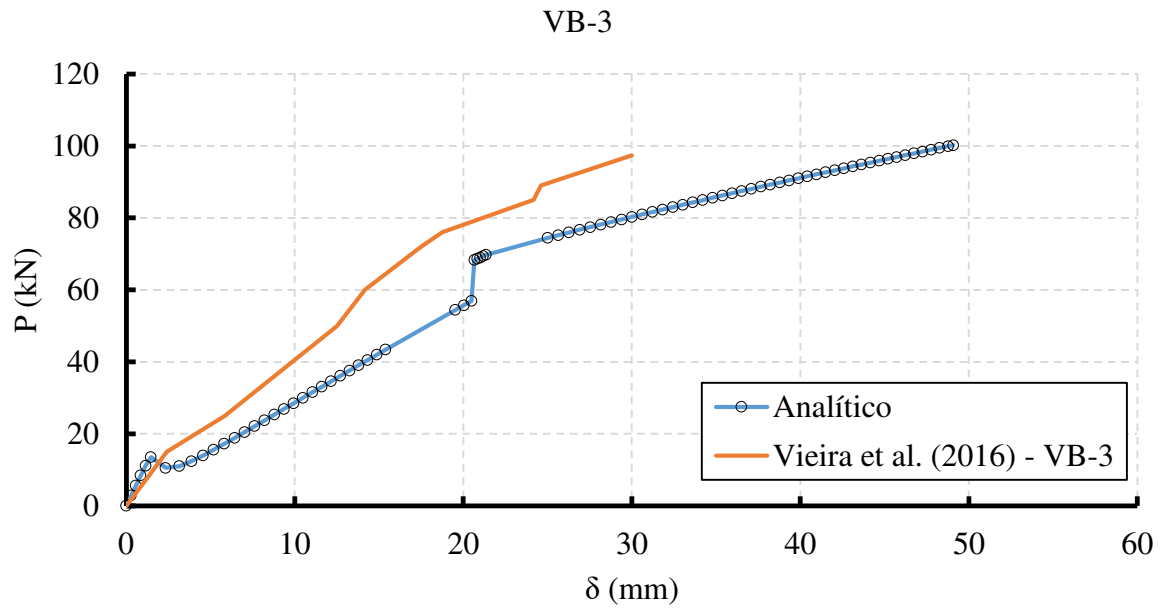


Gráfico 5.12 - Resultados para a viga VB-4

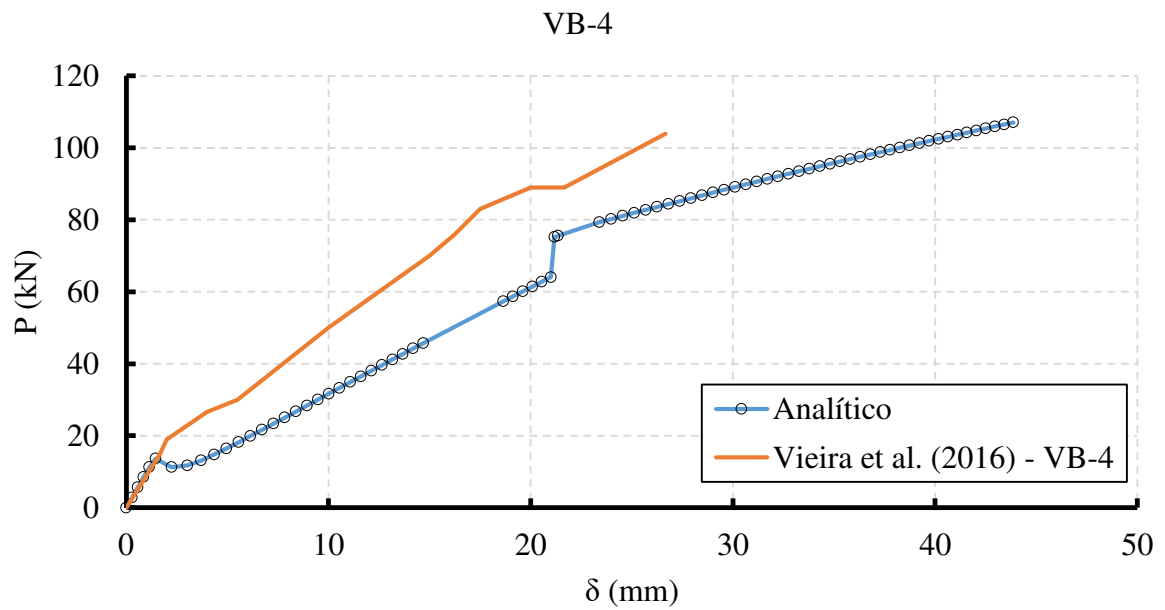
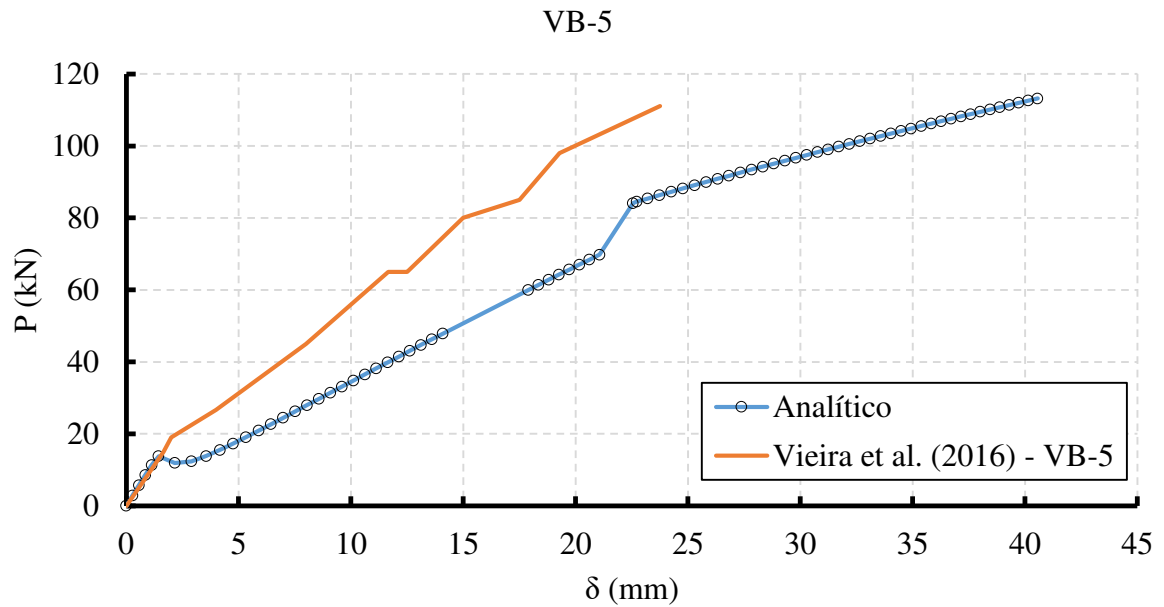


Gráfico 5.13 - Resultados para a viga VB-5



Da mesma forma que as vigas VA-R e VB-R de Vieira, as vigas reforçadas também apresentaram saltos nos diagramas nas imediações da força relativa ao escoamento das armaduras, tendo ocorrido também devido a uma instabilidade numérica quando se aplica a função solver para esse nível de carregamento.

As forças notáveis para todas as vigas constam na Tabela 5.10, onde também é possível verificar o percentual de erro entre as forças experimentais e as respectivas predições.

Tabela 5.10 – Forças notáveis para as vigas de Vieira

	Py (kN)			Pu (kN)			Falha exp.	Falha an.
	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
VA-2	79,90	89,03	11%	112,70	118,18	5%	3	2
VA-3	82,30	85,83	4%	121,30	122,25	1%	3	2
VA-4	89,90	91,26	2%	129,90	129,45	0%	3	2
VA-5	94,90	108,52	14%	135,60	130,89	3%	3	4
VB-2	51,30	49,97	3%	93,00	91,60	2%	3	4
VB-3	63,70	56,92	11%	97,40	100,21	3%	3	4
VB-4	67,10	64,06	5%	103,90	107,06	3%	3	4
VB-5	79,70	84,10	6%	111,10	113,21	2%	3	4

2: Ruptura do concreto comprimido

3: Desprendimento do sistema de reforço

4: Descolamento na interface concreto-reforço

Observando os resultados da comparação com as vigas de Vieira et al. (2016), nota-se que o modelo teórico se aproxima bastante das forças de escoamento e ruptura com erros em média de 7% para a previsão do escoamento e erros entre 0 e 3 % para a previsão da ruptura.

Vale salientar que, apesar de os resultados se mostrarem bastante próximos da realidade, os modos de ruína são equivocados podendo ser explicado devido à não consideração do arrancamento do cobrimento de concreto (falha por desprendimento do sistema de reforço). Tal modelo apenas considera o descolamento na interface entre reforço e substrato de concreto.

5.3 VIGA EM CONCRETO ARMADO REABILITADA COM CRFA

5.3.1 Comparação com resultados de Kassimi

Neste item são comparados os resultados de duas vigas ensaiadas por Kassimi et al. (2014) conforme apresentado no item 2.6.1. Dessa forma, para avaliar o modelo proposto, as vigas escolhidas foram as que possuem a faixa rehabilitada de concreto auto adensável reforçado com fibras de aço: S-SCC-0.3 e S-SCC-0.5. A Tabela 5.11 apresenta as propriedades dessas vigas.

Tabela 5.11 – Propriedades das vigas de Kassimi

	Seção				Concreto				Aço				
	b (mm)	h (mm)	d (mm)	d' (mm)	E _{cs} (MPa)	f _c (MPa)	f _{ct} (MPa)	E _s (MPa)	f _y (MPa)	□ _y (%)	A _s (mm ²)	A' _s (mm ²)	
S-SCC-0.3	250	400	365	31	28500	36,1	3,06	200000	400	2,00	597,30	207,74	
	CRFA												
	f _{cu} (MPa)		f _t (MPa)		V _f (%)		L/d		τ _d (MPa)		ε ₂ **		H _r (mm)
	55,4		5,4		0,3		55		2,297		0,1		125
	Seção				Concreto				Aço				
	b (mm)	h (mm)	d (mm)	d' (mm)	E _{cs} (MPa)	f _c (MPa)	f _{ct} (MPa)	E _s (MPa)	f _y (MPa)	□ _y (%)	A _s (mm ²)	A' _s (mm ²)	
S-SCC-0.5	250	400	365	31	32000	40,6	3,15	200000	400	2,00	597,30	207,74	
	CRFA												
	f _{cu} (MPa)		f _t (MPa)		V _f (%)		L/d		τ _d (MPa)		ε ₂ **		H _r (mm)
	53,3		5,58		0,5		55		2,297		0,1		125

Fonte: Adaptado de Kassimi et al. (2014)

Os resultados das comparações entre o modelo teórico e o experimental de cada viga de Kassimi et al. (2014) constam no Gráfico 5.14 e Gráfico 5.15.

Gráfico 5.14 – Resultados para a viga S-SCC-0.3 de Kassimi

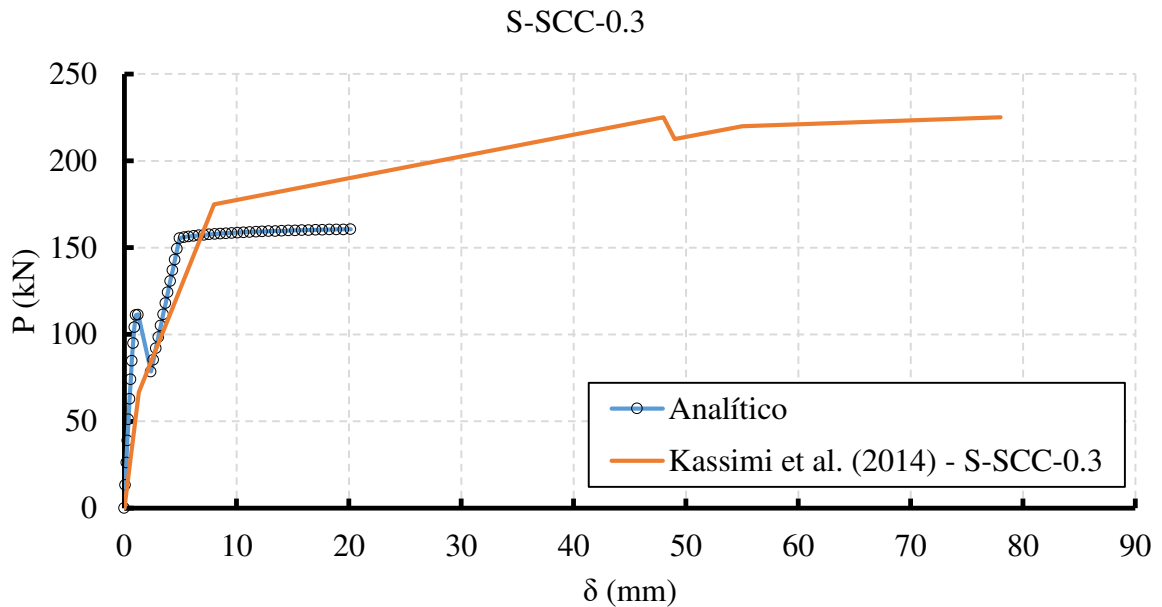
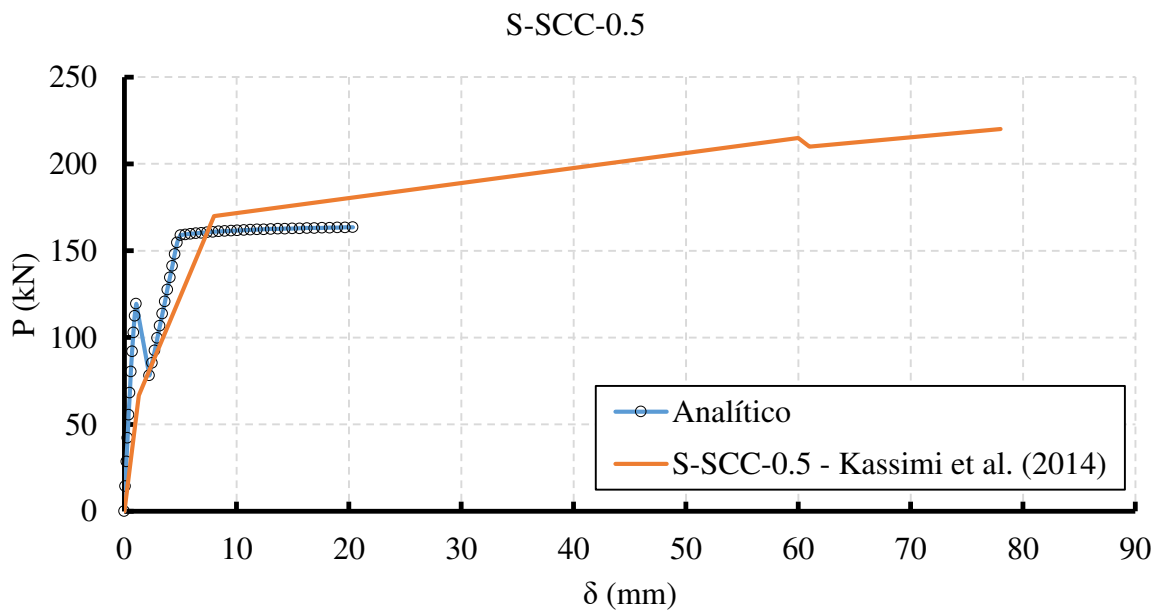


Gráfico 5.15 – Resultados para a viga S-SCC-0.5 de Kassimi



Percebe-se uma discordância da curva analítica com relação aos resultados experimentais. Para ambas, o modelo representa bem a realidade até a força de escoamento e, a partir dela, a curva experimental tende a ganhar um acréscimo de resistência, enquanto que o modelo analítico apresenta um patamar de escoamento bem definido até a ruptura da peça.

As forças notáveis teóricas e experimentais podem ser comparadas por meio da Tabela 5.12.

Tabela 5.12 – Forças notáveis para as vigas de Kassimi

Viga	Pf (kN)			Pu (kN)			Falha exp.	Falha an.
	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
S-SCC-0.3	60,00	85,36	42%	230,00	160,61	30%	2	2
	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
S-SCC-0.5	65,00	120,83	86%	227,00	163,49	28%	2	2
	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		

2: Ruptura no concreto comprimido

Observando-se os resultados gráficos nota-se que as curvas teóricas de ambas as vigas se mostraram um tanto distante das curvas experimentais. A força de fissuração teórica foi obtida definindo-se o ponto em que a deformação da borda tracionada se iguala ao valor de ϵ_{01} , conforme nomenclatura de Lok e Pei (1998) apresentada no item 2.5.1. Dessa forma, é de se esperar que a força de fissuração não seja prevista com sucesso, já que a fissuração do compósito de concreto com fibras não é tão trivial quanto a fissuração do concreto convencional.

Vale salientar que para a viga com 0,3% de volume de fibras, a ruptura se deu em uma força de 230 kN, sendo maior do que os 227 kN de ruptura da viga de 0,5% de fibras. Teoricamente, como ambas as vigas possuem propriedades parecidas para as resistências do concreto e da matriz, deveria ser esperado que a ruptura experimental ocorresse em um valor maior para a viga de 0,5% de fibras e não o contrário. Dessa forma, pode-se supor que haja problemas na leitura da força de ruptura de pelo menos uma das vigas, demonstrando uma incerteza extra nessa comparação.

Apesar dos erros envolvidos, foi possível prever o modo de ruptura das vigas, sendo ocasionado devido à ruptura do concreto comprimido na fibra superior da viga, na região onde o momento é constante. Ou seja, a deformação no concreto comprimido atingiu o valor de 3,5% antes que a armadura tracionada atingisse 10%.

Cabe destacar que esse mesmo autor elaborou um modelo de cálculo para prever a força de ruptura dessas peças, obtendo erros de 32% e 30% respectivamente para as vigas com 0,3 e

0,5 % de fibras. Com isso, pode-se afirmar que tanto o presente modelo de cálculo quanto o modelo desenvolvido pelos autores forneceram os mesmos valores de ruptura, com diferenças muito pequenas.

5.4 VIGA DE CONCRETO ARMADO REABILITADA E REFORÇADA

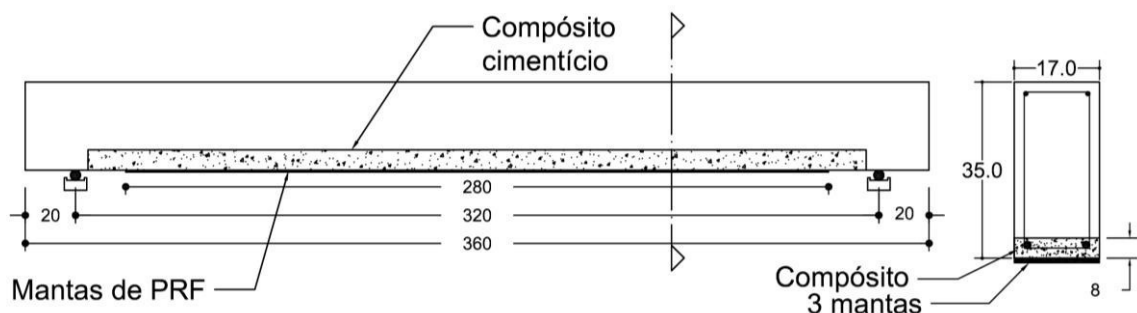
5.4.1 Comparação com resultados de Ferrari

Ferrari (2007) ensaiou vigas que tiveram uma faixa do banzo tracionado removida e substituída por um compósito cimentício de concreto reforçado com fibras de aço híbridas (fibras com dois fatores de forma distintos em volumes pré-definidos). A viga V2C nomeada em seu trabalho como uma viga reabilitada e reforçada com PRFC foi escolhida para a corroboração do presente modelo teórico. Essa viga possui 1% de fibras com fator de forma (L/d) igual a 33 e 2% de fibras com fator de forma igual a 17. Devido à escassez de bibliografia referente à modelagem teórica do comportamento das fibras híbridas, optou-se por simplificar o fator L/d sendo calculado como uma média ponderada em relação às porcentagens de cada fibra. Assim, o fator de forma equivalente para esse caso é dado pela equação (5.1).

$$\left(\frac{L}{d}\right)_{eq} = \frac{(33 \times 1) + (17 \times 2)}{3} = 22,33 \quad (5.1)$$

O esquema da viga V2C pode ser visualizado na Figura 5.4. Vale salientar que as configurações de armadura e esquema de carregamento são as mesmas das vigas V1A e V1C e foram apresentadas no item 5.1.1.

Figura 5.4 – Esquema da viga V2C de Ferrari



Fonte: Adaptado de Ferrari (2007)

Com isso, pode-se resumir todas as propriedades da viga V2C de Ferrari (2007) na Tabela 5.13.

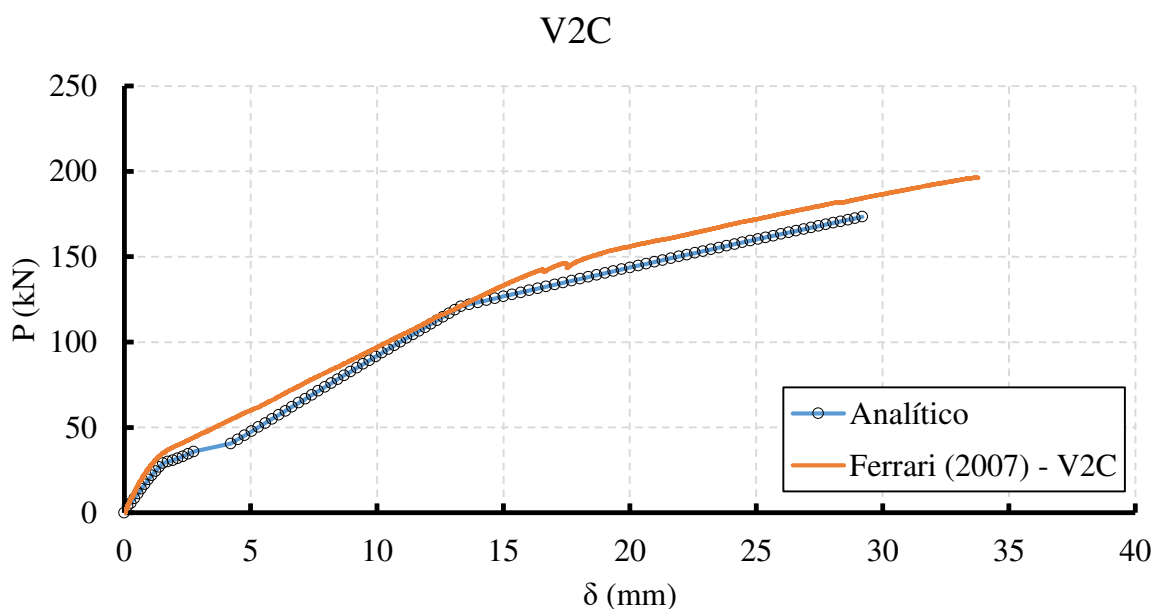
Tabela 5.13 – Propriedades da viga V2C de Ferrari

Seção				Concreto				Aço				
b (mm)	h (mm)	d (mm)	d' (mm)	E_{cs} (MPa)	f_c (MPa)	f_{ct} (MPa)	E_s (MPa)	f_y (MPa)	\square_y (%)	A_s (mm ²)	A'_s (mm ²)	
170	350	317	29	26553	33,95	2,286	199667	532,44	2,67	245,43	62,34	
CRFA												
f_{cu} (MPa)		f_t (MPa)		V_f (%)		L/d		τ_d (MPa)		ϵ_2^{**}	H_r (mm)	
42,76		5,08		3,0		22,33		2,297		0,1	80	
Reforço												
E_r (MPa)		\square_{fu} (%)		F_{fu} (MPa)		t_r (mm)		n. cam.		A_r (mm)		
234000		13,13		3169		0,166		3		84,66		

Fonte: Adaptado de Ferrari (2007)

O Gráfico 5.16 mostra os resultados comparativos entre o modelo teórico e o experimento de Ferrari (2007).

Gráfico 5.16 – Resultados para a viga V2C de Ferrari



Verifica-se que as duas curvas possuem a mesma tendência com as diversas fases de carregamento bem definidas com inclinações aproximadamente iguais. Existe um pequeno desvio entre as curvas que é percebido a partir do momento de fissuração em que o modelo

teórico passa a ser menos rígido. Esse distanciamento e essas diferenças entre as curvaturas teórica e experimental pode ser explicado devido à negligência do efeito *tension-stiffening* visto que aparentemente se mostra de grande importância na determinação de deslocamentos, curvaturas e deformações em um elemento de concreto armado.

As forças notáveis de fissuração, escoamento e ruptura podem ser comparadas por meio da Tabela 5.14.

Tabela 5.14 – Forças notáveis para viga V2C de Ferrari

Pf (kN)			Py (kN)			Pu (kN)			Falha exp.	Falha an.
Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
34,92	35,82	3%	133,37	121,18	9%	196,35	173,00	12%	4	4

4: Descolamento na interface compósito cimentício-reforço

Os erros envolvidos na comparação das forças notáveis são pequenos, sendo de 3% para a fissuração, 9% para o início do escoamento e 12% para a força despendida na ruptura da peça. Verifica-se ainda que o modo de falha ocorre devido ao descolamento na interface entre o compósito cimentício e o reforço, ou seja, não há desprendimento do substrato do compósito cimentício.

Aqui observa-se que, apesar de o critério de ruptura do sistema de reforço ser simples e abordar apenas a falha na interface do compósito com o reforço de PRF, negligenciando o desprendimento do substrato do compósito, ainda assim é adequado para a presente situação. Como o concreto reforçado com fibras de aço possui alto desempenho, a suscetibilidade para que ocorra o desprendimento do substrato é menor em relação ao concreto convencional. Dessa forma é plausível que no modelo seja considerado apenas o critério de descolamento na interface entre compósito e reforço.

5.5 ANÁLISE FINAL

Para uma análise final dos dados, confeccionou-se a Tabela 5.15 em que são apresentadas as forças notáveis de fissuração, escoamento e ruptura das peças. No entanto, como houve uma discrepância muito grande para as duas vigas de Kassimi (vigas reabilitadas com compósito cimentício de concreto com fibras de aço), tais resultados foram

desconsiderados nesta parte. Como a amostragem para esse tipo de viga foi muito pequeno e fora dos padrões das demais vigas analisadas, tais resultados se mostraram não representativos e, assim, justificando a retirada dessas vigas na análise final.

Tabela 5.15 – Resumo de resultados

Viga	Pf (kN)			Py (kN)			Pu (kN)			Falha experimental	Falha analítica
	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)	Exp.	An.	Δ (%)		
V1A	21,01	25,55	22%	79,8	83,63	5%	89,27	85,53	4%	1	1
V1C	25,16	27,93	11%	118,5	119,94	1%	147,37	172,80	17%	3	4
V2C	34,92	35,82	3%	133,4	121,18	9%	196,35	173,00	12%	4	4
VA-R	-	-	-	56,1	63,26	13%	72,60	76,890	6%	1	1
VB-R	-	-	-	29,9	34,93	16%	49,10	50,810	3%	1	1
VA-2	-	-	-	79,9	89,03	11%	112,70	118,20	5%	3	2
VA-3	-	-	-	82,3	85,83	4%	121,30	122,30	1%	3	2
VA-4	-	-	-	89,9	91,26	2%	129,90	129,50	0%	3	2
VA-5	-	-	-	94,9	108,52	14%	135,60	130,90	3%	3	4
VB-2	-	-	-	51,3	49,97	3%	93,00	91,60	2%	3	4
VB-3	-	-	-	63,7	56,92	11%	97,40	100,20	3%	3	4
VB-4	-	-	-	67,1	64,06	5%	103,90	107,10	3%	3	4
VB-5	-	-	-	79,7	84,10	6%	111,10	113,20	2%	3	4

1: Ruptura por deformação excessiva na armadura tracionada

2: Ruptura no concreto comprimido

3: Desprendimento do sistema de reforço

4: Descolamento na interface compósito cimentício-reforço ou concreto - reforço

A média de erros para forças de escoamento é de 8%. Já para a ruptura, esse erro médio cai para 4%. Tais valores são pequenos quando comparados com os resultados obtidos por outros autores na fundamentação teórica do presente trabalho. Esse fato permite afirmar que o modelo obtido aqui é satisfatório para esses resultados. No entanto, o trabalho deve ser continuado de modo a se obter mais resultados experimentais e, com essas comparações, desenvolver um tratamento estatístico a fim de avaliar a real representatividade desse modelo.

6 CONCLUSÃO

Ao longo do desenvolvimento deste trabalho foi elaborado um modelo analítico para descrever o comportamento estrutural de vigas de concreto armado que possuem a seção transversal composta. Isto é, além dos materiais convencionais como o concreto e o aço, na parte inferior da seção, ao longo de uma certa altura (denominada nesta dissertação como H_r) encontra-se um outro material denominado concreto reforçado com fibras de aço (CRFA). Além disso, o modelo também contempla o reforço à flexão utilizando polímeros reforçados com fibras por meio da técnica de colagem externa (EBR). Assim, a seção genérica possui quatro diferentes materiais: concreto, aço, CRFA e PRF, podendo o reforço ser constituído de fibras de carbono, vidro ou aramida, conforme já apresentado no item 2.3.

Os modos de ruína contemplados pelo modelo se baseiam na compressão excessiva do concreto (quando ε_{c0} atinge 3,5‰), deformação excessiva da armadura (quando ε_s atinge 10,0‰) e no descolamento prematuro dado pela ruptura da interface entre o concreto (ou compósito) e o reforço (quando ε_f atinge ε_{fd}). No entanto, sabe-se que a ruína de vigas reforçadas também pode ocorrer devido ao desprendimento do reforço, que consiste no arrancamento da camada de concreto (ou compósito) de cobertura. Esse modo de ruptura foi negligenciado, pois como o objetivo geral do trabalho é a modelagem de vigas reabilitadas e reforçadas, esse arrancamento deve ser considerado no compósito cimentício de CRFA, o que é bastante escasso ou inexistente, conforme pesquisa realizada durante o período do presente trabalho.

Coincidentemente, a viga reabilitada e reforçada (V2C de Ferrari), em seu comportamento experimental, não apresentou arrancamento do compósito de cobertura, mas apenas o destacamento (falha na interface compósito-reforço), permitindo que o modelo se mostrasse adequado para tal situação. Entretanto, os resultados experimentais de vigas reabilitadas e reforçadas com PRF são escassos, não sendo possível realizar uma análise mais aprofundada da real efetividade de representação do modelo teórico.

Por fim, vale salientar que a direção das fibras de aço no CRFA tem bastante influência no resultado final do comportamento da viga reabilitada, uma vez que o modelo matemático considera que 100% das fibras estejam orientadas longitudinalmente em relação ao comprimento da viga. Em contrapartida, na realidade o que ocorre é uma distribuição aleatória dessas fibras que podem ter as mais diversas orientações dentro da massa de concreto gerando uma efetividade reduzida na resistência do concreto com fibras de aço.

No geral o modelo apresenta uma boa aproximação quando comparado com os resultados experimentais de outros autores, principalmente para as forças de ruptura, tanto

quando aplicado a vigas de concreto armado convencional, vigas reforçadas com PRF e vigas reabilitadas e reforçadas. Entretanto o que sempre pode ser observado nas curvas teóricas é um pequeno desvio a partir da força de fissuração, cujo comportamento se apresenta menos rígido em relação às curvas experimentais. Tal desvio pode ser explicado devido à desconsideração do efeito *tension-stiffening* que é a contribuição do concreto na resistência após ocorrência da fissuração.

A seguir são listadas algumas sugestões para trabalhos futuros:

1. Uso do modelo para comparação de um maior número de resultados experimentais e elaboração de um estudo estatístico;
2. Consideração do efeito *tension-stiffening* para o cálculo dos deslocamentos, de modo a estreitar a concordância entre as curvas teóricas e experimentais;
3. Com base em um maior volume de resultados analisados, propor método de dimensionamento de vigas reabilitadas e reforçadas;
4. Uso de modelos de ruína que contemplam o arrancamento do compósito de cobrimento quando solicitado pelo sistema de reforço de PRF;
5. Contemplar também possíveis esforços de compressão que possam surgir na faixa de compósito, de modo a remover a limitação de que o modelo valha apenas para $x \leq H - H_r$. Com isso será possível modelar, também, vigas construídas inteiramente em concreto reforçado com fibras de aço, com armaduras e reforço;
6. Estudo de um fator de redução na resistência do CRFA que considere a efetividade real do teor de fibras, uma vez que o modelo matemático considera que elas estejam 100% orientadas na direção do vão da viga, o que não ocorre na realidade.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMARAL, G. A. G. F.; PADARATZ, I. J. Análise de critérios de projeto para o cisalhamento em vigas de concreto armado reforçadas com polímeros reforçados com fibras de carbono: adequação dos modelos a resultados experimentais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CONCRETO, 55., 2013, Gramado. **Anais...** Gramado: IBRACON, 2013, ISSN 2175-8182.

ARAM, M. R.; CZADERSKI, C.; MOTAVALLI, M. Debonding failure modes of flexural FRP-strengthened RC beams. **Composites Part B: engineering**, 39, p. 826-841, 2008.

ARQUEZ, A. P. **Aplicação de laminado de polímero reforçado com fibras de carbono (PRFC) inserido em substrato de microconcreto com fibras de aço para reforço à flexão de vigas de concreto armado**. 2010. 242f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.

ANDREOLLI, I. Analytical model for assessing of strengthening the flexural beams with T and rectangular section. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v.9, n.1, p. 22-47, 2016.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 15575-1**: Edificações habitacionais – Desempenho Parte 1: Requisitos gerais. Rio de Janeiro, 2013.

_____. **ABNT NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 544.4R**. Guide for the design and construction of externally bonded FRP systems for strengthening concrete structures. Detroit, 2003.

BANDINI, P. A. C. **Consideração da não-linearidade física no cálculo de flecha em vigas de concreto armado**. 2015. 150f. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Unicamp, Campinas, 2015.

BASTO, C.; BARROS, J. A. O., Numeric simulation of sections submitted to bending. **Research program: SmartReinforcement – Carbon fibre laminates for the strengthening and monitoring of reinforced concrete structures**, Guimarães - Portugal, 2008.

BEBER, A. J. **Comportamento estrutural de vigas de concreto armado reforçadas com compósitos de fibra de carbono**. 2003. 289f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2003.

BISCAIA, H. C.; BORBA, I. S.; SILVA, C., CHASTRE; C. A nonlinear analytical model to predict the full-range debonding process of FRP-to-parent material interfaces free of mechanical anchorage devices. **Composite structures**, 138, p. 52-63, 2016.

CASANOVA, P.; ROSSI, P. Analysis of metallic fibre-reinforced concrete beams submitted to bending. **RILEM Materials and Structures**, v. 29, p. 354-361, 1996.

CASANOVA, P.; ROSSI, P. Analysis and design of steel fiber reinforced concrete beams. **ACI Structural Journal**, n. 94-S54, p. 595-602, 1997.

COSTA, H. D.; PEREIRA FILHO, M. J. M.; BARROS, R. N.; OLIVEIRA, D. R. C.; FERREIRA, M. P.; MEDEIROS, A. B. Avaliação de diferentes técnicas de reforço à flexão de vigas de concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CONCRETO, 56., 2014, Natal. **Anais...Natal: IBRACON**, 2014, ISSN 2175-8182.

DUNDAR, C.; TANRIKULU, A., K.; FROSCHE, R., J., Prediction of load-deflection behavior of multi-span FRP and steel reinforced concrete beams. **Composite Structures**, 132, p. 680-693, 2015.

FÉDÉRATION INTERNATIONALE DU BETÓN. **FIB CEB bulletin 14**. Externally bonded FRP reinforcement for RC structures, Lausanne, 2001.

FERRARI, V. J. **Reforço à flexão de vigas de concreto armado com manta de polímero reforçado com fibras de carbono (PRFC) aderido a substrato de transição constituído por compósito cimentício de alto desempenho**. 2007. 310f. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos da USP, São Carlos, 2007.

FIGUEIREDO, A. D. Concreto com fibras de aço. **Boletim técnico – Série BT/PCC/260**, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2000.

GAMINO, A. L. **Modelagem física e computacional de estruturas de concreto reforçadas com CFRP**. 2007. 259f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

GAMINO, A. L.; BITTENCOURT, T. N.; SOUSA, J. L. A. O. R/C structures strengthened with CFRP Part I: analysis of flexural models. **IBRACON Structural Journal**, São Paulo, v. 2, n. 4, p. 326-355, 2009.

GARCEZ, M. R.; SILVA FILHO, L. C. P. Solução numérica para previsão do comportamento de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRF. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, Passo Fundo, v. 5, n. 1, p. 23-39, 2008.

JAPANESE CONCRETE INSTITUTE. **JCI TC952**. Continuous fiber reinforced concrete, Tokyo, 1998.

JOAQUIM, M. C. **Modelo analítico para dimensionamento de reforço à flexão de vigas em concreto armado utilizando compósitos de fibras de carbono**. 2004. 97f. Dissertação (Mestrado) – PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2004.

JUVANDES, L. F. P. **Reforço e reabilitação de estruturas de betão usando materiais compósitos de “CFRP”**. 1999. 395f. Dissertação (Doutorado) – Universidade do Porto Faculdade de Engenharia, Porto, 1999.

KARA, I. F., ASHOUR, A. F. Flexural performance of FRP reinforced concrete beams. **Composite Structures**, n. 94, p. 1616-1625, 2012.

KASSIMI, F., EL-SAYED, A. K., KHAYAT, K. H. Performance of fiber-reinforced self-consolidating concrete for repair of reinforced concrete beams. **ACI Structural Journal**, n. 111-S108, p. 1277-1286, 2014.

LIMA, P. R. L.; FONTES, C. M. A.; LIMA, J. M. F. Análise não-linear da deflexão de vigas de concreto armado. **Sitientibus**, n. 28, p. 91-108, 2003.

LOK, T. S.; PEI, J. S. Flexural behavior of steel fiber reinforced concrete. **ASCE Journal of Materials in Civil Engineering**, n.10, p. 86-97, 1998.

OLIVEIRA, S. L. **Taxa de armadura longitudinal mínima em vigas de concreto de alta resistência com fibras de aço**. 2005. 115f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

PEDERSEN, C. **New production process, materials and calculation techniques for fiber reinforced concrete pipes**. 1996. 128f. PhD (tese) - Department of Structural Engineering and Materials, Technical University of Denmark, Serie R, n. 14, 1996.

PICARD, A.; MASSICOTTE, B.; BOUCHER, E. Strengthening of reinforced concrete beams with composite materials: theoretical study. **Composite Structures**, n. 33, p. 63-75, 1995.

RILEM TC162-TDF. Test and design methods for steel fibre reinforced concrete. Design of steel fibre reinforced concrete using σ -w method: principles applications. **Materials and structures/Matériaux et constructions**, v. 35, p. 262-268, 2002.

SANTOS, A. R. S.; VIEIRA, M. de M.; ALVERNE, A. M. M.; CABRAL, A. E. B.; BEZERRA, L. M.; MONTENEGRO, L. C. S. Determinação da área ótima de fibra de carbono utilizada no reforço à flexão de vigas de concreto armado. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE CONCRETO, 55., 2013, Gramado. **Anais...** Gramado: IBRACON, 2013, ISSN 2175-8182.

SCHIRMBECK, F. R. G. **Diagramas momento-curvatura para elementos estruturais de concreto armado submetidos a carregamento monotônico ou cíclico**. 1988. 83f. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Universidade do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 1988.

SOUZA, V. C. M; RIPPER, T. **Patologia, recuperação e reforço de estruturas de concreto**. 1. Ed. São Paulo: Pini, 1998.

TAKEYA, T. **Análise experimental de estruturas**. São Carlos, EESC-USP, 2010 (notas de aula).

VIEIRA, M. M.; SANTOS, A. R. S.; MONT'ALVERNE, A. M.; BEZERRA, L. M.; MONTENEGRO, L. C. S.; CABRAL, A. E. B. Experimental analysis of reinforced concrete beams strengthened in bending with carbon fiber reinforced polymer. **Revista Ibracon de Estruturas e Materiais**, São Paulo, v.9, n.1, p. 123-152, 2016.

XU, S. L.; YIN, S. P. Analytical theory of flexural behavior of concrete beam reinforced with textile-combined steel. **Sci China Tech Sci**, v. 53, p. 1-12, 2010.

ZAID, R. Z.; NEGHEIMISH, A. I.; SAAWANI, M. A.; SAYED, A. K., Analytical study on RC beams strengthened for flexure with externally bonded FRP reinforcement. **Composites: Part B**, 43, p. 129-141, 2012.