

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL - Mestrado

DOUGLAS FERNANDES DOS SANTOS

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS POR MEIO DAS
FORMULAÇÕES CORROTACIONAL E POSICIONAL DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

MARINGÁ

2021

DOUGLAS FERNANDES DOS SANTOS

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS POR MEIO DAS
FORMULAÇÕES CORROTACIONAL E POSICIONAL DO
MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antônio Farani de Souza

MARINGÁ

2021

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

S237a

Santos, Douglas Fernandes dos

Análise não linear de treliças por meio das formulações corrotacional e posicional do método dos elementos finitos / Douglas Fernandes dos Santos. -- Maringá, PR, 2021. 102 f.: il. color., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2021.

1. Método dos Elementos Finitos. 2. Sistemas estruturais - Treliças - Análise estática. 3. Análise de estruturas - Estabilidade. 4. Equações não lineares. I. Souza, Luiz Antonio Farani de , orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 23.ed. 624.171

DOUGLAS FERNANDES DOS SANTOS

**ANÁLISE NÃO LINEAR DE TRELIÇAS POR MEIO DAS FORMULAÇÕES
CORROTACIONAL E POSICIONAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 31/08/2021. Julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Orientador



Prof. Dr. Carlos Humberto Martins
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Leandro Vanalli
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Rodolfo Krul Tessari
Curso de Engenharia Civil
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Aos meus pais que sempre acreditaram em mim e me apoiaram.

À minha esposa Djessila que também sempre me apoiou em minhas decisões.

À Sophia, que seu futuro seja brilhante e cheio de sonhos realizados.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer primeiramente a Deus pela saúde que tem dado a mim e a minha família e permitido que em uma época tão difícil, a atravessasse sem grandes turbulências. Agradeço-lo pela luz da ciência que tem mantido acesa dentro de mim. Falando em ciência, um agradecimento especial a todos os cientistas e principalmente aos da área da biologia e saúde que trabalharam nesses últimos anos para o bem de toda a população.

Gostaria de agradecer ao meu orientador por toda paciência e dedicação que teve em me apoiar no desenvolvimento desse trabalho.

Gostaria de agradecer a Universidade Estadual de Maringá e aos demais professores do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil e do curso de Engenharia civil por sempre me acolherem e me inspirarem.

Gostaria de agradecer a família que sempre esteve junto comigo, dando o suporte necessário para vencer essa etapa.

E por último, todos os colegas do programa e de profissão, sempre um apoiando o outro para que todos alcançassem seus objetivos.

Em um estado sombrio nós nos encontramos... um pouco mais de “ciência” pode iluminar nosso caminho.

Yoda

RESUMO

O presente trabalho traz as formulações Corrotacional e Posicional do Método dos Elementos Finitos com diversas adaptações encontradas na literatura sobre o assunto como diferentes medidas de deformações, diferentes métodos de solução das equações não lineares do problema estrutural e a técnica de continuação do Comprimento de Arco Linear para analisar estruturas com elementos de treliça sob os efeitos da não linearidade geométrica e física. A não linearidade física do material é caracterizada pelo modelo constitutivo elastoplástico. Os resultados numéricos obtidos através de código computacional implementado no software Matlab mostraram boa concordância com o resultado de outros autores. Além disso, foi possível comparar a eficiência das diferentes formulações e diferentes métodos de solução das equações em exemplos diversos e com isso concluir qual a situação mais vantajosa para cada um dos problemas apresentados. Também foi possível concluir que a elastoplasticidade representou bem a perda de rigidez da estrutura, principalmente quando estudada junto com a não linearidade geométrica.

Palavras chave: Método dos Elementos Finitos; Posicional; Corrotacional; não linearidade.

ABSTRACT

The current work presents the Corotational and Positional Finite Elements Method working together with different strain measures, different solution methods for the nonlinear equations of the structural problems and the linearized Arc-Length path-following technique to analyze truss structures under the effects of geometric and material nonlinearities. The material nonlinear behavior is characterized by an elastoplastic constitutive model. The numerical results obtained with the software Matlab shows a good agrément with the results of authors. Beside that, it was possible to compare the different formulations and solution methods for the nonlinear equations for some examples and with that it was possible to conclude the better combination for each of the problems presented. It was also possible to conclude that the elastoplastic was a good way to represent the stiffness loss phenomenon, mainly when studied together with geometric nonlinearity.

Keywords: Finite Element Method; Positional; Corotational; Nonlinearity.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1– Colapso do telhado da arena de Hartford	15
Figura 1.2 – Colapso de torre de fornecimento de energia em Minas Gerais, 2016	15
Figura 3.1 – Configurações inicial e atual para elemento de treliça 2D	24
Figura 3.2 – Configurações inicial e atual para elemento de treliça 3D	29
Figura 3.3 – Pequeno movimento em relação a configuração atual	31
Figura 3.4 – Tipos de diagramas tensão x deformação para análise não linear física	42
Figura 3.5 – Mudança de Volume da Barra	47
Figura 3.6 – Método de Newton-Raphson	53
Figura 3.7 – Treliça com um grau de liberdade	55
Figura 3.8 – Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio	57
Figura 3.9 – Treliça com dois graus de liberdade	58
Figura 3.10 – Procedimento Incremental-iterativo com o Método de Newton-Raphson	63
Figura 3.11 – Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado	64
Figura 3.12 – Limitações do controle de carga e controle de deslocamento	66
Figura 3.13 – Restrições no Método do Comprimento de Arco	67
Figura 3.14 – Método do Comprimento de Arco Hiperesférico	68
Figura 3.15 – Os componentes residual e tangencial	70
Figura 3.16 – Dois ciclos do método do comprimento de arco	72
Figura 3.17 – O preditor é primeira estimativa de um ciclo	74
Figura 3.18 – Caminho de Equilíbrio para dois graus de liberdade	76
Figura 3.19 – Sentidos positivos e negativos no caminho de equilíbrio	76
Figura 4.1 – Modelo estrutural da barra com 1 grau de liberdade	78
Figura 4.2 – Trajetórias de equilíbrio da barra com um grau de liberdade para as diferentes medidas de deformação	79
Figura 4.3 – Arco treliçado de Crisfield	80
Figura 4.4 – Caminhos de equilíbrio para o Arco treliçado de Crisfield	81
Figura 4.5 – Arco treliçado de Crisfield nas configurações indeformada e deformada (em cada uma das etapas do caminho de equilíbrio)	82
Figura 4.6 – Treliça espacial de 4 barras e cinco nós	84
Figura 4.7 – Caminhos de equilíbrio encontrado do nó central para a treliça espacial para as diferentes medidas de deformação	85
Figura 4.8 – Cúpula treliçada com 168 barras	86
Figura 4.9 – Caminho de equilíbrio (deslocamento vertical do nó 1)	87

Figura 4.10 – Vista isométrica da cúpula em sua configuração indeformada e deformada	87
Figura 4.11 – Vista frontal da cúpula em sua configuração indeformada e deformada	88
Figura 4.12 – Estrutura treliça plana elastoplástica 3 barras e modelo constitutivo elastoplástico do material	89
Figura 4.13 – Caminho de equilíbrio da estrutura de 3 barras com não linearidade física	90
Figura 4.14 – a) Treliça com 2 barras; b) Caminhos de equilíbrio	91
Figura 4.15 – Domo em formato de estrela	92
Figura 4.16 – a) Caminhos de Equilíbrio; b) Posição deformada	93
Figura 4.17 – Treliça espacial de 42 barras	94
Figura 4.18 – a) Caminhos de equilíbrio; b) Posição deformada	94

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Matriz de Rigidez Tangente Corrotacional	51
Tabela 3.2 – Matriz de Rigidez Tangente Posicional	52
Tabela 4.1 – Arco Treçado de Crisfield – Resultados numéricos com os métodos de solução	81
Tabela 4.2 – Treliça espacial – Resultados numéricos com os métodos de solução	85
Tabela 4.3 – Cúpula 168 barras – Resultados numéricos com os métodos de solução	88
Tabela 4.4 – Não linearidade física – Resultados numéricos com os métodos de solução	90
Tabela 4.5 – Domo em formato de estrela – resultados numéricos para análise NLFG	93
Tabela 4.6 – Treliça espacial de 42 barras – resultados numéricos para análise NLFG	94

LISTA DE ABREVIATURAS E SIMBOLOS

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
L_0	Comprimento indeformado
X_1	coordenada X inicial nó 1
X_2	coordenada X inicial nó 2
Y_1	coordenada Y inicial nó 1
Y_2	coordenada Y inicial nó 2
Z_1	coordenada Z inicial nó 1
Z_2	coordenada Z inicial nó 2
v_{x1}	Deslocamento do nó 1 no eixo X
v_{x2}	Deslocamento do nó 2 no eixo X
v_{y1}	Deslocamento do nó 1 no eixo Y
v_{y2}	Deslocamento do nó 2 no eixo Y
v_{z1}	Deslocamento do nó 1 no eixo Z
v_{z2}	Deslocamento do nó 2 no eixo Z
x_1	coordenada X final nó 1
x_2	coordenada X final nó 2
y_1	coordenada Y final nó 1
y_2	coordenada Y final nó 2
z_1	coordenada Z final nó 1
z_2	coordenada Z final nó 2
L	Comprimento deformado
d	Deformação axial elemento treliça 2D
u_l	Deformação axial elemento treliça 3D
ψ	Ângulo atual do sistema de coordenadas local em relação ao global 2D
β	Ângulo atual do sistema de coordenadas local em relação ao global 3D
U	Energia Potencial de Deformação
k	Rigidez da mola
\mathbf{K}	Matriz de rigidez tangente local
E	Módulo de elasticidade do material
A	Área da seção transversal

\mathbf{v}	Vetor deslocamentos globais dos nós
\mathbf{f}_g	Vetor de forças internas globais
N	Força axial de um elemento de treliça
\mathbf{T}	Matriz de transformação
\mathbf{K}_M	Matriz de rigidez do material
\mathbf{K}_G	Matriz de rigidez da geometria
\mathbf{e}	Vetor unitário entre os nós da treliça na configuração inicial
\mathbf{p}	Vetor com deslocamentos globais
\mathbf{q}_i	Vetor de forças globais nodais para o elemento de treliça i
\mathbf{K}_{ti}	Matriz de rigidez tangente transformada e padronizada do elemento de treliça global
$\mathbf{K}_{t\sigma}$	Tensão inicial ou matriz de rigidez geométrica
\mathbf{K}_T	Matriz de rigidez tangente
V	Volume inicial da barra
v	Volume após a mudança de configuração da barra
Π	Energia potencial total
P	Energia potencial das forças externas
\mathbf{f}_i	Força externa aplicada na direção da coordenada x_i
u	Densidade de energia de deformação
ε	Medida de deformação
\mathbf{q}	Vetor de forças internas
\mathbf{g}	Força residual
\mathbf{F}_r	Vetor que caracteriza a direção da força externa
η	Fator de escala para determinar o tamanho do arco (técnica de continuação)
Δl	Comprimento de arco
N_d	Número de iterações desejadas
N_{n-1}	Número de iterações utilizadas para convergir o ciclo anterior
u	deslocamentos

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	15
1.1.	JUSTIFICATIVA	18
1.2.	OBJETIVOS	19
1.2.1	Objetivo geral	19
1.2.2	Objetivos específicos.....	19
2	METODOLOGIA.....	21
3	REVISÃO DA LITERATURA	22
3.1	SISTEMA ESTRUTURAL DO TIPO TRELIÇA	22
3.1.1.	Formulação Corrotacional de Elementos Finitos de treliças Planas e Espaciais.....	23
3.1.2	Formulação Posicional de Elementos Finitos de treliça Planas e Espaciais.....	35
3.2	TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL.....	40
3.2.1.	Análise Linear	40
3.2.2.	Análise não linear geométrica	41
3.2.3.	Análise não linear física	41
3.3	MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO.....	42
3.3.1.	Deformação de Engenharia	42
3.3.2.	Deformação de Green.....	43
3.3.3.	Deformação Logarítmica	45
3.3.4.	Deformação Logarítmica com Mudança de Volume.....	46
3.3.5.	Deformação de Biot	50
3.3.6.	Deformação de Almansi	50
3.3.7.	Matriz de Rigidez Tangente para Diferentes Medidas de Deformação	51
3.4	MÉTODOS DE SOLUÇÃO.....	52
3.4.1	Método de Newton-Raphson Padrão e Modificado.....	53
3.4.2	Método de Potra-Pták	61
3.4.3	Método dos Petkovic e Petkovic	61
3.4.4	Método de Mohit et al.	62
3.4.5	Técnica de Continuação Comprimento de Arco.....	63
4	RESULTADOS E DISCUSSÃO	78
4.1.	BARRA BIARTICULADA COM UM GRAU DE LIBERDADE	78
4.2.	ARCO TRELIÇADO DE CRISFIELD	80
4.3.	TRELIÇA ESPACIAL COM 4 BARRAS	83
4.4.	CÚPULA DE TRELIÇA COM 168 BARRAS.....	85
4.5.	TRELIÇA PLANA ELASTOPLÁSTICA DE 3 BARRAS	88
4.6.	TRELIÇA DE 2 BARRAS	91
4.7.	DOMO EM ESTRELA DE 24 BARRAS	92

4.8. TRELIÇA ESPACIAL COM 42 BARRAS	93
4.9. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	94
5 CONCLUSÃO	97
REFERÊNCIAS	98

1 INTRODUÇÃO

O uso da tecnologia em análise de estruturas tem-se mostrado uma tendência atual, e tem o objetivo de buscar o melhor aproveitamento das mesmas quanto ao seu desempenho, economia e segurança. A compreensão de treliças espaciais sujeitas a grandes deformações elásticas pode prevenir falhas súbitas por flambagem ocasionadas por carregamentos operacionais ou por cargas que surgem durante a fase construtiva. Hrinda (2010) apresenta a figura 1.1 em que é mostrado o colapso do telhado da arena de Hartford ocorrido em 1978 e na figura 1.2, o colapso de torre em treliça espacial para transmissão de energia em Minas Gerais em 2016.

Figura 1.1 - Colapso do telhado da arena de Hartford



Fonte: Hrinda (2010)

Figura 1.2 – Colapso de torre de fornecimento de energia em Minas Gerais, 2016



Fonte: <http://aconteceunovale.com.br/portal/?p=103402>

As treliças espaciais combinam eficiência estrutural e uma significativa redução no custo. No Brasil, o desenvolvimento e a utilização de treliças espaciais teve grande impulso com a construção, na cidade de São Paulo, do Centro de Exposições do Anhembi no final da década de 60. A treliça espacial, projetada pelo engenheiro canadense Cedric Marsh, é composta por cerca de 48000 barras tubulares de alumínio para uma área coberta de 62500 m². Nas décadas seguintes, as estruturas espaciais se multiplicaram no Brasil, com obras de relevante importância e repercussão internacional, como por exemplo: a estrutura da cobertura da Cervejaria Brahma, no Rio de Janeiro, com 132000 m² de área coberta (vãos livres de 30 m e 60 m); e o Pavilhão de Feiras e Exposições de Brasília com 57000 m² de área coberta, montada em apenas 100 dias (SOUZA; GONÇALVES, 2006).

Essa busca em se utilizar estruturas mais esbeltas com maior resistência torna a análise de estabilidade estrutural um assunto de fundamental importância (GRECO *et al.*, 2006). Problemas com não linearidade geométrica e física apresentam em geral pontos críticos ou limites ao longo do caminho de solução. Esses pontos na trajetória de equilíbrio são pontos em que a estrutura perde estabilidade (por exemplo, flambagem) ou ocorre a bifurcação (ou seja, a solução muda para dois ou mais caminhos) (LEON *et al.*, 2011). Assim, estratégias capazes de traçar o caminho completo de equilíbrio não linear devem ser eficientes o suficiente para identificar e ultrapassar esses pontos (REZAIIEE-PAJAND; SALEHI-AHMADABAD; GHALISHOOYAN, 2014).

A pesquisa será focada na análise estática de sistemas estruturais do tipo treliça. Esse sistema é um arranjo estável de barras delgadas interligadas por pinos sem atrito, de forma que nenhum momento possa ser transmitido pela conexão. Desse modo, as treliças caracterizam-se por ser um arranjo de barras que somente transmitem força axial, mas podem estar sujeitas a momento fletor, se submetidas à ação de forças inerciais (LACERDA, 2014).

Já os sistemas estruturais planos do tipo viga e pórtico, diferentemente das treliças, recebem carregamentos transversais que geram esforços internos como forças cortantes e momentos fletores. Esses sistemas apresentam três graus de liberdade por nó - translações vertical e horizontal e rotação no plano.

As treliças espaciais, que são barras reticuladas tridimensionais, são amplamente utilizadas em coberturas de edificações que necessitem grandes áreas livres, tais como ginásios, hangares, centros de exposição e edifícios industriais. Alguns dos fatores que favorecem o uso deste tipo de estrutura em relação às estruturas planas convencionais são:

- grande rigidez, sendo possível a realização de obras de grandes vãos;

- facilidade de fixação de instalações, devido à grande quantidade de nós nos quais podem ser fixados suportes;
- liberdade arquitetônica na locação de apoios;
- beleza arquitetônica, permitindo explorar as mais diversas formas;
- possibilidade de ampliação, e fácil montagem e desmontagem para estruturas não permanentes;
- menor peso e menor custo para grandes vãos (acima de 40 m).

Outros fatores que provocaram um grande desenvolvimento na utilização dessas estruturas foram o desenvolvimento de sistemas padronizados eficientes de conexão, e pesquisas científicas sobre o comportamento elástico e não-elástico das estruturas espaciais e os modos de falha das mesmas quando sujeitas a carregamento excessivo (SOUZA; MALITE, 2005).

Entender os grandes deslocamentos desse tipo de estruturas pode ajudar a prevenir falhas por flambagens repentinas devido a cargas operacionais e de montagem. O ideal é que as estruturas sejam dimensionadas para manter sua integridade mesmo após o início da fase inelástica. Algumas treliças podem colapsar após a falha de uma de suas barras enquanto outras tem o seu colapso progressivo, ou seja, após uma barra ultrapassar o máximo de sua resistência, os esforços se redistribuem de modo a se sustentar ou a sobrecarregar uma próxima barra até que a mesma apresente algum problema estrutural. Esse processo pode ocorrer barra após barra até o colapso total da estrutura treliçada (HRINDA, 2010).

Uma forma simplificada de análise não linear é a análise limite que se preocupa unicamente com a determinação da carga de colapso. Exemplos claros dos métodos de dimensionamento baseados na análise limite são o método das rótulas plásticas, o método das linhas de ruptura e o método escoras-e-tirantes para estruturas de concreto. A análise não linear completa, que inclui as etapas sucessivas, desde a ausência de carga, passando pelo comportamento em serviço e o comportamento não linear, até ao colapso é a forma mais poderosa de cálculo estrutural (LOURENÇO, 1999).

Nesta pesquisa serão realizadas análises estáticas de treliças planas e espaciais com comportamento não linear físico e/ou geométrico, a partir das formulações Corrotacional e Posicional de Elementos Finitos. O sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural será solucionado por meio do método iterativo de Newton-Raphson, Newton-Raphson Modificado (métodos já consagrados em diversas bibliografias) e de Potra-Pták (1984), com ordem de convergência cúbica, associado a técnicas de continuação. Os códigos

computacionais serão desenvolvidos no programa Matlab (MATLAB, 2018) e serão aplicados em problemas de treliças encontrados na literatura.

1.1. JUSTIFICATIVA

Treliças espaciais são amplamente utilizadas em diversas áreas das engenharias civil, naval, petroquímica, aeronáutica e mecânica. Construções, tais como edifícios, pontes, plataformas *offshore* e torres de transmissão de energia são exemplos de possíveis aplicações. Sua larga utilização se deve à grande capacidade de resistência a cargas pelos elementos reticulados e o baixo peso próprio do sistema se comparado a outros sistemas estruturais que exerçam a mesma função.

A análise não linear das estruturas é fundamental para concepção de treliças mais leves e eficientes (menos barras) dentro de padrões de segurança e qualidade, porque quanto mais leves e com menos barras, maiores são as chances de ocorrerem problemas de estabilidade (HRINDA; NGUYEN, 2008). É também de suma importância para o estudo de estruturas próximo ao colapso devido a grandes modificações na geometria da estrutura e à perda de linearidade na relação deformação-tensão. No entanto, tem havido recentemente um aumento significativo de busca por métodos e teorias de análise não lineares motivada pela ação conjunta de fatores como segurança e economia (CODA; GRECO, 2004; GARCIA, 2007).

Devido à crescente procura por análise não linear, é necessária a realização de pesquisas que reflitam mais exatamente os avanços dos métodos nessa área que crescem com o aumento dos recursos computacionais modernos (LACERDA, 2014). É necessário que o engenheiro calculista tenha ferramentas que sejam capazes de realizar uma análise qualitativa e quantitativa do comportamento de estruturas esbeltas, tanto na fase pré-crítica, na qual fenômenos de instabilidade ainda não ocorreram, quanto na fase posterior à perda de estabilidade de equilíbrio, denominada fase pós-crítica.

A implementação em Método dos Elementos Finitos com a formulação posicional e corrotacional foi motivada para expor a diferença entre os métodos em suas formulações e nos seus resultados. Em Oliveira (2017) é desenvolvido um trabalho no âmbito de um tratamento numérico para a análise da carga última de colapso para as treliças. A formação do mecanismo de colapso da estrutura está, geralmente, associada à não convergência da solução do problema não linear próximo a um ponto limite, o que pode ser verdade ou não, uma vez que a solução pode não convergir por diversos outros motivos, como por exemplo, singularização da matriz de rigidez. Com isso, a carga de colapso encontrada na solução pode ser muito diferente da carga real de colapso da estrutura. Motivos como esses justificam a implementação.

Também o presente trabalho vem a aumentar a biblioteca de exemplos de códigos implementados de programas de análise não linear e de exemplos de análises em várias situações, juntando-os aos já consagrados na bibliografia sobre o tema com o intuito de ter mais exemplos para os estudiosos da área e instigar novos pesquisadores à área de estudo.

1.2. OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

O objetivo geral é implementar um código computacional para análise não linear física e geométrica de treliças planas e espaciais, por meio do programa Matlab, utilizando as formulações corrotacional e posicional de Elementos Finitos, diferentes medidas de deformação e métodos de solução de sistemas de equações não lineares.

1.2.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos são:

- Apresentar a revisão bibliográfica acerca da análise não linear de treliças;
- Implementar a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos para treliças planas e espaciais;
- Implementar a formulação corrotacional do Método corrotacional de Elementos Finitos para treliças planas e espaciais;
- Estudar e comparar as diferentes medidas de deformação: Green-Lagrange, Logarítmica, Almansi, Biot e de Engenharia;
- Implementar o método iterativo de Potra-Pták (1984), com ordem de convergência cúbica, para a solução do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural;
- Implementar o método iterativo de Petkovic e Petkovic (2010) para solução do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural;
- Implementar o método iterativo de Mohit et al. (2020) para solução do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural;
- Implementar a técnica de continuação de Comprimento de Arco Linear;
- Implementar algoritmo para a análise não linear física fundamentado na teoria da Elastoplasticidade;

- Obter as trajetórias de equilíbrio com pontos limites de problemas de treliças planas e espaciais encontrados na literatura, com o objetivo de validar o código computacional desenvolvido;
- Comparar computacionalmente os métodos de solução implementados (Newton-Raphson padrão, Newton-Raphson modificado, Potra-Pták, Petkovic e Petkovic e o Mohit et al.) quanto ao número total de passos de carga e iterações acumuladas até a convergência para a solução, o tempo de processamento e a ordem de convergência computacional; e
- Comparar computacionalmente as formulações posicional e corrotacional quanto ao número total de passos de carga e iterações acumuladas até a convergência para a solução e o tempo de processamento.

2 METODOLOGIA

Para cumprir os objetivos propostos, será feita a implementação de um código computacional utilizando o *software* Matlab (MATLAB, 2018), para a simulação de treliças planas e espaciais com comportamento não linear físico e/ou geométrico. O problema estrutural, o qual é descrito por um sistema de equações não lineares, será solucionado pelos métodos iterativos de Newton-Raphson padrão, Newton-Raphson modificado, Potra-Pták, “Dois Pontos” e o Método iterativo de quarta ordem de convergência associados a técnicas de continuação.

A revisão bibliográfica será realizada para situar o leitor acerca dos seguintes assuntos: medidas de deformação, não linearidade física, não linearidade geométrica, tipos de análise, problema estrutural, método posicional de Elementos Finitos, método corrotacional de Elementos Finitos, métodos de solução e técnicas de continuação.

Na sequência, serão apresentados e resolvidos problemas clássicos de treliças planas e espaciais encontrados na literatura por meio do código computacional desenvolvido pelo autor, com o objetivo de validá-lo e testar a sua eficiência.

3 REVISÃO DA LITERATURA

3.1 SISTEMA ESTRUTURAL DO TIPO TRELIÇA

As treliças espaciais são um dos sistemas estruturais mais eficientes e utilizados em projetos na atualidade e, devido a sua grande resistência, podem sustentar consideráveis carregamentos utilizando uma menor quantidade de materiais. Desde o início do seu uso comercial, os sistemas treliçados têm se tornado cada vez mais populares, especialmente em grandes áreas abertas com poucos ou nenhum apoio intermediário (SEÇER, 2009).

A pesquisa será focada na análise do elemento estrutural de treliça. O sistema estrutural treliçado (que usa treliças) é um arranjo estável de barras delgadas interligadas. As barras são conectadas por pinos sem atrito de forma que nenhum momento possa ser transmitido pela conexão. Desse modo, as treliças caracterizam-se por ser um arranjo de barras que somente transmitem força axial, mas podem estar sujeitas a momento fletor, se submetidas à ação de forças inerciais (LACERDA, 2014).

As treliças podem ser classificadas em planas (2D) ou em espaciais (3D). Segundo Souza (2003), as treliças tridimensionais são um caso particular das estruturas reticuladas tridimensionais, sendo formadas por duas ou mais malhas planas, em geral paralelas, conectadas por meio de diagonais e/ou montantes.

Apesar do conceito de ligações sem atrito para as treliças e das análises serem feitas levando isso em consideração, as ligações executadas através de rebites, soldas ou parafusos conferem uma pequena rigidez na ligação, transmitindo força cortante e momento fletor entre as barras. No entanto, Leggerini e Kalil (2010, p. 2) garantem que esse efeito é mínimo: “Estudos realizados demonstram que, desde que todas as barras tenham seus eixos no mesmo plano e que estes eixos se encontrem em um único ponto em cada nó, os resultados reais diferem muito pouco dos resultados obtidos pela teoria [...], sendo ela válida do ponto de vista prático.”

Treliças quando submetidas a grandes cargas apresentam não linearidades geométricas e estas frequentemente contêm certos pontos críticos chamados de *snap-through* (ponto crítico em relação a carga) e *snap-back* (ponto crítico em relação ao deslocamento) que estão relacionados com a instabilidade da estrutura. Obter os pontos críticos e o caminho de equilíbrio dessas treliças requer estratégias numéricas especiais. Uma das estratégias mais utilizadas é o método do comprimento de arco originalmente criado por Riks (1972, 1979) e Wempner (1971).

Quando a estrutura treliçada é carregada, ela se deforma para uma posição diferente da sua configuração original. Durante esse processo acontece com um elemento individual da

treliça (elemento de barra ou elemento de treliça, que transmite apenas esforços axiais) três coisas: o elemento rotaciona, translada e se deforma. Os deslocamentos globais dos nós de um elemento de treliça contêm informações sobre como o elemento rotacionou, trasladou e deformou (YAW, 2009).

A capacidade última de carga de um sistema estrutural de treliça não pode ser simplesmente determinada pela análise linear convencional. Nos últimos anos tem crescido o interesse na qualidade e capacidade de técnicas de análise que considerem tanto a não linearidade física quanto a geométrica para a estimativa da resposta da estrutura até a carga máxima para os estados limites (SEÇER, 2009).

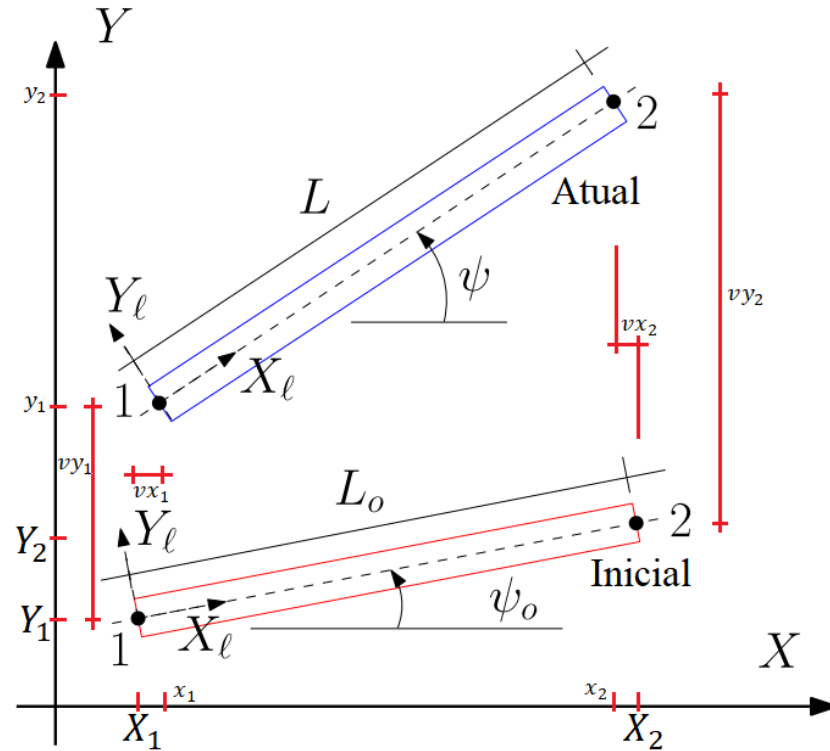
3.1.1. Formulação Corrotacional de Elementos Finitos de treliças Planas e Espaciais

Segundo Yaw (2009), a formulação corrotacional busca separar os movimentos de corpo rígido da deformação local da barra. Isso é feito considerando um novo referencial, um sistema de coordenadas locais para barra, que se rotaciona e translada juntamente com o elemento. Para treliças planas (2D), a origem desse sistema de coordenadas é o ponto inicial do elemento com o eixo X ao longo do eixo do mesmo e o eixo Y perpendicular ao eixo X formando um sistema de coordenadas ortogonais baseado na regra da mão direita. Em relação a esse sistema de coordenadas, a rotação e a translação do elemento é nula, tendo-se apenas deformação dos nós em relação ao eixo X.

Considerando um típico elemento de barra de treliça em sua forma inicial e atual (ou deformada), como mostrado na Figura 3.1, para o elemento na configuração inicial, as coordenadas globais dos nós são (X_1, Y_1) para o nó 1 e (X_2, Y_2) para o nó 2. E o comprimento inicial da barra pode ser calculado por:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (1.1)$$

Figura 3.1 - Configurações inicial e atual para elemento de treliça 2D



Fonte: Adaptado Yaw (2009)

Para o elemento de treliça em sua configuração atual, as coordenadas globais dos nós são $(X_1 + v_{x1}, Y_1 + v_{y1})$ para o nó 1 e $(X_2 + v_{x2}, Y_2 + v_{y2})$ para o nó 2 onde, por exemplo, v_{x1} é o deslocamento global do nó 1 na direção X. O comprimento atual do elemento de treliça é:

$$L = \sqrt{((X_2 + v_{x2}) - (X_1 + v_{x1}))^2 + ((Y_2 + v_{y2}) - (Y_1 + v_{y1}))^2} \quad (1.2)$$

As relações entre variáveis globais e locais são necessárias para calcular a deformação axial local do elemento de treliça. A deformação axial local é usada para calcular as forças internas do elemento de treliça no sistema de coordenadas locais. A deformação axial do elemento de treliça no sistema local de coordenadas, d , é dado por:

$$d = L - L_0 \quad (1.3)$$

Perceba que L e L_0 são calculados em termos de variáveis globais (as coordenadas iniciais e o atual deslocamento dos nós). É necessário achar a relação entre as forças axiais no sistema de coordenadas locais e globais. Porém, tal relação acontece naturalmente quando se procura a matriz de rigidez tangente da estrutura que será mostrado mais à frente nesse trabalho.

O sistema de coordenadas globais permanece fixo durante o desenvolvimento da formulação corrotacional. Entretanto, um sistema de coordenadas locais é colocado em cada elemento da treliça. Esse sistema rotaciona junto com o elemento de treliça conforme o conjunto (sistema estrutural treliçado) se deforma. O ângulo atual do sistema de coordenadas local em relação ao global de um elemento é denotado por ψ . Na formulação para treliças planas é interessante calcular o seno e o cosseno atuais desse ângulo e isso pode ser feito em termos de coordenadas globais, como segue abaixo:

$$\cos \psi = \frac{(X_2 + v_{x2}) - (X_1 + v_{x1})}{L}, \sin \psi = \frac{(Y_2 + v_{y2}) - (Y_1 + v_{y1})}{L} \quad (1.4)$$

Para acharmos agora a matriz de rigidez tangente, retomaremos que a energia potencial, U , de um elemento de mola é escrito por:

$$U(d) = \frac{1}{2} k d^2 \quad (1.5)$$

Nesse caso d é o deslocamento axial da mola (ou do elemento de treliça) e k é a rigidez da mola (ou do elemento de treliça). Para o caso de elementos de treliça a rigidez pode ser escrita como EA/L_0 , onde A é a área da seção transversal e E é o módulo de elasticidade do material. Seguindo, definimos um vetor de deslocamentos globais dos nós para um elemento típico de treliça como:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{x2} \\ v_{y2} \end{Bmatrix} \quad (1.6)$$

O vetor de forças internas \mathbf{f}_g global é encontrado tomando a derivada da energia potencial em relação ao vetor deslocamento global dos nós como segue:

$$\mathbf{f}_g = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{v}} = kd \begin{bmatrix} \frac{\partial d}{\partial v_{x1}} \\ \frac{\partial d}{\partial v_{y1}} \\ \frac{\partial d}{\partial v_{x2}} \\ \frac{\partial d}{\partial v_{y2}} \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Definindo agora a força axial em um elemento de treliça como:

$$N = kd = \frac{AE}{L_0} d \quad (1.8)$$

Para acharmos as derivadas parciais, observamos o exemplo abaixo.

$$\frac{\partial d}{\partial v_{x1}} = \frac{\partial(L - L_0)}{\partial v_{x1}} = \frac{\partial L}{\partial v_{x1}} \quad (1.9)$$

Então, usando a equação (1.2), podemos mostrar que:

$$\frac{\partial L}{\partial v_{x1}} = -\cos \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial v_{y1}} = -\sin \psi \quad (1.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial v_{x2}} = \cos \psi, \quad \frac{\partial L}{\partial v_{y2}} = \sin \psi \quad (1.11)$$

Sendo assim, podemos usar essas expressões em (1.7) como:

$$\mathbf{f}_g = N \begin{bmatrix} -\cos \psi \\ -\sin \psi \\ \cos \psi \\ \sin \psi \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Essa última relação expressa as componentes globais da força em um elemento de treliça em função das forças internas locais, N . Essa é uma relação importante para a construção do vetor de forças internas no sistema de coordenadas globais. Na formulação tradicional para

elementos de treliça, a relação entre as forças globais e locais é em alguns casos escrita como (YAW, 2009b):

$$\mathbf{f}_g = \mathbf{T}^T \mathbf{f} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix}^T \begin{pmatrix} -N \\ 0 \\ N \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.13)$$

onde o resultado é idêntico a (1.12) e \mathbf{T} é a matriz de transformação tradicional.

A rigidez tangente é encontrada tomando a segunda derivada da energia potencial em relação ao vetor de deslocamento nodais globais, como segue:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{v}^2} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{v}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left(kd \frac{\partial d}{\partial \mathbf{v}} \right) = k \frac{\partial d}{\partial \mathbf{v}} \left(\frac{\partial d}{\partial \mathbf{v}} \right)^T + kd \frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{v}^2} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (1.14)$$

A matriz de rigidez tangente é composta por dois termos, a rigidez do material, \mathbf{K}_M , e a rigidez da geometria, \mathbf{K}_G . Fazendo substituição na expressão da rigidez do material, temos:

$$\mathbf{K}_M = \frac{AE}{L_0} \begin{bmatrix} -c \\ -s \\ c \\ s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -c & -s & c & s \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

onde o vetor coluna e o vetor linha são multiplicados entre si como o produto de um tensor que resulta em na expressão padrão de rigidez global de um elemento típico de treliça:

$$\mathbf{K}_M = \frac{AE}{L_0} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (1.16)$$

Onde \mathbf{T} é a matriz de transformação padrão mostrada anteriormente e \mathbf{K} é a matriz de rigidez tangente local dada por:

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.17)$$

Para acharmos a matriz de rigidez geométrica precisamos determinar a segunda derivada de d em relação a \mathbf{v} . Notando que:

$$\frac{\partial^2 d}{\partial \mathbf{v}^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{v}^2} \quad (1.18)$$

Então, podemos mostrar que:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial v_{x1}^2} = \frac{s^2}{L}, \frac{\partial^2 L}{\partial v_{y1}^2} = \frac{c^2}{L}, \frac{\partial^2 L}{\partial v_{x1} \partial v_{y1}} = \frac{-cs}{L}, \quad \text{etc.} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \quad (1.20)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \left(\frac{N}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{T} \quad (1.21)$$

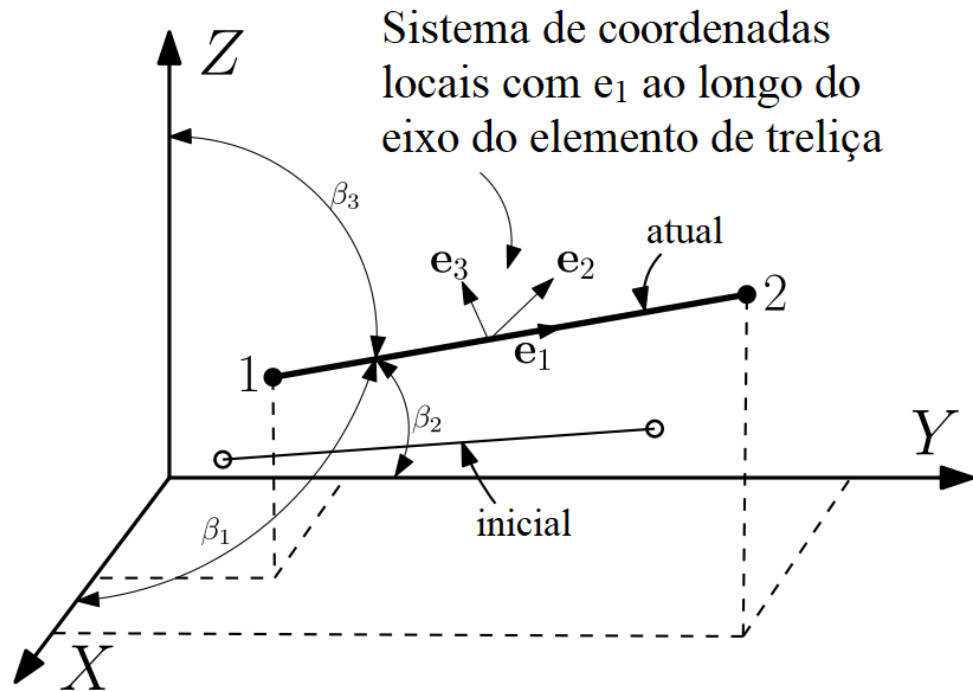
A expressão da matriz entre parênteses acontece por considerarmos pequenas deformações. Considerando o efeito geométrico de grandes deformações a matriz de rigidez geométrica tradicional obtida é:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \left(\frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \mathbf{T} = \frac{N}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Com a expressão final, observa-se que a matriz de rigidez geométrica não varia com a rotação, ou seja, ela é idêntica para coordenadas globais e para coordenadas locais.

Será apresentado agora a formulação corrotacional para elementos tridimensionais (elementos no espaço) seguindo o trabalho de Yaw (2011). Para tal, observemos a figura 3.2, que descreve um elemento de treliça no espaço.

Figura 3.2 - Configurações inicial e atual para elemento de treliça 3D



Fonte: Adaptado de Yaw (2011)

Similar à formulação já expressa para elementos em duas dimensões, para o elemento na configuração inicial, as coordenadas globais dos nós são (X_1, Y_1, Z_1) para o nó 1 e (X_2, Y_2, Z_2) para o nó 2. E o comprimento inicial da barra pode ser calculado por:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2} \quad (1.23)$$

Para o elemento de treliça em sua configuração atual, as coordenadas globais dos nós são $(X_1 + v_{x1}, Y_1 + v_{y1}, Z_1 + v_{z1})$ para o nó 1 e $(X_2 + v_{x2}, Y_2 + v_{y2}, Z_2 + v_{z2})$ para o nó 2 onde, por exemplo, v_{x1} é o deslocamento global do nó 1 na direção X. O comprimento atual do elemento de treliça é:

$$L = \sqrt{L_1^2 + L_2^2 + L_3^2} \quad (1.24)$$

Onde $L_1 = (X_2 + v_{x2}) - (X_1 + v_{x1})$, $L_2 = (Y_2 + v_{y2}) - (Y_1 + v_{y1})$ e $L_3 = (Z_2 + v_{z2}) - (Z_1 + v_{z1})$. Note que L_1, L_2 e L_3 são simplesmente a distância entre os nós 1 e 2 do elemento de treliça nas direções globais X, Y e Z, respectivamente.

Relações entre as deformações locais e globais são necessárias para calcular a deformação axial do elemento de treliça. A deformação axial é necessária para se calcular as forças internas em coordenadas locais. A deformação axial de um elemento de treliça tridimensional será chamada de u_l e será calculada por:

$$u_l = L - L_0 = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0} \quad (1.25)$$

Onde a última parte tem uma condição computacionalmente melhor já que a diferença entre L e L_0 , possivelmente será pequena. Note que L e L_0 são calculados em termos de variáveis globais. No caso de elementos de treliças essas relações, que permitem a extração da deformação local, são relativamente simples. Entretanto, no caso de vigas, cascas e sólidos, a relação não é necessariamente tão simples. Também é necessário encontrar relações entre as forças axiais locais e globais. Tais relações aparecem naturalmente no processo para encontrar a matriz de rigidez tangente.

O eixo x do sistema de coordenadas local é descrito pelos ângulos que o elemento de treliça faz na configuração atual com os eixos das coordenadas globais. Os ângulos β_1, β_2 e β_3 , da treliça na sua configuração atual, conforme figura 3.2, são definidos por:

$$\cos \beta_1 = \frac{L_1}{L}, \cos \beta_2 = \frac{L_2}{L}, \cos \beta_3 = \frac{L_3}{L} \quad (1.26)$$

Para encontrar a matriz de rigidez tangente consistente de variação é necessário primeiro encontrar a relação de variação entre os deslocamentos locais e globais e em um outro momento a relação entre as forças axiais locais e globais. Essas duas relações são necessárias para que se consiga derivar a matriz de rigidez tangente consistente de variação.

Considerando um pequeno movimento $\delta \mathbf{d}_{21} = \delta \mathbf{d}_2 - \delta \mathbf{d}_1$ da configuração atual mostrada na figura 3.3, onde:

$$\mathbf{d}_1 = \begin{Bmatrix} v_{x1} \\ v_{y1} \\ v_{z1} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{d}_2 = \begin{Bmatrix} v_{x2} \\ v_{y2} \\ v_{z2} \end{Bmatrix} \quad (1.27)$$

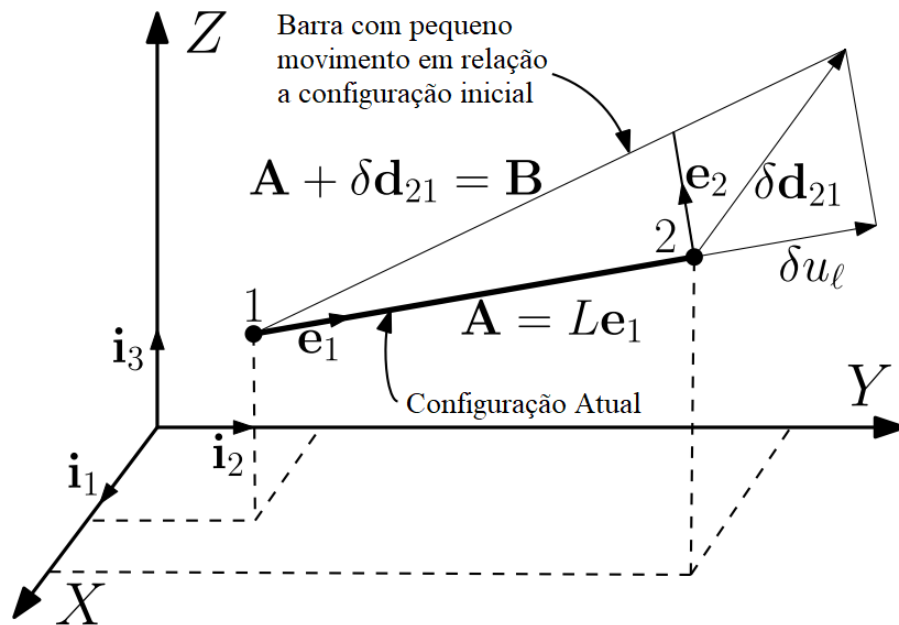
Usando o produto escalar, encontramos as componentes de $\delta \mathbf{d}_{21}$ ao longo da direção \mathbf{e}_1 . Que é:

$$\delta u_l = \mathbf{e}_1^T \delta \mathbf{d}_{21} = \begin{Bmatrix} \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 \end{Bmatrix}^T \delta \mathbf{d}_{21} \quad (1.28)$$

Onde \mathbf{e}_1 é o vetor unitário ao longo da linha desenhada entre os nós da treliça na configuração inicial. Escrevendo $c_1 = \cos \beta_1$; $c_2 = \cos \beta_2$; $c_3 = \cos \beta_3$. A equação 1.28 pode ser reescrita como:

$$\delta u_l = \begin{Bmatrix} \cos \beta_1 \\ \cos \beta_2 \\ \cos \beta_3 \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \delta v_{x2} - \delta v_{x1} \\ \delta v_{y2} - \delta v_{y1} \\ \delta v_{z2} - \delta v_{z1} \end{Bmatrix} = -c_1 \delta v_{x1} + c_1 \delta v_{x2} - c_2 \delta v_{y1} + c_2 \delta v_{y2} - c_3 \delta v_{z1} + c_3 \delta v_{z2} \quad (1.29)$$

Figura 3.3 – Pequeno movimento em relação a configuração atual



Fonte: Adaptado de Yaw (2011)

$$= -c_1 \delta v_{x1} - c_2 \delta v_{y1} - c_3 \delta v_{z1} + c_1 \delta v_{x2} + c_2 \delta v_{y2} + c_3 \delta v_{z2} \quad (1.30)$$

$$= (-c_1, -c_2, -c_3, c_1, c_2, c_3) \delta \mathbf{p} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} \quad (1.31)$$

O vetor \mathbf{p} contém os deslocamentos globais, ordenados de maneira padrão como:

$$\mathbf{p}^T = (v_{x1}, v_{y1}, v_{z1}, v_{x2}, v_{y2}, v_{z2}) \quad (1.32)$$

Onde, a variação da deformação local que produz deslocamentos é:

$$\delta p_l = \delta u_l = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} \quad (1.33)$$

Usando o equivalente ao princípio dos trabalhos virtuais no sistema de coordenadas locais e globais e usando a equação 1.33, segue:

$$\delta \mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_i = N_i \delta u_l = \delta p_{lv}^T q_{li} = (\mathbf{r}^T \delta \mathbf{p}_v)^T q_{li} = \delta \mathbf{p}_v^T \mathbf{r} q_{li} \quad (1.34)$$

onde o subscrito v denota quantidades virtuais, o subscrito l denota quantidades locais e \mathbf{q}_i é vetor de forças globais nodais para o elemento de treliça i , As forças nodais globais, \mathbf{q}_i , são ordenadas como o vetor de deslocamentos globais \mathbf{p} . Tomando $\delta \mathbf{p}_v$ como arbitrário na equação 1.34:

$$\mathbf{q}_i = q_{li} \mathbf{r} \quad (1.35)$$

Onde $q_{li} = N_i = \left(\frac{AE}{L_0}\right) u_l$.

Tomando a variação de 1.35:

$$\delta \mathbf{q}_i = \delta q_{li} \mathbf{r} + q_{li} \delta \mathbf{r} = \mathbf{K}_{tl} \delta \mathbf{p} + \mathbf{K}_{t\sigma} \delta \mathbf{p} \quad (1.36)$$

Onde \mathbf{K}_{tl} é a matriz de rigidez tangente transformada e padronizada do elemento de treliça global e $\mathbf{K}_{t\sigma}$ é a tensão inicial ou matriz de rigidez geométrica.

Diferenciando q_{li} chega-se em:

$$\delta q_{li} = \delta N_i = \delta \left(\frac{AE}{L_0} u_l \right) = \frac{AE}{L_0} \delta u_l = \frac{AE}{L_0} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} \quad (1.37)$$

Substituindo (1.37) na primeira parte de (1.36):

$$\delta \mathbf{q}_{li} \mathbf{r} = \left(\frac{AE}{L_0} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} \right) \mathbf{r} = \frac{AE}{L_0} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{p} \quad (1.38)$$

Agora, comparando (1.38) com (1.36) é demonstra-se que:

$$\mathbf{K}_{tl} = \frac{AE}{L_0} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \quad (1.39)$$

Onde $\mathbf{r} \mathbf{r}^T$ é um produto tensorial que pode ser denotado por $\mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$. Isso é equivalente a dizer que $\mathbf{r} \mathbf{r}^T$ é uma matriz quadrada com termos $a_{ij} = r_i r_j$.

A rigidez geométrica vem do segundo termo da primeira parte de (1.36). Tomando a variação de \mathbf{r} :

$$\delta \mathbf{r} = (-\delta c_1, -\delta c_2, -\delta c_3, \delta c_1, \delta c_2, \delta c_3)^T \quad (1.40)$$

Para determinar $\delta c_1, \delta c_2, \delta c_3$, considerando a figura 3.3, observe que:

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \delta \mathbf{d}_{21} \quad e \quad \mathbf{A} = L \mathbf{e}_1 \quad (1.41)$$

Vetores unitários nas direções de \mathbf{A} e \mathbf{B} são:

$$\mathbf{u}_A = \frac{A_1}{|\mathbf{A}|} \mathbf{i}_1 + \frac{A_2}{|\mathbf{A}|} \mathbf{i}_2 + \frac{A_3}{|\mathbf{A}|} \mathbf{i}_3 \quad e \quad \mathbf{u}_B = \frac{B_1}{|\mathbf{B}|} \mathbf{i}_1 + \frac{B_2}{|\mathbf{B}|} \mathbf{i}_2 + \frac{B_3}{|\mathbf{B}|} \mathbf{i}_3 \quad (1.42)$$

Observemos que as componentes do vetor unitário são os cossenos dos ângulos da direção dos respectivos vetores \mathbf{A} e \mathbf{B} . Observemos também que para mudança infinitesimal $\delta \mathbf{d}_{21}$ de \mathbf{A} para \mathbf{B} as relações para o comprimento são $|\mathbf{A}| \approx |\mathbf{B}| = L$. Além de que, durante a pequena mudança do vetor \mathbf{A} para o vetor \mathbf{B} a primeira componente de \mathbf{u}_A se altera para a primeira componente de \mathbf{u}_B . Essa mudança é a variação no coseno em c_1 , que é:

$$\delta c_1 = \frac{B_1}{L} - \frac{A_1}{L} = \frac{A_1 + \delta v_{x2} - \delta v_{x1}}{L} - \frac{A_1}{L} = \frac{\delta v_{x2} - \delta v_{x1}}{L} \quad (1.43)$$

A última expressão pode ser expressa na forma alternativa:

$$\delta c_1 = \frac{1}{L} [-1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0] \begin{Bmatrix} \delta v_{x1} \\ \delta v_{y1} \\ \delta v_{z1} \\ \delta v_{x2} \\ \delta v_{y2} \\ \delta v_{z2} \end{Bmatrix} \quad (1.44)$$

De modo similar:

$$\delta c_2 = \frac{\delta v_{y2} - \delta v_{y1}}{L} \quad (1.45)$$

$$\delta c_3 = \frac{\delta v_{z2} - \delta v_{z1}}{L} \quad (1.46)$$

Os resultados de (1.45) e (1.46) podem ser escritos na forma de (1.44) de modo que a substituição em (1.40) resulta:

$$\delta \mathbf{r} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta v_{x1} \\ \delta v_{y1} \\ \delta v_{z1} \\ \delta v_{x2} \\ \delta v_{y2} \\ \delta v_{z2} \end{Bmatrix} \quad (1.47)$$

Com isso, o segundo termo da primeira parte de (1.36) se torna:

$$q_{li}\delta\mathbf{r} = \frac{q_{li}}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta v_{x1} \\ \delta v_{y1} \\ \delta v_{z1} \\ \delta v_{x2} \\ \delta v_{y2} \\ \delta v_{z2} \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_{t\sigma} \delta\mathbf{p} \quad (1.48)$$

Onde $\mathbf{K}_{t\sigma}$ é a matriz de rigidez geométrica. Finalmente, usando (1.36), a matriz de rigidez tangente consistente de variação é:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{tl} + \mathbf{K}_{t\sigma} \quad (1.49)$$

3.1.2 Formulação Posicional de Elementos Finitos de treliça Planas e Espaciais

O elemento de treliça mostrado na figura 3.1. As coordenadas (X_1, Y_1) e (X_2, Y_2) representam a configuração inicial do elemento de barra (também conhecido como coordenadas de referência). Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça, a barra passa a ter novas coordenadas (x_1, y_1) e (x_2, y_2) . O comprimento inicial (ou referencial) e o comprimento atual da barra são, respectivamente:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (1.50)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (1.51)$$

No Método dos elementos finitos, é útil reunir as novas coordenadas em um vetor dado por:

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T \quad (1.52)$$

Onde os “x” no vetor são as coordenadas como segue abaixo:

$$x_1 = x_1; x_2 = y_1; x_3 = x_2; x_4 = y_2 \quad (1.53)$$

A barra tem área de seção A na configuração inicial e área de seção a após a mudança de configuração. Então:

$$V = AL_0 \quad (1.54)$$

$$v = aL \quad (1.55)$$

onde V e v são o volume da configuração inicial e o volume após a mudança de configuração da barra, respectivamente.

A energia potencial total tem a forma:

$$\Pi = U - P \quad (1.56)$$

onde U é a energia de deformação e P é a energia potencial das forças externas aplicadas, sendo dada por:

$$P = \sum f_i x_i = \mathbf{f}^T \mathbf{x} \quad (1.57)$$

tal que f_i é a força externa aplicada na direção da coordenada x_i . A energia de deformação é dada por:

$$U = \int u \, dV \quad (1.58)$$

em que u é a densidade de energia de deformação. Considerando um material isotrópico, homogêneo e elástico, então, de acordo com a lei de Hooke, tem-se:

$$u = \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \quad (1.59)$$

onde E é o módulo de elasticidade e ε é uma medida de deformação. Então, tem-se:

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon^2 \, dV = \frac{1}{2} E A L \varepsilon^2 \quad (1.60)$$

O princípio da energia potencial mínima declara que a configuração equilibrada corresponde a um valor mínimo da energia potencial total. Em outras palavras, a configuração equilibrada é obtida requerendo que todas derivadas parciais em relação as coordenadas x_i se anulem:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x_i} - f_i = 0, \quad \text{para } i = 1, \dots, 4 \quad (1.61)$$

E escrevendo na forma matricial, tem-se:

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{q} - \mathbf{f} = 0 \quad (1.62)$$

onde:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.63)$$

é o vetor de forças internas.

A expressão (1.62) representa o sistema equações de equilíbrio. Este sistema é não linear e pode ser resolvido pelo método de Newton-Raphson.

Para ser tornar adequado ao método de Newton-Raphson, o sistema (1.62) é reescrito da seguinte forma:

$$\mathbf{g} = \mathbf{q} - \mathbf{f} = 0 \quad (1.64)$$

em que \mathbf{g} é o vetor de forças residuais. Desta forma, o método de Newton-Raphson é dado pela seguinte fórmula iterativa:

$$\Delta \mathbf{x}_i = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \quad (1.65)$$

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \Delta \mathbf{x}_i \quad (1.66)$$

Onde \mathbf{K}_t é a matriz de rigidez tangente.

No desenvolvimento da formulação, algumas expressões como o gradiente do comprimento da barra serão úteis. Primeiramente será obtido a fórmula do gradiente do comprimento da barra ao quadrado porque elimina a raiz quadrada, ou seja:

$$\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \quad (1.67)$$

Então:

$$\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{d} \quad (1.68)$$

Em que:

$$\mathbf{d} = [x_1 - x_2, y_1 - y_2, x_2 - x_1, y_2 - y_1]^T \quad (1.69)$$

Para calcular o gradiente do comprimento da barra, considere a seguinte relação:

$$\frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} = 2L \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.70)$$

Então:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{2L} \frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.71)$$

Logo:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L} \mathbf{d} \quad (1.72)$$

Agora, obteremos a formulação utilizando a deformação de engenharia:

$$\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (1.73)$$

Determinando o gradiente de deformação de engenharia:

$$\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{L - L_0}{L_0} \right] = \frac{1}{L_0} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.74)$$

Aplicando 1.72, obtém-se:

$$\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L_0 L} \mathbf{d} \quad (1.75)$$

Substituindo a deformação em (1.60), obtém-se a energia de deformação:

$$U = \int_V \frac{1}{2} E \varepsilon_E^2 dV = \frac{1}{2} E A L_0 \varepsilon_E^2 \quad (1.76)$$

Então o vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{E A L_0}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_E^2}{\partial \mathbf{x}} = E A L_0 \varepsilon_E \cdot \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} \quad (1.77)$$

Aplicando (1.75), obtém-se:

$$\mathbf{q} = \frac{E A \varepsilon_E}{L} \mathbf{d} \quad (1.78)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{E A \varepsilon_E}{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E A \mathbf{d} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\varepsilon_E}{L} \right] \quad (1.79)$$

Aplicando a regra do quociente do cálculo, obtém-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{E A \varepsilon_E}{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E A \mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} L - \varepsilon_E \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}}{L^2} \right) \quad (1.80)$$

Aplicando (1.75) e (1.72), obtém-se

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA\varepsilon_E}{L} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EA \mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{1}{L_0 L} L \mathbf{d} - \frac{L - L_0}{L_0} \cdot \frac{1}{L} \mathbf{d}}{L^2} \right) = \frac{EA\varepsilon_E}{L} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EA}{L^3} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (1.81)$$

Então tem-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_E}{L} \mathbf{C} \quad (1.82)$$

onde $\sigma_E = E\varepsilon_E$ é a tensão normal na barra. Na expressão (1.82), a matriz de rigidez tangente está decomposta em duas matrizes. A primeira representa a contribuição devida à geometria da estrutura. Nota-se que esta contribuição é não linear. A segunda matriz é a matriz de tensão inicial.

3.2 TIPOS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

Nos itens abaixo será feita breve explanação sobre os tipos de análises realizadas nos estudos sobre estruturas.

3.2.1. Análise Linear

Análise linear de estruturas é quando o deslocamento de um ponto apresenta uma relação linear de proporcionalidade ao carregamento aplicado na estrutura. Análise linear é válida em regime elástico e regime de pequenos deslocamentos e pequenas deformações.

Em alguns casos, os projetos de estruturas ainda são desenvolvidos considerando a geometria da estrutura perfeita e utilizando a análise elástica linear. As equações de equilíbrio são formuladas baseando-se na configuração inicial indeformada da estrutura e assume-se que as deformações, deslocamentos e rotações são pequenas. Uma desvantagem da análise elástica linear consiste em sua incapacidade de retratar o comportamento real de estruturas sob condições não usuais de carregamento ou de carregamento limite. No entanto, face o aumento de esbeltes, as estruturas podem apresentar comportamento não linear relevante antes mesmo de atingirem seus limites de resistência (SILVA, 2016).

3.2.2. Análise não linear geométrica

Para estruturas esbeltas, é necessário levar em conta os deslocamentos causados pelos esforços gerados após a aplicação do carregamento pois os mesmos podem influenciar de modo significativo no equilíbrio final da estrutura. Quanto maior o deslocamento, maior será a influência. Levando em consideração grandes deslocamentos, a análise linear não é adequada, fazendo-se necessária uma análise mais aprofundada da estrutura onde é considerada a posição deslocada da estrutura, a saber, análise não linear geométrica (OLIVEIRA et al. 2017).

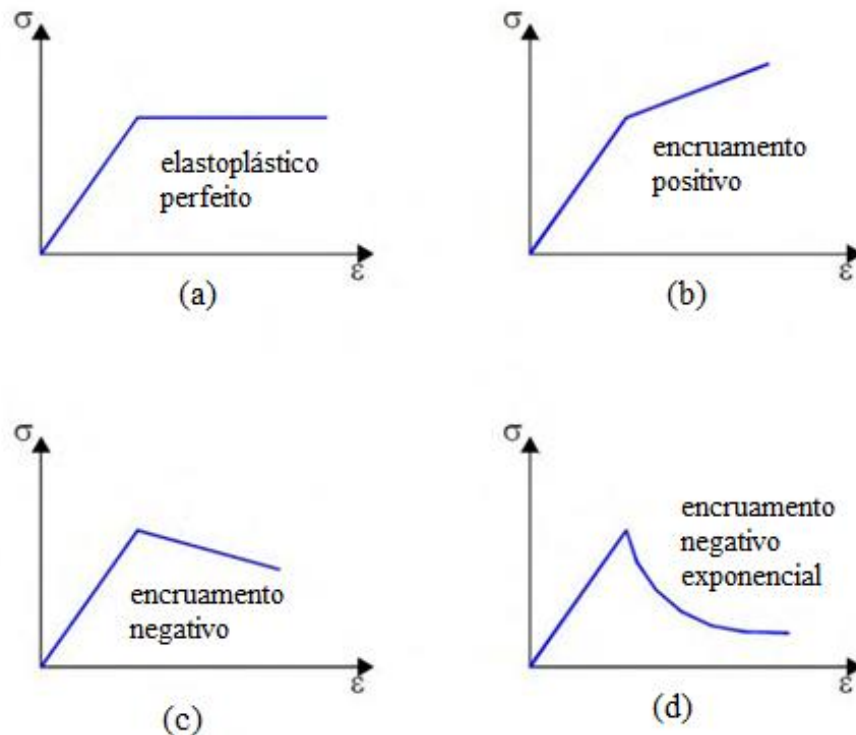
Uma maneira simplista de se explicar análise não linear geométrica é imaginarmos uma estrutura sendo carregada por etapas e, a cada etapa, a cada incremento de carga, até a carga final de projeto, essa estrutura sofre um deslocamento de seus nós ou rotação nos mesmos até que, ao se aplicar a carga total da estrutura, a geometria dela já é diferente da geometria inicial.

De acordo com Trinh e Jun (2021) em uma análise não linear geométrica, deve ser feito um carregamento incremental e iterativo na estrutura para que se tenha uma melhor compreensão das suas deformações.

3.2.3. Análise não linear física

A não linearidade física está diretamente associada ao comportamento mecânico dos materiais constituintes da estrutura. Em algumas situações, pode existir uma degradação da resistência do material, que passa a não apresentar comportamento elástico linear (não segue a lei de Hooke). Esse comportamento pode ser representado no aço, quando o mesmo atinge uma tensão de escoamento e passa a ter um comportamento elastoplástico (perfeito ou com encruamento) e ser representado no concreto pelo aparecimento de fissuras e o comportamento da mecânica do dano. Assim, a perda da capacidade resistente da estrutura durante a análise deve ser considerada de forma que, a partir de certo valor do carregamento aplicado, alguns elementos ou partes que a compõem perdem a capacidade de recuperar a sua forma inicial quando descarregados, acumulando deformações permanentes chamadas deformações plásticas (LACERDA, 2014; SILVA, 2016). Gaur e Srivastav (2021) apontam que essas deformações podem ser de grandes proporções e esse efeito deve ser levado em conta quando a estrutura está sendo analisada.

Figura 3.4 – Tipos de diagramas tensão x deformação para análise não linear física



a) elastoplástico perfeito; b) encruamento positivo linear; c) encruamento negativo linear; d) encruamento negativo exponencial. Fonte: Adaptado de Rodrigues (2011)

3.3 MEDIDAS DE DEFORMAÇÃO

No presente capítulo, será apresentado como se chega ao vetor de forças internas e as matrizes de rigidez utilizando-se diversas medidas diferentes de deformação.

Menin (2006) apresenta a formulação e o desenvolvimento para se chegar ao vetor de forças internas e as matrizes de rigidez, considerando a formulação corrotacional, para as deformações de Engenharia, Green-Lagrange, Biot e Almansi. Já Lacerda (2014) apresenta também o vetor de força e as matrizes de rigidez, porem considerando a formulação posicional de elementos finitos, para as deformações de Engenharia, Green-Lagrange e Logarítmica, essa última considerando ou não, a mudança de volume dos elementos.

3.3.1. Deformação de Engenharia

Para a deformação de engenharia, já foi mostrado na seção 3.1.2. como encontrar o vetor de forças internas e as matrizes de rigidez. Abaixo, apenas retomam-se as equações já expostas naquele item.

$$\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0} \quad (3.1)$$

O vetor de forças internas é dado por

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{EAL_0}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_E^2}{\partial \mathbf{x}} = EAL_0 \varepsilon_E \cdot \frac{\partial \varepsilon_E}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.2)$$

A Matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA\varepsilon_E}{L} \cdot \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EAd \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\varepsilon_E}{L} \right] \quad (3.3)$$

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_E}{L} \mathbf{C} \quad (3.4)$$

3.3.2. Deformação de Green

Nesta seção, serão desenvolvidas expressões para o vetor de forças internas e a matriz de rigidez tangente do elemento de treliça usando a deformação de Green:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \quad (3.5)$$

Começaremos determinando a expressão do gradiente da deformação de Green que será usado no desenvolvimento da formulação.

$$\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} \right] = \frac{1}{2L_0^2} \frac{\partial L^2}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.6)$$

Aplicando (1.68), obtém-se

$$\frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L_0^2} \mathbf{d} \quad (3.7)$$

Substituindo a deformação de Green em (1.60), obtém-se a energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} EAL\varepsilon_G^2 \quad (3.8)$$

Então o vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{EAL_0}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_G^2}{\partial \mathbf{x}} = EAL_0 \varepsilon_G \cdot \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.9)$$

Aplicando (3.7), obtém-se:

$$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{d} \quad (3.10)$$

A Matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0} \varepsilon_G \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EA}{L_0} \mathbf{d} \otimes \frac{\partial \varepsilon_G}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.11)$$

Aplicando (3.7), obtém-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0} \varepsilon_G \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (3.12)$$

Então tem-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_G}{L_0} \mathbf{C} \quad (3.13)$$

Onde σ_G é a tensão na barra e

$$\mathbf{B} = \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{c} = \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Na expressão (3.13), a matriz de rigidez tangente está decomposta em duas matrizes. A primeira representa a contribuição devida à geometria da estrutura. A segunda matriz é chamada de matriz de tensão inicial.

3.3.3. Deformação Logarítmica

A deformação Logarítmica é dada por:

$$\varepsilon_L = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad (3.16)$$

Começaremos determinando a expressão do gradiente da deformação Logarítmica:

$$\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \right] = \frac{1}{L} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.17)$$

Aplicando (1.68), obtém-se

$$\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{L^2} \mathbf{d} \quad (3.18)$$

Substituindo a deformação Logarítmica em (1.60), obtém-se a energia de deformação:

$$U = \frac{1}{2} EAL\varepsilon_L^2 \quad (3.19)$$

Então o vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{q} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} = \frac{EAL_0}{2} \cdot \frac{\partial \varepsilon_L^2}{\partial \mathbf{x}} = EAL_0\varepsilon_L \cdot \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} \quad (3.20)$$

Aplicando (3.7), obtém-se:

$$\mathbf{q} = \frac{EAL_0\varepsilon_L}{L^2} \mathbf{d} \quad (3.21)$$

A Matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^2} \varepsilon_L \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EAL_0 \mathbf{d} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{\varepsilon_L}{L^2} \right] \quad (3.22)$$

Aplicando (3.18) e (1.68), obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_t &= \frac{EAL_0\varepsilon_L}{L^2} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + EAL_0 \mathbf{d} \otimes \left(\frac{\frac{1}{L^2} \mathbf{d}L^2 - \varepsilon_L 2\mathbf{d}}{L^4} \right) \\ &= \frac{EAL_0\varepsilon_L}{L^2} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EAL_0}{L^4} (1 - 2\varepsilon_L) \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \end{aligned} \quad (3.23)$$

Então tem-se:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EAL_0}{L^4} (1 - 2\varepsilon_L) \mathbf{B} + \frac{AL_0\sigma_L}{L^2} \mathbf{C} \quad (3.24)$$

Onde $\sigma_L = E\varepsilon_L$ é a tensão na barra.

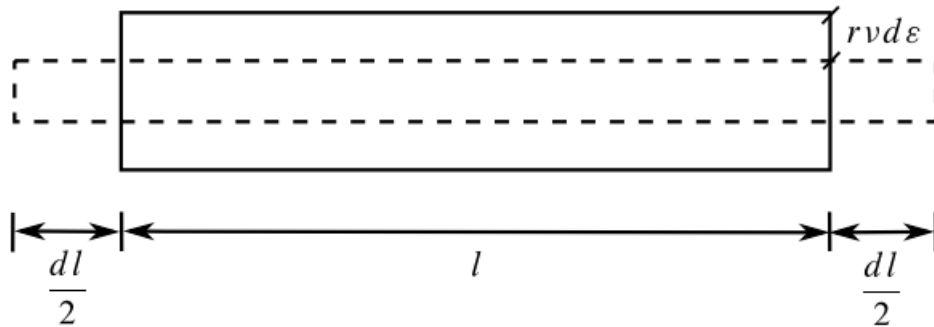
3.3.4. Deformação Logarítmica com Mudança de Volume

A deformação logarítmica é adequada para grandes deformações. Nestes casos, dever-se-ia considerar também a mudança de volume causado pelo efeito do coeficiente de Poisson. A Figura 3.5 mostra uma barra de raio r que muda de volume após a deformação. Após uma deformação infinitesimal $d\varepsilon = dL/L$, a nova área da barra é $a + da$.

Usando o coeficiente de Poisson é possível determinar esta nova área que é dada por:

$$a + da = a(1 - \nu d\varepsilon)^2 = a[1 - 2\nu d\varepsilon + \nu^2 d\varepsilon^2] \quad (3.25)$$

Figura 3.5 - Mudança de Volume da Barra



Fonte: Adaptado de Lacerda, 2014

Desprezando os termos de alta ordem, tem-se

$$a + da = a(1 - 2vd\epsilon) \quad (3.26)$$

$$da = -2avd\epsilon \quad (3.27)$$

A equação diferencial separável (3.27) pode ser resolvida da seguinte forma:

$$\int_A^a \frac{da}{a} = - \int_{L_0}^L 2vd\epsilon = -2v \int_{L_0}^L \frac{dL}{L} \quad (3.28)$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{a}{A}\right) = -2v \ln\left(\frac{L}{L_0}\right) \quad (3.29)$$

Então,

$$\frac{a}{A} = \left(\frac{L}{L_0}\right)^{2v} \quad (3.30)$$

Aplicando a deformação logarítmica na equação dos trabalhos virtuais, tem-se

$$\int \sigma_L \delta \varepsilon_L dv - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} = 0 \quad (3.31)$$

$$\int \sigma_L \left(\frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \delta \mathbf{x} dv - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} = 0 \quad (3.32)$$

$$\delta \mathbf{x}^T \int \sigma_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} dv - \delta \mathbf{x}^T \mathbf{f} = 0 \quad (3.33)$$

$$\int \sigma_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} dv - \mathbf{f} = 0 \quad (3.34)$$

$$\mathbf{q} - \mathbf{f} = 0 \quad (3.35)$$

Onde,

$$\mathbf{q} = \int \sigma_L \frac{\partial \varepsilon_L}{\partial \mathbf{x}} dv \quad (3.36)$$

É o vetor de forças internas.

Aplicando (3.18), tem-se

$$\mathbf{q} = \int \sigma_L \frac{1}{L^2} \mathbf{d} dv = E \varepsilon_L \frac{1}{L^2} \mathbf{d} \int dv = \frac{E \nu \varepsilon_L}{L^2} \mathbf{d} \quad (3.37)$$

Então,

$$\mathbf{q} = \frac{E a \varepsilon_L}{L} \mathbf{d} \quad (3.38)$$

Aplicando (3.30), tem-se

$$\mathbf{q} = \left(\frac{L_0}{L}\right)^{2\nu+1} \frac{EA\varepsilon_L}{L_0} \mathbf{d} \quad (3.39)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{EA\varepsilon_L}{L} \mathbf{d} \right] = E \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{a\varepsilon_L}{L} \mathbf{d} \right] \quad (3.40)$$

$$= \frac{Ea\varepsilon_L}{L} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + E \mathbf{d} \otimes \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left[\frac{a\varepsilon_L}{L} \right] \quad (3.41)$$

Desenvolvendo conforme já foi feito para, por exemplo, a deformação logarítmica em 3.3.3.

$$\mathbf{K}_t = \frac{Ea\varepsilon_L}{L} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{EA}{L^3} [1 - (1 + 2\nu)\varepsilon_L] \mathbf{d} \otimes \mathbf{d} \mathbf{B} + \frac{\sigma_L a}{L} \mathbf{C} \quad (3.42)$$

Então, tem-se

$$\mathbf{K}_T = \frac{Ea}{L^3} [1 - (1 + 2\nu)\varepsilon_L] \mathbf{B} + \frac{\sigma_L a}{L} \mathbf{C} \quad (3.43)$$

Ou

$$\mathbf{K}_T = \frac{EAL_0^{2\nu}}{L^{2\nu+3}} [1 - (1 + 2\nu)\varepsilon_L] \mathbf{B} + \frac{\sigma_L AL_0^{2\nu}}{L^{2\nu+1}} \mathbf{C} \quad (3.44)$$

Onde $\sigma_L = E\varepsilon_L$ é a tensão na barra.

Quando $\nu = 0,5$, o volume é incompressível e a fórmula (3.44) torna-se igual a fórmula (3.24).

3.3.5. Deformação de Biot

A deformação de Biot é dada por:

$$\varepsilon_B = \frac{L - L_0}{L} \quad (3.45)$$

Segundo Menin (2006), o vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_B L_0}{L} \quad (3.46)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \left(\frac{3L_0^2 - 2L_0L}{L^2} \right) + \frac{\sigma_B A L_0}{L} \quad (3.47)$$

onde $\sigma_B = E\varepsilon_B$ é a tensão na barra.

3.3.6. Deformação de Almansi

A deformação de Almansi é dada por:

$$\varepsilon_A = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2} \quad (3.48)$$

De acordo com Menin (2006), o vetor de forças internas é dado por:

$$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_A L_0^2}{L^2} \quad (3.49)$$

A matriz de rigidez tangente é dada por:

$$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \left(\frac{5L_0^4 - 3L_0^2 L^2}{2L^4} \right) + \frac{\sigma_A A L_0^2}{L^2} \quad (3.50)$$

3.3.7. Matriz de Rigidez Tangente para Diferentes Medidas de Deformação

A Tabela 3.1 resume as fórmulas obtidas para diferentes medidas de deformação usando a formulação corrotacional (MENIN, 2006). A tabela mostra as quatro matrizes de rigidez tangente que foram obtidas neste capítulo.

Tabela 3.1 - Matriz de Rigidez Tangente Corrotacional

Deformação	Força Interna (Corrotacional)	Matriz de rigidez tangente (Corrotacional)
Engenharia $\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0}$	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_E}{L} \mathbf{u}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_E}{L} \mathbf{C}$
Green $\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{u}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_G}{L_0} \mathbf{C}$
Biot $\varepsilon_B = \frac{L - L_0}{L}$	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_B L_0}{L} \mathbf{u}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \left(\frac{3L_0^2 - 2L_0L}{L^2} \right) + \frac{\sigma_B A L_0}{L}$
Almansi $\varepsilon_A = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2}$	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_A L_0^2}{L^2} \mathbf{u}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L} \left(\frac{5L_0^4 - 3L_0^2 L^2}{2L^4} \right) + \frac{\sigma_A A L_0^2}{L^2}$

A Tabela 3.2 resume as fórmulas obtidas para diferentes medidas de deformação usando a formulação posicional (LACERDA, 2014).

Tabela 3.2 - Matriz de Rigidez Tangente Posicional

Deformação	Força Interna (Posicional)	Matriz de rigidez tangente (Posicional)
Engenharia $\varepsilon_E = \frac{L - L_0}{L_0}$	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_E}{L} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_E}{L} \mathbf{C}$
Green $\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}$	$\mathbf{q} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EA}{L_0^3} \mathbf{B} + \frac{A\sigma_G}{L_0} \mathbf{C}$
Logarítmica $\varepsilon_L = \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$	$\mathbf{q} = \frac{EAL_0\varepsilon_L}{L^2} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EAL_0}{L^4} (1 - 2\varepsilon_L) \mathbf{B} + \frac{AL_0\sigma_L}{L^2} \mathbf{C}$
Logarítmica (com mudança de volume) $\varepsilon_L = 2\nu \ln\left(\frac{L}{L_0}\right)$	$\mathbf{q} = \left(\frac{L_0}{L}\right)^{2\nu+1} \frac{EA\varepsilon_L}{L_0} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = \frac{EAL_0^{2\nu}}{L^{2\nu+3}} [1 - (1 + 2\nu)\varepsilon_L] \mathbf{B} + \frac{\sigma_L AL_0^{2\nu}}{L^{2\nu+1}} \mathbf{C}$
Biot $\varepsilon_B = \frac{L - L_0}{L}$	$\mathbf{q} = \frac{EAL_0\varepsilon_B}{L^2} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = L_0 EA \left(\frac{L_0}{L^5} - \frac{2\varepsilon_B}{L^4} \right) \mathbf{B} + \frac{L_0 A \sigma_B}{L^2} \mathbf{C}$
Almansi $\varepsilon_A = \frac{L^2 - L_0^2}{2L^2}$	$\mathbf{q} = \frac{EAL_0^2\varepsilon_A}{L^3} \mathbf{d}$	$\mathbf{K}_t = L_0^2 EA \left(\frac{L_0^2}{L^7} - \frac{3\varepsilon_A}{L^5} \right) \mathbf{B} + \frac{L_0^2 A \sigma_A}{L^3} \mathbf{C}$

3.4 MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Metodologias eficientes de solução de sistemas não lineares devem ser capazes de percorrer todo o caminho de equilíbrio do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos (pontos-limites de carga e de deslocamento e/ou pontos de bifurcação) que possam existir (LEON et al., 2011; PINHEIRO, 2004; SOUZA, 2017).

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrita por (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014):

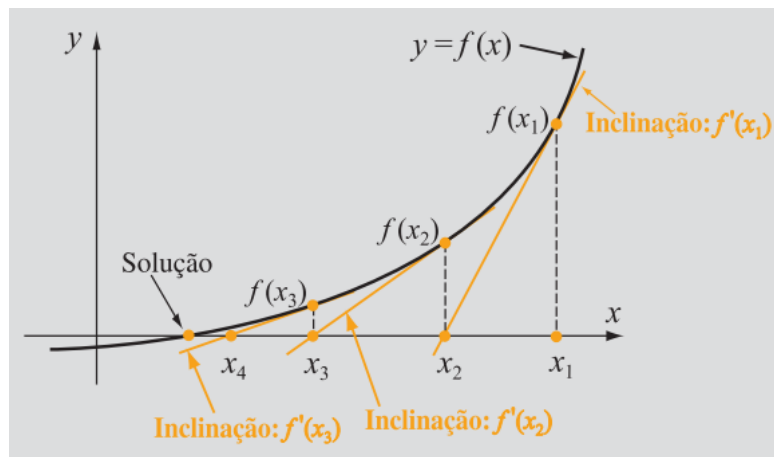
$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int} = 0 \quad (4.1)$$

Na qual \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas ou forças residuais, \mathbf{F}_r é o vetor de referência que caracteriza a direção da força externa, λ é o parâmetro de força e \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas.

3.4.1 Método de Newton-Raphson Padrão e Modificado

O método de Newton-Raphson (também chamado de método de Newton, porém não o mesmo usado em otimização) é um esquema usado para se obter a solução numérica de uma equação na forma $f(x) = 0$, onde $f(x)$ é contínua e diferenciável e sua equação possui uma solução próxima a um ponto dado (GILAT; SUBRAMANIAM, 2008). A Figura 3.6 ilustra a solução pelo método:

Figura 3.6 - Método de Newton-Raphson



Fonte:(GILAT; SUBRAMANIAM, 2008)

O processo de solução começa com a escolha do ponto x_1 como a primeira estimativa da solução. A segunda estimativa, x_2 , é obtida a partir do cruzamento com o eixo x da reta tangente a $f(x)$ no ponto $(x_1, f(x_1))$. A estimativa seguinte, x_3 , é a interseção com o eixo x da reta tangente a $f(x)$ no ponto $(x_2, f(x_2))$, e assim por diante. Matematicamente, na primeira iteração, a inclinação $f'(x_1)$ da tangente no ponto $(x_1, f(x_1))$ é dada por:

$$f'(x_1) = \frac{f(x_1) - 0}{x_1 - x_2} \quad (4.2)$$

Resolvendo (4.2) para x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (4.3)$$

A equação (4.3) pode ser generalizada para que a “próxima” solução x_{i+1} seja obtida a partir da solução atual:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (4.4)$$

A equação (4.4) é a fórmula iterativa geral do método de Newton-Raphson. Ela é chamada de fórmula iterativa porque a solução é obtida com a aplicação repetida da equação (4.4) em cada valor sucessivo de i .

O método de Newton também pode ser deduzido a partir da série de Taylor. A expansão em série de Taylor de $f(x)$ em torno de x_1 é dada por:

$$f(x) = f(x_1) + (x - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x - x_1)^2 f''(x_1) + \dots \quad (4.5)$$

Se x_2 é uma solução da equação $f(x) = 0$ e x_1 é um ponto próximo a x_2 , então:

$$f(x_2) = 0 = f(x_1) + (x_2 - x_1)f'(x_1) + \frac{1}{2!}(x_2 - x_1)^2 f''(x_1) + \dots \quad (4.6)$$

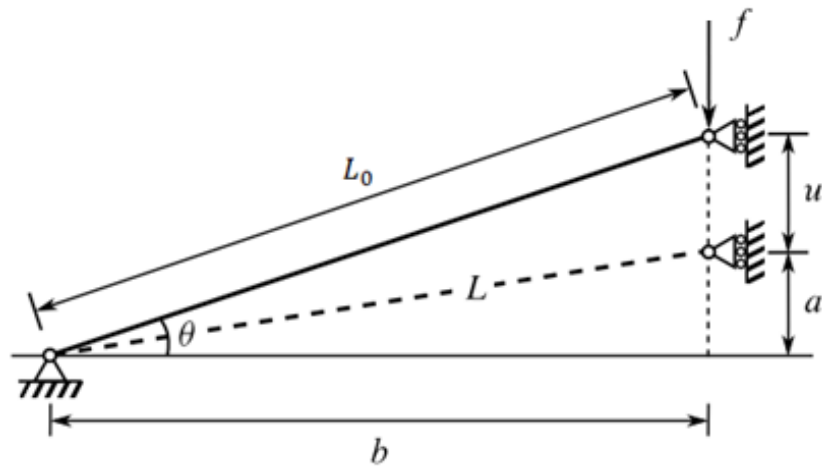
Considerando apenas os dois primeiros termos da série, uma solução aproximada pode ser determinada resolvendo a (4.4) para x_2 :

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad (4.7)$$

O resultado é o mesmo dado pela (4.4). Na iteração seguinte, a expansão em série de Taylor é escrita em torno do ponto x_2 , e uma solução aproximada x_3 é calculada. A fórmula geral é igual àquela dada pela (4.4).

Na sequência, usaremos o exemplo clássico da barra de treliça de (CRISFIELD, 1991) para aplicação e exemplificação prática do método, apresentada na Figura 3.7 a seguir:

Figura 3.7 - Treliça com um grau de liberdade



Fonte: Adaptado de Lacerda, (2014)

A barra tem módulo de elasticidade E e área de seção transversal A . A equação de equilíbrio vertical é dada por:

$$q(u) - f = 0 \quad (4.8)$$

Onde q é a força interna na barra e f é a força externa. Neste exemplo, $q = N \sin \theta$ sendo N a força axial na barra. Assume-se aqui que θ é pequeno. Portanto, tem-se:

$$q(u) = N \sin \theta = \frac{N(a + u)}{L_0} \approx \frac{N(a + u)}{L} \quad (4.9)$$

O método Newton-Raphson é utilizado aqui para encontrar a raiz da função:

$$g(u) = q(u) - f = 0 \quad (4.10)$$

Aplicando a equação (4.4) para a função $g(u)$ obtém-se:

$$u_{i+1} = u_i - K_t^{-1} g(u_i) \quad (4.11)$$

Onde,

$$K_t = g'(u_i) = \frac{d}{du} [q(u) - f] = \frac{dq(u)}{du} \quad (4.12)$$

Pois $\frac{df}{du} = 0$ uma vez que f é uma constante.

Na mecânica computacional, K_t é chamado de tangente de rigidez e $g(u_i)$ é chamado de força residual ou força de desequilíbrio (do inglês, *out-of-balance force*). Contudo, é importante distinguir a tangente de rigidez do método de Newton-Raphson com a tangente de rigidez que está sobre o caminho de equilíbrio pois esta tem uma importante interpretação física relacionada com a estabilidade da estrutura. Já a primeira pode não ter relação com o estado de equilíbrio até antes do método convergir, podendo tornar-se positiva, negativa ou zero durante o processo de convergência, sem que isto tenha relação alguma com a estabilidade da estrutura.

Frequentemente, a Equação (4.11) é apresentada desdobrada em duas:

$$\Delta u_i = -K_t^{-1} g(u_i) \quad (4.13)$$

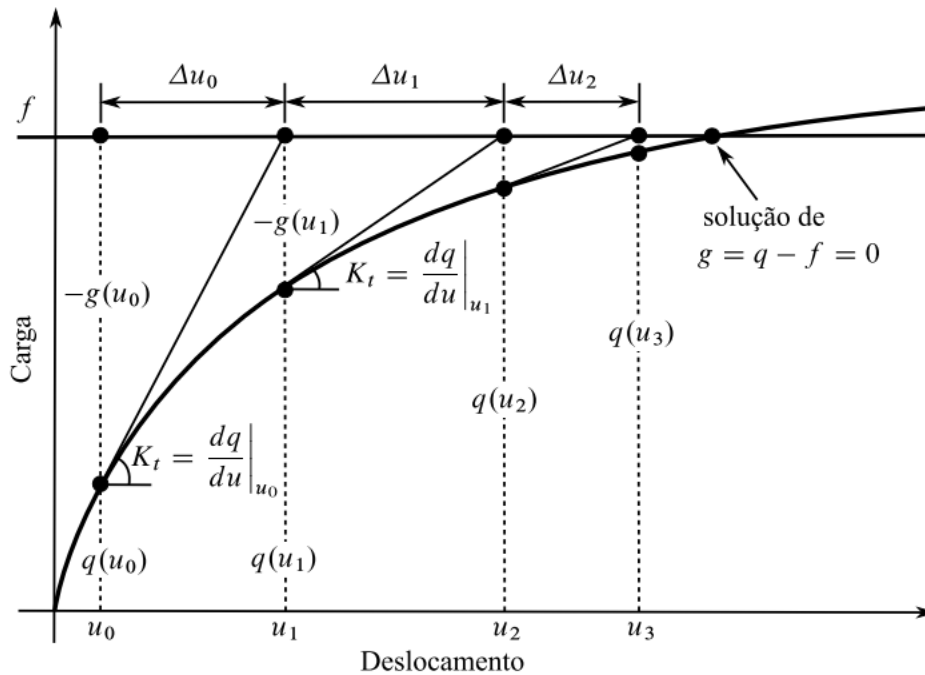
$$u_{i+1} = u_i + \Delta u_i \quad (4.14)$$

A Figura 3.8 a seguir mostra o método de Newton-Raphson de uma forma diferente, mas equivalente, da que foi apresentada na Figura 3.6. A Figura 3.8 mostra o processo de convergência para a interseção da curva $q(u)$ com uma reta horizontal de altura f . Começando com uma estimativa inicial u_0 , obtêm-se uma nova estimativa

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + \Delta u_0, & \text{onde } \Delta u_0 &= -K_t^{-1} g(u_0) \\ u_2 &= u_1 + \Delta u_1, & \text{onde } \Delta u_1 &= -K_t^{-1} g(u_1) \\ u_3 &= u_2 + \Delta u_2, & \text{onde } \Delta u_2 &= -K_t^{-1} g(u_2) \end{aligned}$$

E assim por diante.

Figura 3.8 – Método de Newton-Raphson resolvendo a equação de equilíbrio



Fonte: Lacerda (2014)

Segundo Gilat e Subramanian (2008), é necessário definir algum tipo de critério de parada para que as iterações se interrompam próxima da solução real. Os autores apresentam dois critérios comumente usados. O primeiro é o erro relativo estimado: as iterações param quando o erro relativo é menor do que um valor de tolerância (tol) pré-determinado:

$$\left| \frac{u_{i+1} - u_i}{u_i} \right| = \left| \frac{\Delta u_i}{u_i} \right| \leq tol \quad (4.15)$$

O segundo é a tolerância em $g(u_i)$ que, quando seu valor absoluto for menor de que o valor da tolerância (tol) pré-determinado, as iterações param:

$$|g(u_i)| \leq tol \quad (4.16)$$

Na sequência, será determinado para o problema proposto por Crisfield (1991) e exposto acima, a tangente de rigidez. Considerando que a força axial na barra é $N = EA\varepsilon$, então a tangente de rigidez, equação (4.9), é:

$$K_t = \frac{dq}{du} = EA \frac{d\varepsilon}{du} \left(\frac{a+u}{L} \right) + \frac{N}{L} \quad (4.17)$$

Adotando a deformação de Green, equação (3.5), tem-se:

$$\varepsilon = \frac{L_0^2 - L^2}{2L^2} = \frac{(a+u)^2 + b^2 - (a^2 + b^2)}{2L^2} = \left(\frac{a}{L}\right)\left(\frac{u}{L}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{L}\right)^2 \quad (4.18)$$

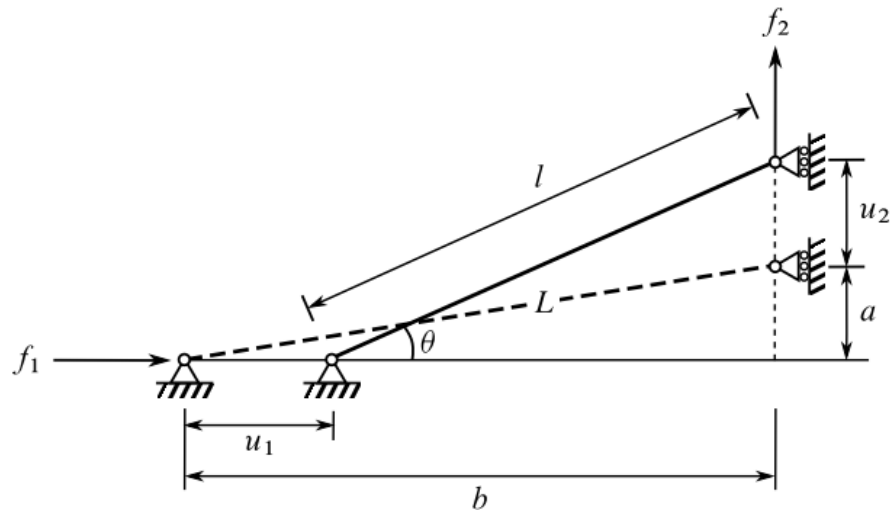
E substituindo $\frac{d\varepsilon}{du}$ em (4.17) obtém-se

$$K_t = \frac{EA}{L} \left(\frac{a}{L}\right)^2 + \frac{EA}{L} \left(\frac{2au + u^2}{L^2}\right) + \frac{N}{L} \quad (4.19)$$

Em problemas com mais de um grau de liberdade, a tangente de rigidez torna-se uma matriz chamada de matriz de rigidez tangente K_t . Deste modo, os três termos do lado direito da equação (4.19) podem ser interpretados do seguinte modo. O primeiro termo é chamado de matriz de rigidez linear porque é constante, uma vez que é função apenas da geometria inicial. O segundo termo é chamado de matriz de deslocamento inicial e representa uma contribuição geométrica e não linear. O último termo é chamado de matriz de tensão inicial e é importante no estudo da estabilidade dos membros estruturais que estão sujeitos a forças compressivas (BORST *et al.*, 2012).

Agora, expandido o exemplo para o mostrado na figura 3.9, onde aplicaremos o método de Newton-Raphson a um problema com dois graus de liberdade, tem-se duas equações de equilíbrio que, juntas formam um sistema de equações:

Figura 3.9 - Treliça com dois graus de liberdade



Fonte: Lacerda (2014)

$$\begin{aligned} g_1(u_1, u_2) &= q_1(u_1, u_2) - f_1 = 0 \\ g_2(u_1, u_2) &= q_2(u_1, u_2) - f_2 = 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Onde,

$$\begin{aligned} q_1 &= N \cos \theta \approx N \\ q_2 &= N \sin \theta \approx \frac{N(a + u_2)}{L} \end{aligned} \quad (4.21)$$

O método de Newton-Raphson para mais de um grau de liberdade é deduzido de forma similar a anterior. Aplicando a expansão em série de Taylor (já truncada) no sistema (4.21) no ponto $(u_{1,i}, u_{2,i})$, tem-se

$$g_1(u_1, u_2) = g_1(u_{1,i}, u_{2,i}) + (u_1 - u_{1,i}) \frac{\partial g_1}{\partial u_1} + (u_2 - u_{2,i}) \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \quad (4.22a)$$

$$g_2(u_1, u_2) = g_2(u_{1,i}, u_{2,i}) + (u_1 - u_{1,i}) \frac{\partial g_2}{\partial u_1} + (u_2 - u_{2,i}) \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \quad (4.22b)$$

Ressaltando que as derivadas são calculadas no ponto $(u_{1,i}, u_{2,i})$, tem-se que

$$\frac{\partial g_i}{\partial u_j} = \frac{\partial [q_i - f_i]}{\partial u_j} = \frac{\partial q_i}{\partial u_j} \quad (4.23)$$

Agora, aplica-se (4.23) nas equações (4.22) e considera-se que $g_1(u_1, u_2) = 0$ e $g_2(u_1, u_2) = 0$ (pois procura-se a raiz). Depois, faz-se o rearranjo das equações (4.22) em forma de matrizes e obtém-se

$$\begin{bmatrix} g_1(u_{1,i}, u_{2,i}) \\ g_2(u_{1,i}, u_{2,i}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial q_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial q_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 - u_{1,i} \\ u_2 - u_{2,i} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

Substituindo (u_1, u_2) por $(u_{1,i+1}, u_{2,i+1})$, obtém-se a fórmula do método de Newton-Raphson:

$$\Delta \mathbf{u}_i = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \quad (4.25)$$

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i + \Delta \mathbf{u}_i \quad (4.26)$$

onde,

$$\mathbf{u}_i^T = [u_{1,i} \quad u_{2,i}] \quad (4.27)$$

$$\Delta \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} u_{1,i+1} - u_{1,i} \\ u_{2,i+1} - u_{2,i} \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

$$\mathbf{K}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \frac{\partial q_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial q_2}{\partial u_1} & \frac{\partial q_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \frac{\partial \mathbf{q}(\mathbf{u}_i)}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.29)$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{u}_i) \\ g_2(\mathbf{u}_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(\mathbf{u}_i) - f_1 \\ q_2(\mathbf{u}_i) - f_2 \end{bmatrix} = \mathbf{q}_i - \mathbf{f} \quad (4.30)$$

Nota-se que a matriz de rigidez \mathbf{K}_t é a matriz jacobiana das forças internas \mathbf{q} e, mais à frente nesse trabalho, será mostrado que ela é também a matriz hessiana da energia de deformação. Em estruturas com comportamento linear, o valor de \mathbf{K}_t é constante sendo chamado simplesmente de matriz de rigidez \mathbf{K} sem o subscrito t . Ambos \mathbf{K} e \mathbf{K}_t relacionam pequenas variações de cargas ou forças com pequenas variações de deslocamentos.

Computacionalmente, a Equação (4.25) não é resolvida determinando a inversa \mathbf{K}_t^{-1} . A expressão \mathbf{K}_t^{-1} foi usada apenas por simplicidade notacional. No computador, é resolvido o sistema linear correspondente

$$\mathbf{g}_i = -\mathbf{K}_t \Delta \mathbf{u}_i \quad (4.31)$$

em geral, através da fatoração de \mathbf{K}_t usando decomposição LU. Descrições de decomposição LU são encontradas em livros texto de métodos numéricos como por exemplo Chapra e Canele (2008)

3.4.2 Método de Potra-Pták

Os autores Potra e Pták (1984) desenvolveram um método de dois passos baseado no método de Newton-Raphson, que consiste de duas avaliações da função dada e de apenas o cálculo de derivadas de primeira ordem. Com convergência cúbica e um índice de eficiência maior que o do método de Newton-Raphson (SHARIFI; BABAJEE; SOLEYMANI, 2012), o esquema iterativo para o método de Potra-Pták adaptado neste trabalho ao problema estrutural é dado pelas seguintes equações (SOUZA, 2017):

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} \left(\delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \right) \quad (4.32)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} \left[\delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}) \right], \quad (4.33)$$

3.4.3 Método dos Petkovic e Petkovic

No método dos “Dois Pontos” duas equações são usadas para encontrar as raízes aproximadas das equações não lineares. Uma equação é chamada de Preditora já que ela faz uma predição utilizando uma estimativa inicial. A segunda equação é chamada Corretora, já que ela encontra uma aproximação correta usando o valor predito pelo primeiro ponto. O método dos “Dois Pontos” também pode ser chamado de método “Preditora-Corretora” (SAFFARI; MANSOURI, 2011).

Segue abaixo esquema proposto e analisado para solução de equações não lineares usando o método iterativo dos “Dois Pontos” (PETKOVIC; PETKOVIC, 2010):

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.34)$$

$$x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)}{f'(y_n)} \quad (4.35)$$

Adaptando o esquema iterativo de Petkovic e Petkovic num procedimento incremental para solucionar o problema estrutural dado pela Equação (4.1), tem-se:

$$\delta\mathbf{u}_{1(n+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}_{(n)})]^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{u}_{(n)}, \lambda_{(n)}) + \delta\lambda_{1(n+1)} \mathbf{F}_r] \quad (4.36)$$

$$\mathbf{y}_{(n)} = \mathbf{u}_{(n)} + \delta\mathbf{u}_{1(n+1)} \quad (4.37)$$

$$\delta\mathbf{u}_{2(n+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{y}_{(n)})]^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{y}_{(n)}, \lambda_{(n)}) + \delta\lambda_{2(n+1)} \mathbf{F}_r] \quad (4.38)$$

$$\mathbf{u}_{(n+1)} = \mathbf{y}_{(n)} + \delta \mathbf{u}_{2(n+1)} \quad (4.39)$$

3.4.4 Método de Mohit et al.

Um método iterativo de 3 passos para x_{n+1} partindo de um ponto inicial x_0 é apresentado por Rezaiee-Pajand e Naserian (2015):

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (4.40)$$

$$z_n = y_n - \frac{f(y_n)}{\sum_{i=1}^p w_i f'(x_n + \tau_i(y_n - x_n))} \quad (4.41)$$

$$x_{n+1} = z_n - \frac{f(z_n)}{\sum_{i=1}^p w_i f'(x_n + \tau_i(z_n - y_n))} \quad (4.42)$$

Foram criados seis diferentes algoritmos variando os valores de p, w e τ para solução das equações não lineares. Por fim é apresentado o problema de análise não linear geométrica como segue (MOHIT; SHARIFI; TAVAKOLI, 2020):

$$\mathbf{u}^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_r^{(k)} \quad (4.43)$$

O deslocamento para cada passo de iteração é calculado:

$$\mathbf{y}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \quad (4.44)$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})] \quad (4.45)$$

$$\mathbf{z}^{(k+1)} = \mathbf{y}^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} \quad (4.46)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})] \quad (4.47)$$

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{z}^{(k+1)} + \delta \mathbf{u}_3^{(k+1)} \quad (4.48)$$

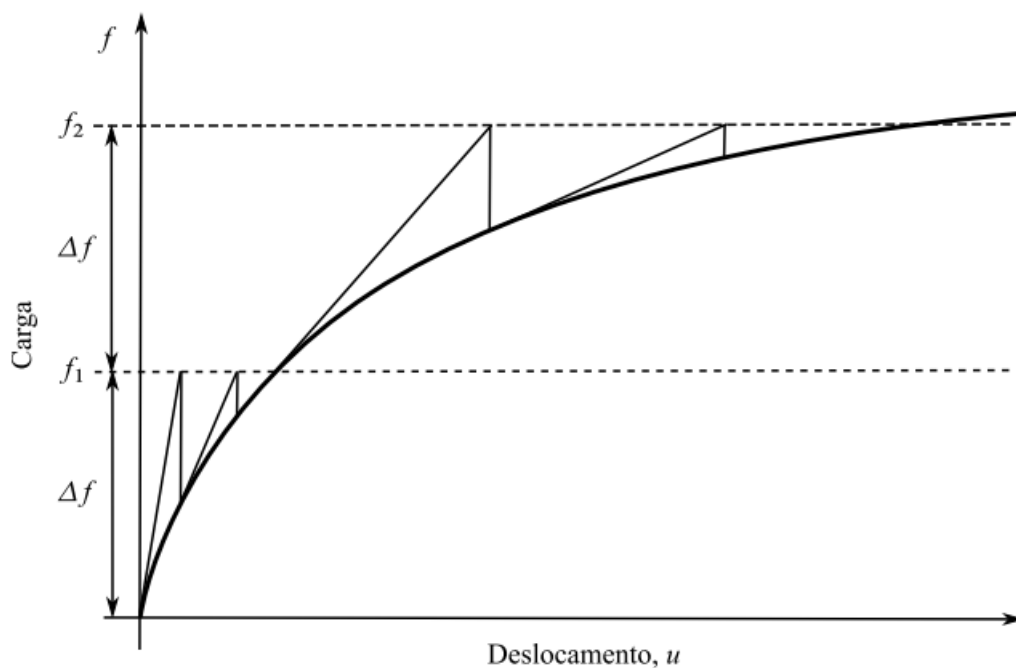
$$\delta \mathbf{u}_3^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_3^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{z}^{(k+1)}, \lambda^{(k)})] \quad (4.49)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_3^{(k+1)} \quad (4.50)$$

3.4.5 Técnica de Continuação Comprimento de Arco

Segundo Zhong e Ross (2021) o método de Newton-Raphson só fornece a solução de um simples ponto no caminho de equilíbrio. Para obter outros pontos, combinam-se as iterações de Newton-Raphson com um procedimento incremental. Que no caso deste trabalho, utiliza-se a Técnica de Continuação Comprimento de Arco Linear. A ideia é aplicar as iterações para vários ciclos de nível de carga. Ou seja, no primeiro ciclo obtém-se uma solução para um nível de carga Δf . No segundo ciclo, obtém-se outra solução para um nível de carga $2\Delta f$ e assim por diante, gerando uma solução para cada nível de carga (LACERDA, 2014). O procedimento é ilustrado na Figura 3.10

Figura 3.10 - Procedimento Incremental-iterativo com o Método de Newton-Raphson



Fonte: Lacerda, 2014

O procedimento incremental-iterativo deveria ser usado mesmo quando se busca uma solução para um único nível de carga. Impor uma grande carga f de uma só vez para o método de Newton-Raphson pode levar a problemas de convergência, pois a solução inicial pode estar muito longe da solução final e neste caso, a prática mostra que as iterações podem encontrar dificuldades para convergir e até mesmo não encontrar a solução do problema. Incrementar a

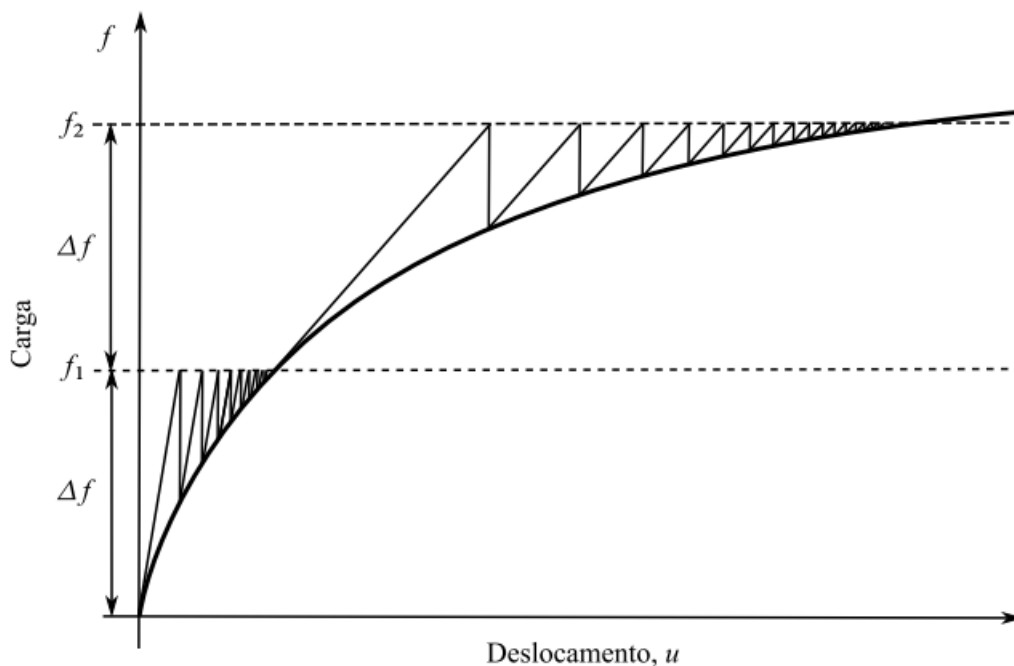
carga lentamente até atingir a carga desejada f torna a solução inicial, em cada nível, próxima da solução final facilitando a convergência.

Além disso, o procedimento incremental-iterativo é importante para materiais que exibem dependência do caminho seguido pela estrutura durante sua deformação. Diferentes tensões podem ser obtidas dependendo da forma com que são aplicadas as cargas. Aplicar incrementos de cargas pequenos permite seguir mais de perto o caminho de deformação e obter a solução correta do problema (BORST *et al.*, 2012).

O método de Newton-Raphson requer computar e fatorar a matriz de rigidez tangente em cada iteração. Há problemas que geram grandes matrizes de rigidez tangente, principalmente problemas tridimensionais. Nesses casos, o custo computacional de montar e fatorar grandes matrizes repetidas vezes é consideravelmente alto. Vários métodos têm sido propostos, para lidar com esse problema, como o método de Newton-Raphson Modificado, entre outros.

O método de Newton-Raphson modificado consiste em computar a matriz de rigidez tangente uma única vez e na primeira iteração de cada ciclo de nível de carga no procedimento incremental-iterativo, conforme ilustra a figura 3.11.

Figura 3.11 - Procedimento Incremental-Iterativo com o Método de Newton-Raphson Modificado



Fonte: Lacerda, 2014

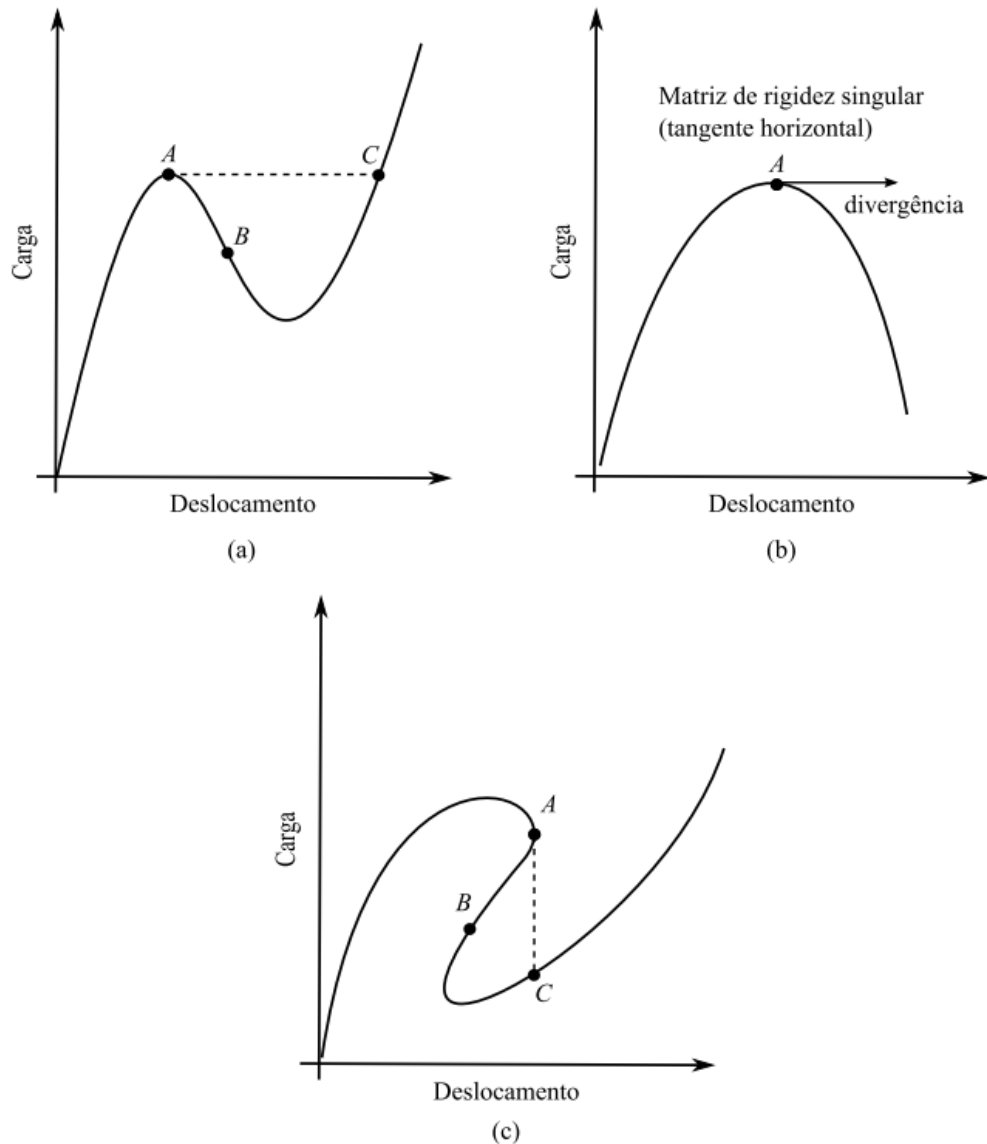
Uma outra alternativa é prescrever deslocamentos incrementais em vez de cargas incrementais. A primeira alternativa é denominada controle de carga e a segunda é chamada de controle de deslocamento. Quando um deslocamento é prescrito em um nó, geram-se tensões na estrutura que resulta em uma força naquele nó que é oposta, mas igual em módulo, à força externa que causaria o mesmo deslocamento que foi prescrito naquele nó.

Segundo Lacerda (2014), o controle de carga tem suas limitações para traçar o caminho de equilíbrio. Por exemplo, na Figura 3.12(a) não seria possível alcançar o ponto B, pois o aumento de carga faria o trajeto saltar diretamente para o ponto C. E mesmo neste caso, pode haver problemas de convergência. A matriz de rigidez tangente torna-se singular no ponto A (ponto de limite) do caminho de equilíbrio como mostra a Figura 3.12(b) e por isso não pode ser invertida. Isto significa que a tangente de rigidez é horizontal. Além disso, um salto de A para C pode ser muito para que o método de Newton-Raphson possa convergir corretamente.

O controle de deslocamento deveria, sempre que possível, ser utilizado no lugar do controle de carga pois supera parte de suas limitações. O ponto B da Figura 3.12(c) seria alcançado naturalmente e a matriz de rigidez tangente não se tornaria singular no ponto de máximo (ponto de limite).

Contudo, o *snap-back* causa dificuldades ao controle de deslocamento da mesma forma que o *snap-through* causa ao controle de carga. Por exemplo, o controle de deslocamento não pode alcançar pontos como o ponto B da Figura 3.12(c), saltando de A para C. Um método indicado para resolver todos esses problemas é denominado de método do comprimento de arco, descrito a seguir.

Figura 3.12 - Limitações do controle de carga e controle de deslocamento



(a) Snap-through. (b) Matriz de rigidez tangente singular. (c) Snap-back. Fonte:

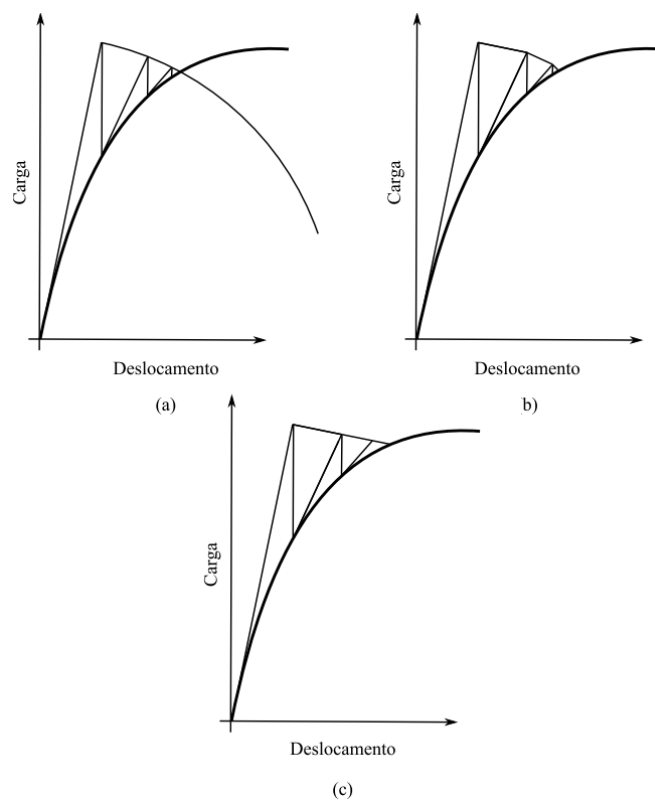
Lacerda, 2014

Foram vistos, anteriormente, procedimentos para determinar o caminho de equilíbrio controlando a carga ou o deslocamento. Foi mostrado que estes procedimentos têm suas limitações, tais como tangente horizontal nos pontos de limite e dificuldade de seguir o caminho gerado pelo fenômeno *snap-back*. O método do comprimento de arco supera todos estes problemas de uma forma elegante e eficiente. De fato, ele tornou-se método preferido para determinar o caminho de equilíbrio, apesar de outros métodos também terem sido propostos (KRENK, 2009).

No método do comprimento de arco incrementa-se simultaneamente tanto a carga como o deslocamento. Para conseguir isto, adiciona-se uma nova equação ou restrição no sistema de

equações de equilíbrio e uma nova incógnita: o fator de carga. A Figura 3.13 ilustra o processamento do método do comprimento de arco para diferentes tipos de restrições utilizando iterações do método de Newton-Raphson. A Figura 3.13(a) ilustra a restrição denominada de restrição de hiperesfera. Versões linearizadas desta restrição são chamadas de restrições de hiperplano e são mostradas na Figura 3.13(b) (hiperplano atualizado) e na Figura 3.13(c) (hiperplano fixo). A apresentação a seguir, começa descrevendo o método com a restrição de hiperesfera.

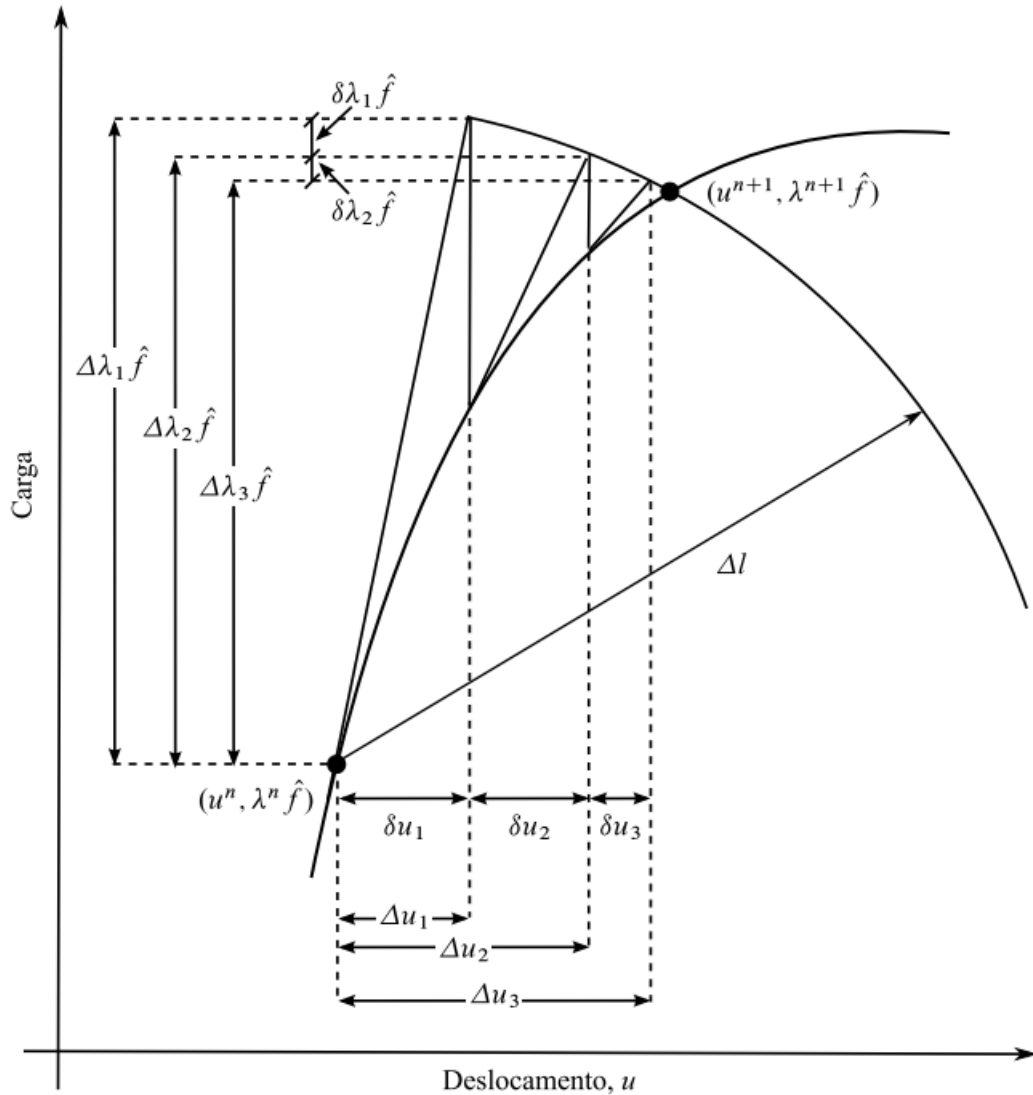
Figura 3.13 - Restrições no Método do Comprimento de Arco



(a) Restrição de hiperesfera. (b) Restrição de hiperplano atualizado. (c) Restrição hiperplano fixo. Fonte: Lacerda, 2014

O método de comprimento de arco controla os incrementos de carga e deslocamento. O incremento do deslocamento é representado por $\Delta \mathbf{u}$. A carga é expressa de uma forma normalizada como sendo o produto de uma carga fixa $\hat{\mathbf{f}}$ por um fator de carga λ , ou seja, $\mathbf{f} = \lambda \hat{\mathbf{f}}$. O incremento de carga é representado por $\Delta \lambda \hat{\mathbf{f}}$.

Figura 3.14 - Método do Comprimento de Arco Hiperesférico



Fonte: Lacerda, 2014

A restrição de hipersfera, mostrada na Figura 3.14, foi proposta por Crisfield (1981) e é ainda muito utilizada. É expressa matematicamente pela equação:

$$c = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}) - \Delta l^2 = 0 \quad (4.46)$$

onde Δl é o comprimento de arco que de certo modo determina o incremento de carga. ψ É um fator de escala necessário para o termo de carga porque unidades diferentes são usadas para carga e para deslocamento. Contudo, frequentemente, usa-se $\psi = 0$ e, neste caso, a restrição (4.46) passa a ser chamada de restrição cilíndrica (em vez de hipersférico).

Adicionando a Equação (4.46) ao sistema de equações de equilíbrio (4.1), obtém-se um novo sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{g} = \mathbf{q} - \lambda \hat{\mathbf{f}} = 0 \\ c = (\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} + \Delta \lambda^2 \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}) - \Delta l^2 = 0 \end{array} \right\} \quad (4.47)$$

Resolvendo o sistema, obtém-se $\Delta \mathbf{u}$ e $\Delta \lambda$ que são incrementos relativos a um ponto $(\mathbf{u}^n, \mathbf{f}^n)$ qualquer no caminho de equilíbrio. Em outras palavras, a solução do sistema gera um novo ponto $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{f}^{n+1})$ no caminho de equilíbrio dado por

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n + \Delta \mathbf{u} \quad (4.48)$$

$$\mathbf{f}^{n+1} = (\lambda^n + \Delta \lambda) \hat{\mathbf{f}} = \lambda^{n+1} \hat{\mathbf{f}} \quad (4.49)$$

O sistema (4.47) poderia ser resolvido diretamente pelo método de Newton-Raphson, que então resultaria em:

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \lambda} \\ \left(\frac{\partial c_i}{\partial \mathbf{u}} \right)^T & \frac{\partial c_i}{\partial \lambda} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

em que usa-se o símbolo δ para representar os incrementos do método de Newton-Raphson. Desenvolvendo, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{K}_t & -\hat{\mathbf{f}} \\ 2\Delta \mathbf{u}_i^T & 2\Delta \lambda_i \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_i \\ c_i \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_{i+1} \\ \Delta \lambda_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}_i \\ \Delta \lambda_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \lambda_i \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Contudo, a matriz que resultou neste sistema não possui boas propriedades numéricas (não é simétrica e nem banda). Por causa disso, o sistema não é resolvido, em geral, da forma convencional. Em vez disso, utiliza-se o método proposto por Batoz e Dhett (1979) que resolve o sistema em duas etapas. A primeira equação do Sistema (4.51) fornece a equação

$$-\mathbf{K}_t \delta \mathbf{u}_i + \hat{\mathbf{f}} \delta \lambda_i = \mathbf{g}_i \quad (4.53)$$

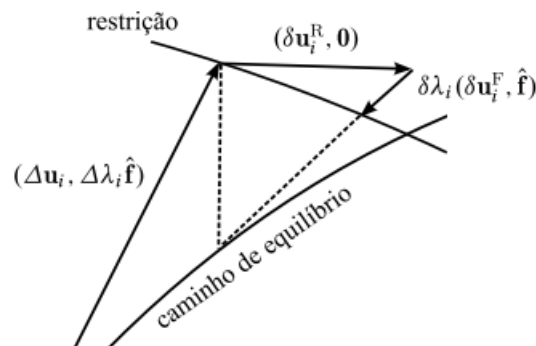
$$\delta \mathbf{u}_i = \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i \delta \mathbf{u}_i^F \quad (4.54)$$

$$\delta \mathbf{u}_i^F = -\mathbf{K}_t^{-1} \hat{\mathbf{f}} \quad (4.55)$$

$$\delta \mathbf{u}_i^R = -\mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{g}_i \quad (4.56)$$

O componente $\delta \mathbf{u}_i^R$ é gerado pela força residual \mathbf{g}_i e corresponde ao incremento do método de Newton-Raphson usado no procedimento incremental-iterativo. O componente $\delta \mathbf{u}_i^F$ é um incremento de retorno para ajustar a carga a fim de satisfazer a restrição. O vetor $\delta \mathbf{u}_i^F$ é também chamado de deslocamento tangencial porque é tangente ao caminho de equilíbrio (no espaço de deslocamentos). Os componentes são ilustrados na Figura 3.15.

Figura 3.15 - Os componentes residual e tangencial



Fonte: Lacerda, 2014

Substituindo (4.54) na segunda equação do Sistema (4.41), obtém-se uma equação quadrática:

$$a_1 \delta \lambda_i^2 + a_2 \delta \lambda_i + a_3 = 0 \quad (4.57)$$

$$a_1 = (\delta \mathbf{u}_i^F)^T \delta \mathbf{u}_i^F + \psi^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (4.58)$$

$$a_2 = 2(\Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R)^T \delta \mathbf{u}_i^F + 2\psi^2 \Delta \lambda_i \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} \quad (4.59)$$

$$a_3 = (\Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R)^T (\Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R) + \psi^2 \Delta \lambda_i^2 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} - \Delta l^2 \quad (4.60)$$

Resolvendo a equação quadrática, obtém-se $\delta \lambda_i$ e pode-se determinar $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ pelas equações (4.54) e (4.52). No entanto, a equação quadrática pode ter duas raízes e escolher uma delas constitui um problema a parte. Considere $\delta \lambda_i'$ e $\delta \lambda_i''$ como sendo duas raízes da equação quadrática. Portanto, tem-se dois candidatos a solução:

$$\Delta \mathbf{u}'_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i' \delta \mathbf{u}_i^F \quad (4.61)$$

$$\Delta \mathbf{u}''_{i+1} = \Delta \mathbf{u}_i + \delta \mathbf{u}_i^R + \delta \lambda_i'' \delta \mathbf{u}_i^F \quad (4.62)$$

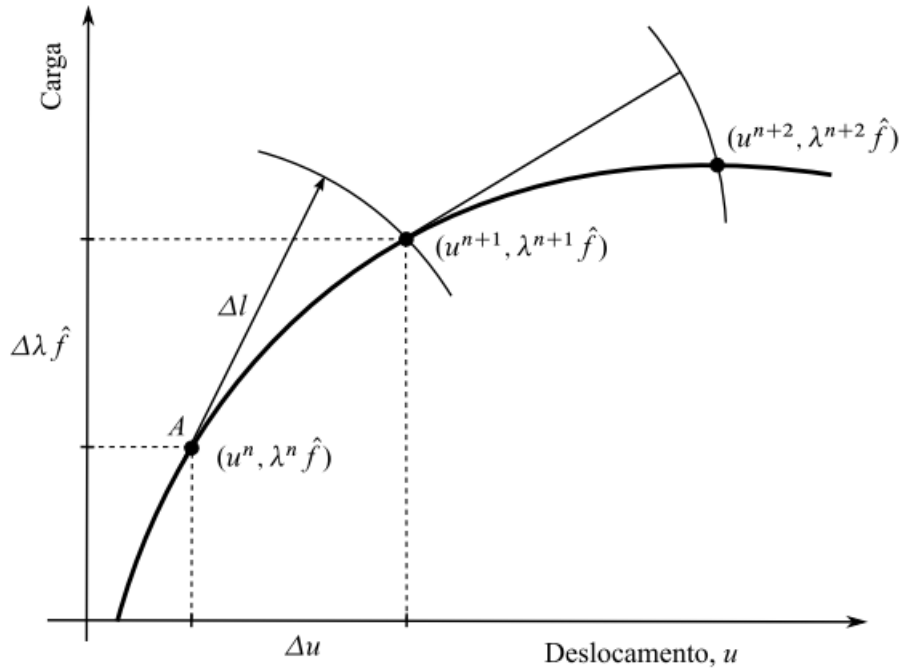
Qual deles escolher? O critério é escolher o candidato que se encontra mais próximo do incremento anterior $\Delta \mathbf{u}_i$ para prevenir que se “caminhe para trás” durante o traçado do caminho do equilíbrio. Computacionalmente, isto pode ser feito escolhendo o candidato que forma o menor ângulo com $\Delta \mathbf{u}_i$. Estes ângulos são dados por:

$$\cos \theta' = \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}'_{i+1}}{\Delta l^2}, \cos \theta'' = \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \Delta \mathbf{u}''_{i+1}}{\Delta l^2} \quad (4.63)$$

É possível que a equação quadrática tenha raízes complexas e isto causa problemas de divergência da solução. Este problema tem sido tratado por vários autores (LAM; MORLEY, 1992; ZHOU; MURRAY, 1995).

Uma vez escolhida a solução da equação quadrática, são obtidos $\Delta \mathbf{u}_{i+1}$ e $\Delta \lambda_{i+1}$ a partir de (4.54) e (4.52). As demais iterações de Newton-Raphson são processadas usando (4.48) e (4.49) e então depois de convergirem, obtém-se $(\mathbf{u}^{n+1}, \mathbf{f}^{n+1})$ no caminho de equilíbrio é processado um novo ciclo para obter o ponto seguinte $(\mathbf{u}^{n+2}, \mathbf{f}^{n+2})$ e assim por diante, conforme mostra a Figura 3.16.

Figura 3.16 - Dois ciclos do método do comprimento de arco



Fonte: Lacerda, 2014

A restrição de hiperplano é uma versão linearizada da restrição de hipersfera. Há duas versões: uma com hiperplano atualizado e outra com hiperplano fixo. A restrição de hiperplano atualizado condiciona o sub incremento $(\delta \mathbf{u}, \delta \lambda \hat{\mathbf{f}})$ para que este se encontre no hiperplano ortogonal ao incremento atual $(\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda \hat{\mathbf{f}})$, conforme mostrado na figura 3.13(b). Ou seja:

$$c = (\Delta \mathbf{u}, \Delta \lambda \hat{\mathbf{f}})^T (\delta \mathbf{u}, \psi \delta \lambda \hat{\mathbf{f}}) = 0 \quad (4.64)$$

onde a constante ψ foi introduzida aqui pelo mesmo motivo que existe na Equação 4.46. Desenvolvendo, tem-se:

$$c = \Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u} + \psi^2 \delta \lambda \Delta \lambda \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} = 0 \quad (4.65)$$

Que é a restrição de hiperplano atualizado.

$$\delta \lambda_i = - \frac{\Delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_i^R}{\Delta \mathbf{u}_i^T \delta \mathbf{u}_i^F + \psi^2 \Delta \lambda_i \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}} \quad (4.66)$$

A restrição de hiperplano fixo é bem similar. A diferença é que ela condiciona o sub incremento $(\delta \mathbf{u}, \delta \lambda \hat{\mathbf{f}})$ para que este se encontre no hiperplano ortogonal ao primeiro incremento $(\Delta \mathbf{u}_1, \Delta \lambda_1 \hat{\mathbf{f}})$. Ver Figura 3.13(c). Ou seja:

$$c = \Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u} + \psi^2 \delta \lambda \Delta \lambda_1 \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}} = 0 \quad (4.67)$$

$$\delta \lambda_i = - \frac{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^R}{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^F + \psi^2 \Delta \lambda_i \hat{\mathbf{f}}^T \hat{\mathbf{f}}} \quad (4.68)$$

É esse o método do comprimento de arco original conforme foi proposto por Riks (1972).

A experiência numérica mostra que o valor de ψ parece não exercer muita influência no desempenho do método de comprimento de arco que usa essas restrições. O valor $\psi = 0$ tem sido usado na prática e parece ser bem robusto em problemas de engenharia (BORST *et al.*, 2012). Fazer $\psi = 0$ remove a componente da carga. Neste caso, tem-se para o hiperplano atualizado e fixo:

$$\delta \lambda_i = - \frac{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^R}{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^F} \quad (4.69)$$

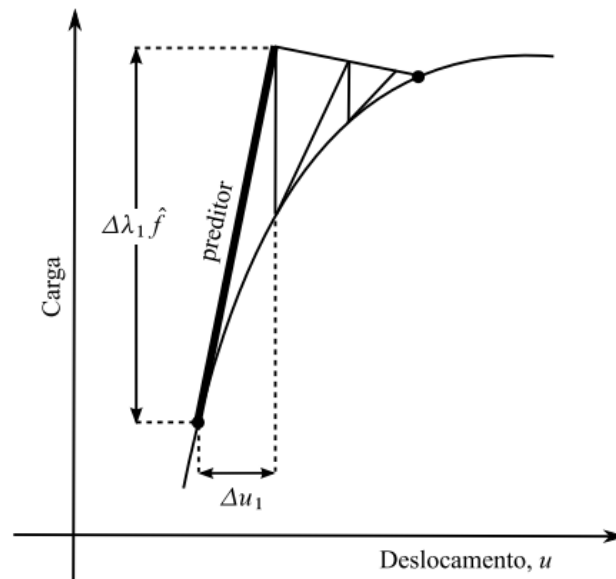
$$\delta \lambda_i = - \frac{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^R}{\Delta \mathbf{u}_1^T \delta \mathbf{u}_i^F} \quad (4.70)$$

A solução preditora é ilustrada na Figura 3.17 sendo representada pelos incrementos iniciais $\Delta \mathbf{u}_1$ e $\Delta \lambda_1$. Pela Figura 3.17, a direção do preditor é tangente ao caminho de equilíbrio. Então $\Delta \mathbf{u}_1$ tem a mesma direção do vetor $\delta \mathbf{u}^F = \mathbf{K}_t^{-1} \hat{\mathbf{f}}$ que também é tangente ao caminho de equilíbrio (no espaço de deslocamentos). Então uma possível solução preditora seria

$$\Delta \lambda_1 = \pm \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}^F\|} \quad (4.71)$$

$$\Delta \mathbf{u}_1 = \Delta \lambda_1 \delta \mathbf{u}^F \quad (4.72)$$

Figura 3.17 - O preditor é primeira estimativa de um ciclo



Fonte: Lacerda, 2014

Note que o preditor foi normalizado para que tenha o tamanho do arco. O sinal indefinido da solução preditora (4.71) deve-se ao fato que preditor $\Delta \mathbf{u}_1$ pode ter ou não o mesmo sentido do vetor $\delta \mathbf{u}^F$.

De acordo com De Souza Neto e Feng (1999), determinar o sentido de avanço do preditor é de vital importância para o sucesso do algoritmo do comprimento de arco. Ou seja, determinar se $\Delta \lambda_1$ está aumentando ou diminuindo no fim de um incremento. Um critério muito utilizado para determinar o sentido do preditor (FENG; PERIĆ; OWEN, 1995, 1996) é descrito da seguinte forma:

$$\text{sgn}(\Delta \lambda_1) = \text{sgn}[(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \mathbf{u}^F] \quad (4.73)$$

onde $\Delta \mathbf{u}^{n-1}$ é o incremento total do ciclo anterior (resultado da convergência). Em outras palavras:

- se $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}^F > 0$, então o preditor $\Delta \mathbf{u}_1$ tem o mesmo sentido de $\delta \mathbf{u}^F$, isto é:

$$\Delta \lambda_1 = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}^F\|} \quad (4.74)$$

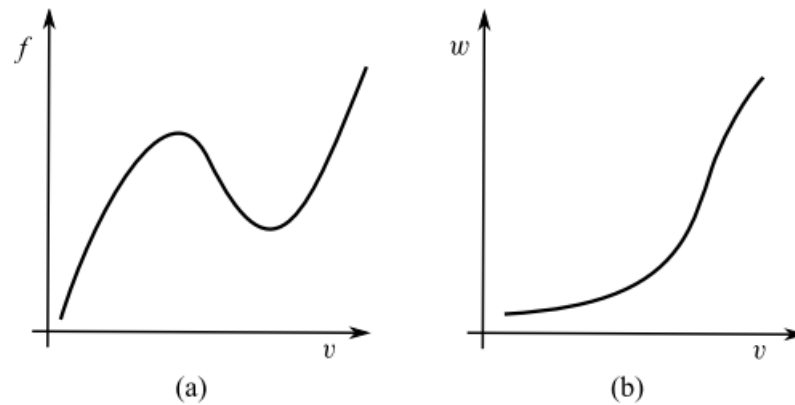
- se $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}^F < 0$, então o preditor $\Delta \mathbf{u}_1$ tem o sentido oposto de $\delta \mathbf{u}^F$, isto é:

$$\Delta \lambda_1 = - \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}^F\|} \quad (4.75)$$

Uma interpretação geométrica deste critério é dada no seguinte exemplo. Considere de uma estrutura com dois graus de liberdade cujo deslocamento é representado pelo vetor $\mathbf{u} = (v, w)^T$. Suponha que a Figura 3.18(a) represente um típico caminho de equilíbrio $(v \times f)$ desta estrutura. A Figura 3.18(b) representa a curva de equilíbrio no plano $v \times w$, ou seja, no espaço de deslocamentos. Esta curva também representa o caminho que os incrementos $\Delta \mathbf{u}$ deveriam a seguir durante as iterações do algoritmo.

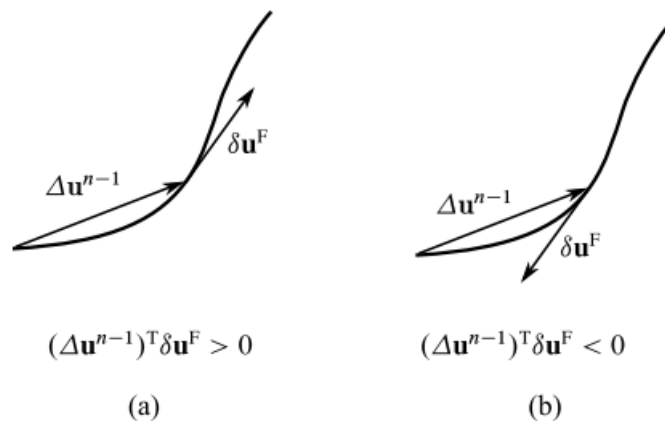
A Figura 3.19 mostra dois vetores. O primeiro representa o vetor tangente ao caminho de equilíbrio $\delta \mathbf{u}^F$. O segundo, $\Delta \mathbf{u}^{n-1}$, representa o incremento total do ciclo anterior (resultado da convergência) e, por isso, o incremento $\Delta \mathbf{u}^{n-1}$ conecta dois pontos sobre a curva de equilíbrio. Dois casos podem ocorrer como mostra a Figura 3.19. No primeiro caso, Figura 3.19(a), o vetor $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido de avanço na curva de equilíbrio e o produto $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}^F > 0$. Já no segundo caso, Figura 3.19(b), o vetor $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido contrário ao sentido de avanço na curva de equilíbrio e o produto $(\Delta \mathbf{u}^{n-1})^T \delta \mathbf{u}^F < 0$. Neste caso, o preditor não poderia ter o mesmo sentido de $\delta \mathbf{u}^F$ porque o método iria “caminhar para trás” durante o traçado do caminho do equilíbrio. Então, neste caso, o correto seria o preditor ter o sentido contrário a $\delta \mathbf{u}^F$.

Figura 3.18 – Caminho de Equilíbrio para dois graus de liberdade



Fonte: Lacerda, 2014

Figura 3.19 – Sentidos positivos e negativos no caminho de equilíbrio



(a) $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido de avanço no caminho do equilíbrio. (b) $\delta \mathbf{u}^F$ tem o sentido contrário ao sentido de avanço no caminho do equilíbrio. Fonte: Lacerda, 2014

Quando se usa o método de Newton-Raphson (que não é o modificado), outra maneira de determinar o preditor é simplesmente extrapolar os incrementos anteriores do deslocamento e do fator de carga:

$$\Delta \mathbf{u}_1^n = \eta \Delta \mathbf{u}^{n-1}, \Delta \lambda_1^n = \eta \Delta \lambda^{n-1} \quad (4.76)$$

Onde η é um fator de escala para determinar o tamanho do arco. Por exemplo, usando a ideia de comprimento variável, tem-se

$$\eta = \frac{\Delta l^{n-1}}{\|\mathbf{u}^{n-1}\|} \left(\frac{N_d}{N_{n-1}} \right)^{1/2} \quad (4.77)$$

Comumente usa-se um comprimento de arco variável. Há um método heurístico bem popular para determinar o comprimento do arco. Ele é baseado na observação que mais iterações são necessárias para convergir em trechos do caminho do equilíbrio em que ocorrem grandes mudanças. A ideia é estimar o comprimento de arco Δl^n de forma que o número de iterações para convergir no ciclo n seja igual a um número desejado de iterações N_d , ou seja onde Δl^{n-1} é o comprimento de arco do ciclo $n - 1$, N_{n-1} é o número de iterações que foram utilizadas para convergir no ciclo $n - 1$ e ζ é um parâmetro para aumentar ou diminuir a influência da razão $\frac{N_d}{N_{n-1}}$. Normalmente, usa-se $\zeta = 0, 5$ e N_d entre 3 e 5.

$$\Delta l^n = \Delta l^{n-1} \left(\frac{N_d}{N_{n-1}} \right)^\zeta \quad (4.78)$$

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

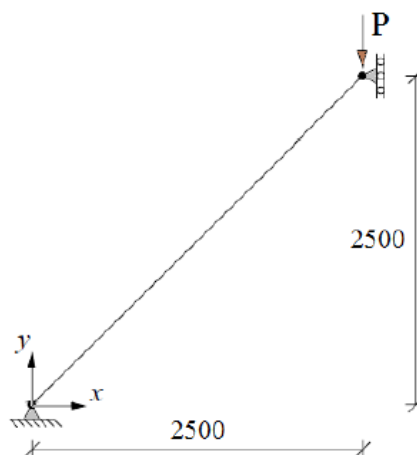
Nesta seção serão apresentados os resultados numéricos de problemas constituídos por barras biarticuladas (barra simples, arco treliçado de Crisfield, treliça espacial com quatro barras e cúpula de treliça com 168 barras) com comportamento não linear geométrico. Os estudos numéricos validam o código computacional desenvolvido com o *software* Matlab (2018). Os testes computacionais foram realizados em um computador com processador Core i7 – 7700HQ com 16GB de memória RAM.

Foram utilizados os métodos Posicional e Corrotacional de Elementos Finitos na discretização das estruturas. O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. A solução dos problemas estruturais foi obtida com os procedimentos incrementais e iterativos de Newton-Raphson (NR) e Newton-Raphson Modificado (NRM), associados à técnica de continuação de Comprimento de Arco Linear.

4.1. BARRA BIARTICULADA COM UM GRAU DE LIBERDADE

O primeiro problema, clássico do estudo de estruturas de comportamento não linear, é o da barra biarticulada com um grau de liberdade, conforme ilustra a figura 4.1. A barra tem rigidez adimensional $EA = 5,0 \times 10^7$. Esse problema foi estudado por Menin (2006) e Crisfield (1991). Nas simulações, foram considerados os seguintes parâmetros para o método de solução: comprimento de arco inicial $\Delta l^{(0)} = 60$; tolerância $tol = 10^{-8}$; e número de iterações desejáveis no passo de carga $k_d = 5$.

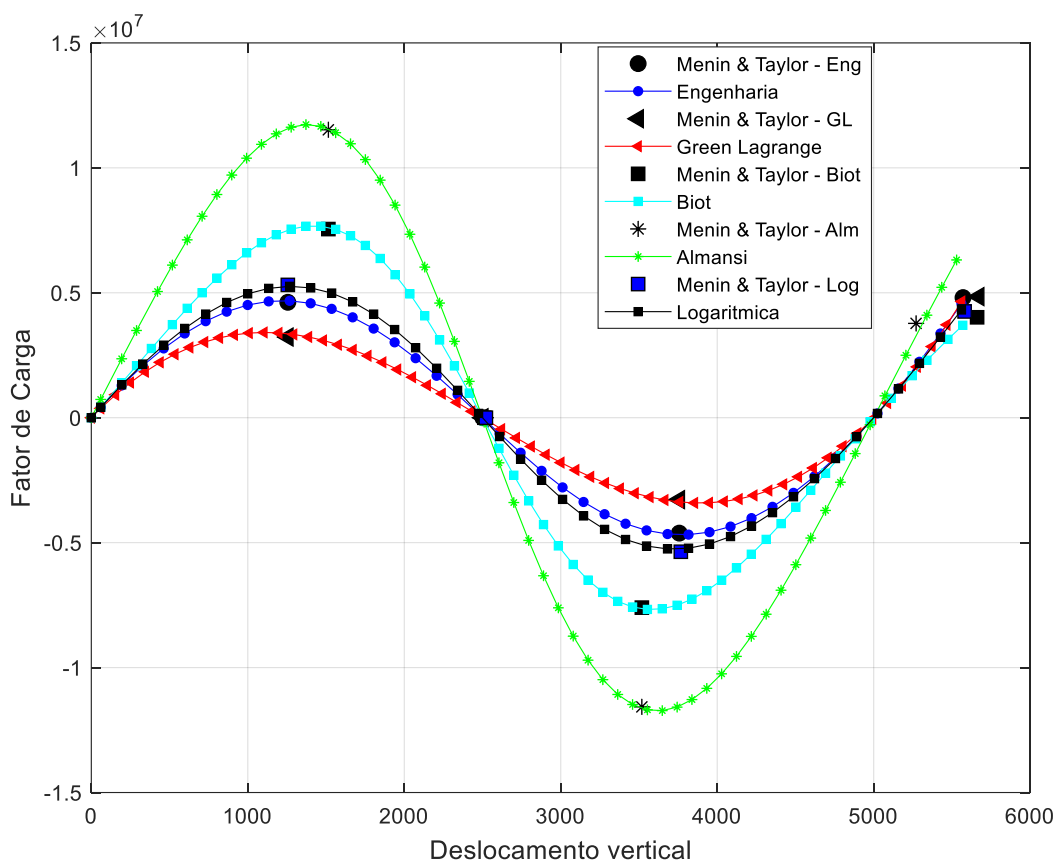
Figura 4.1 - Modelo estrutural da barra com 1 grau de liberdade (medidas adimensionais)



Fonte: Menin (2006)

Na figura 4.2 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio com dois pontos limites de força para as diferentes medidas de deformação (Engenharia, Green-Lagrange, Biot, Almansi e Logarítmica), obtidas com a formulação corrotacional. Observa-se que os resultados obtidos aqui têm boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por (MENIN, 2006) e (CRISFIELD, 1991).

Figura 4.2 - Trajetórias de equilíbrio da barra com um grau de liberdade para as diferentes medidas de deformação



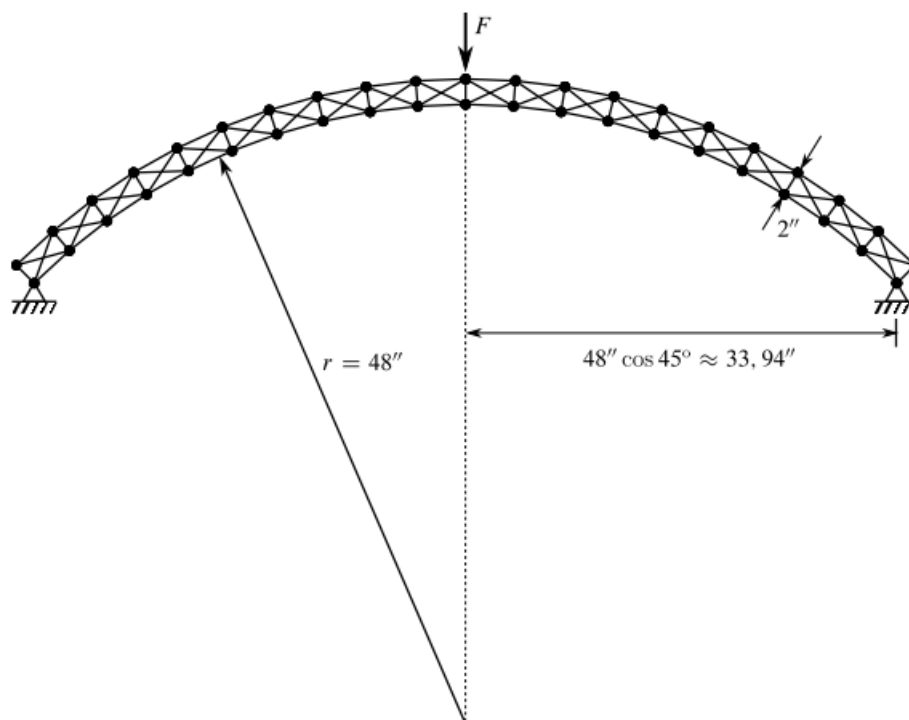
Fonte: O autor

Na Figura 4.2, o primeiro ponto limite de força (tangente horizontal) das curvas representa a carga máxima que a estrutura pode suportar antes do *snap-through*. Nas posições intermediárias, a carga P decresce e reverte de sinal duas vezes enquanto o deslocamento continua a crescer. No entanto, é impossível permanecer em uma das posições intermediárias porque elas são posições de equilíbrio instável. Quando o efeito *snap-through* termina, a estrutura começa a suportar valores adicionais de carga.

4.2. ARCO TRELIÇADO DE CRISFIELD

O arco treliçado mostrado na figura 4.3 foi estudado inicialmente por Crisfield (1997), e posteriormente por Menin (2006) e Hrinda (2010). A estrutura possui 101 barras e 42 nós. A rigidez axial das barras é $EA = 1,0 \times 10^7 \text{ lb/pol}^2$ e no ápice do arco é aplicada uma carga vertical F de intensidade $1,0 \times 10^6 \text{ lb}$.

Figura 4.3 – Arco treliçado de Crisfield



Fonte: Menin (2006)

Na figura 4.4 é apresentado o caminho de equilíbrio para o arco obtido com a formulação corrotacional, levando em conta o deslocamento do nó de aplicação da força. Havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por (HRINDA, 2010). Nota-se que na trajetória há quatro pontos limites de força (tangentes horizontais) e três pontos limites de deslocamento (tangentes verticais). Genericamente, uma configuração de equilíbrio pode ser estável ou instável. A solução foi obtida com a deformação de engenharia.

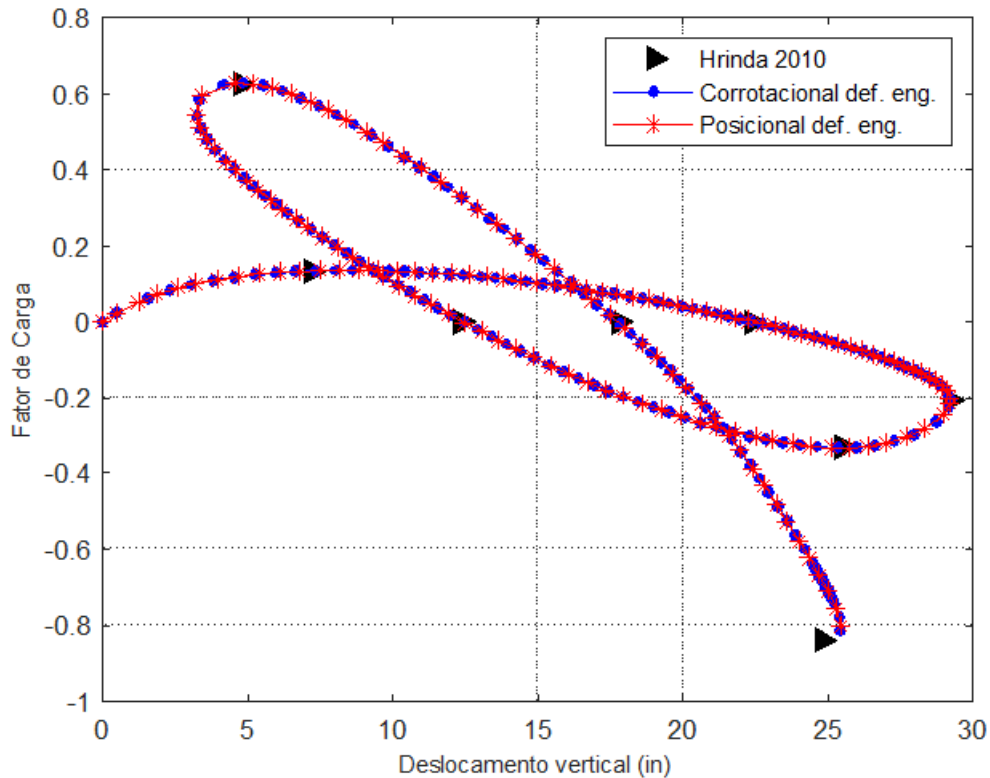
Na tabela 4.1 aparecem os resultados numéricos (número total de passos de carga NP , número total de iterações acumuladas $k_{máx}$, número médio de iterações por passo de carga $k_{médio}$ e tempo de processamento t em segundos) obtidos com os métodos de solução de Newton-

Raphson padrão (NR) e Newton-Raphson modificado (NRM). Foram considerados os seguintes valores para os parâmetros de entrada dos métodos de solução: $\Delta l^{(0)} = 1,5$; $tol = 10^{-4}$; e $k_d = 5$. Na figura 4.5 é mostrada a configuração deformada do arco em cada um dos 8 pontos usados do trabalho de Hrinda (2010) para validação do código (pontos limites de força e deslocamento) e a 8ª deformação é no ponto de parada do gráfico da figura 4.4, obtidas com o método de NR e a formulação Corrotacional de Elementos Finitos para o passo de carga NP = 189.

Tabela 4.1 – Arco treliçado de Crisfield - Resultados numéricos com os métodos de solução

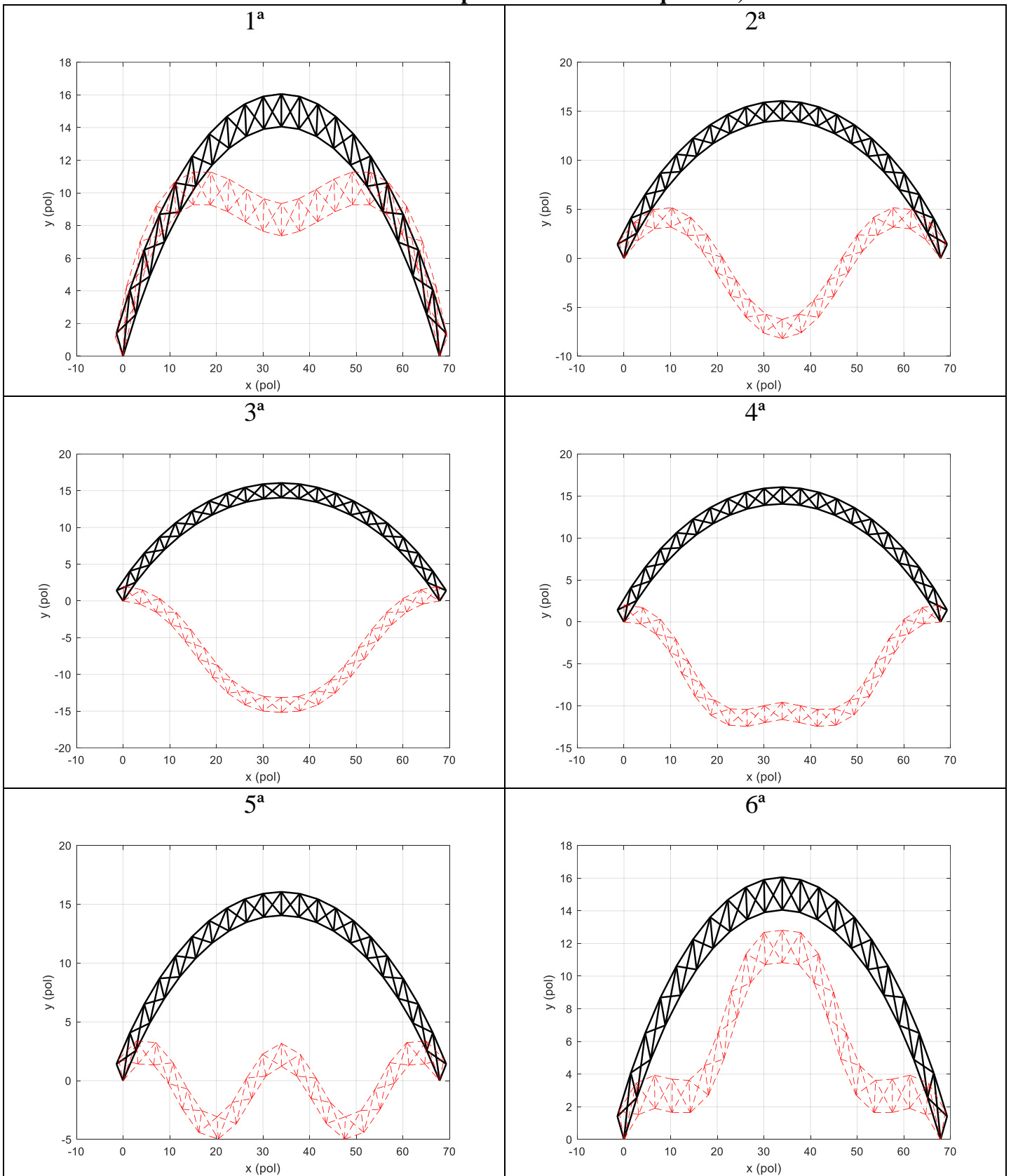
Formulação Corrotacional de Elementos Finitos				
Método de Solução	<i>NP</i>	<i>k_{máx}</i>	<i>k_{médio}</i>	<i>t (s)</i>
NR	189	3461	18,312	10,397
NRM	180	1938	10,767	5,8932
Formulação Posicional de Elementos Finitos				
Método de Solução	<i>NP</i>	<i>k_{máx}</i>	<i>k_{médio}</i>	<i>t (s)</i>
NR	146	337	2,308	1,0505
NRM	147	346	2,354	0,9604

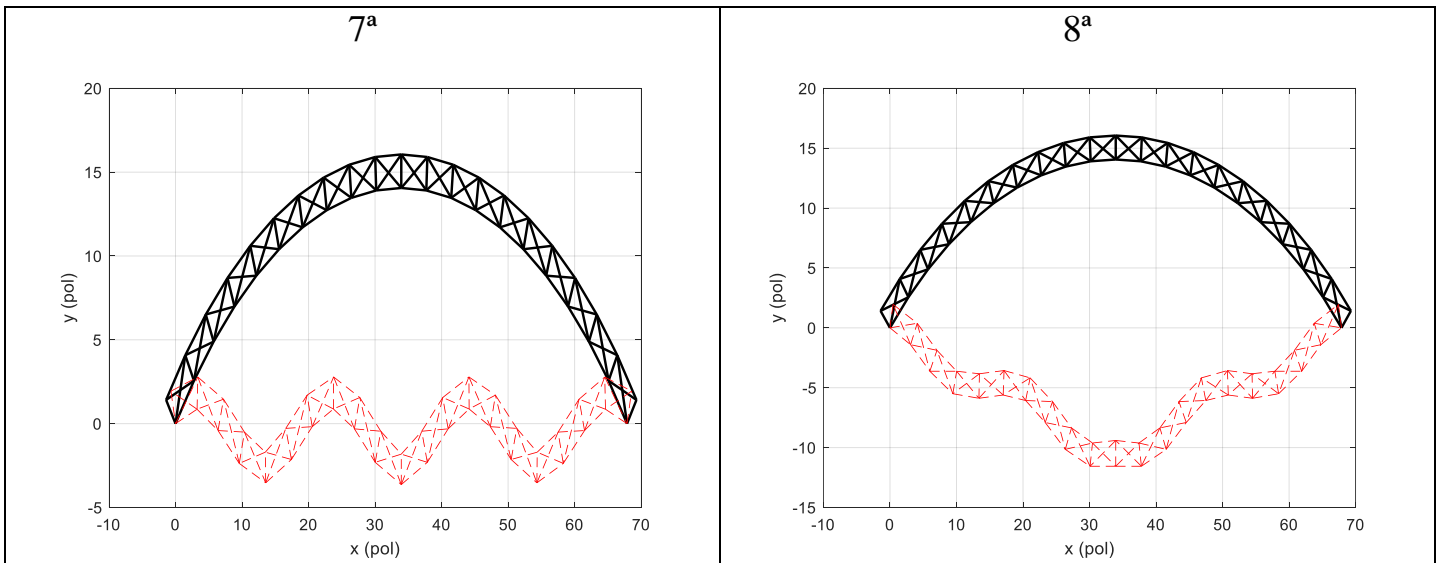
Figura 4.4 - Caminhos de equilíbrio para o Arco treliçado de Crisfield



Fonte: O autor

Figura 4.5 - Arco treçado de Crisfield nas configurações indeformada e deformada (em cada uma das etapas do caminho de equilíbrio)



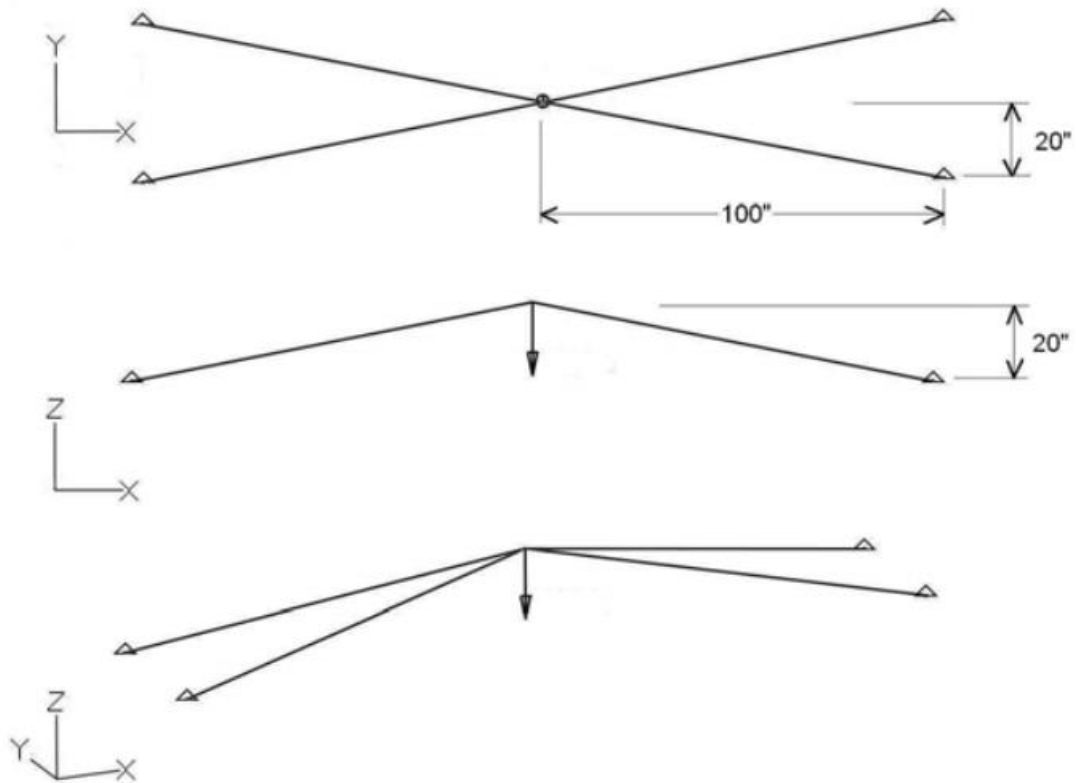


Fonte: O autor

4.3. TRELIÇA ESPACIAL COM 4 BARRAS

O problema ilustrado na figura 4.6 foi estudado por Hrinda (2010), e trata-se de uma treliça espacial com quatro barras e cinco nós. Os nós externos estão distantes 100 polegadas ao longo do eixo x em relação ao nó central e 20 polegadas ao longo do eixo y , também em relação ao nó central. O nó central está 20 polegadas acima dos outros 4 nós (20 polegadas no eixo z), o que transforma o elemento em uma treliça rasa. Uma carga vertical (na direção do eixo z) de intensidade $1,0 \times 10^4$ lb é aplicada no nó central, causando o fenômeno de *snap-through*. A área da seção transversal das barras é $A = 1,0$ pol² e o módulo de elasticidade é $E = 1,0 \times 10^6$ lb/pol².

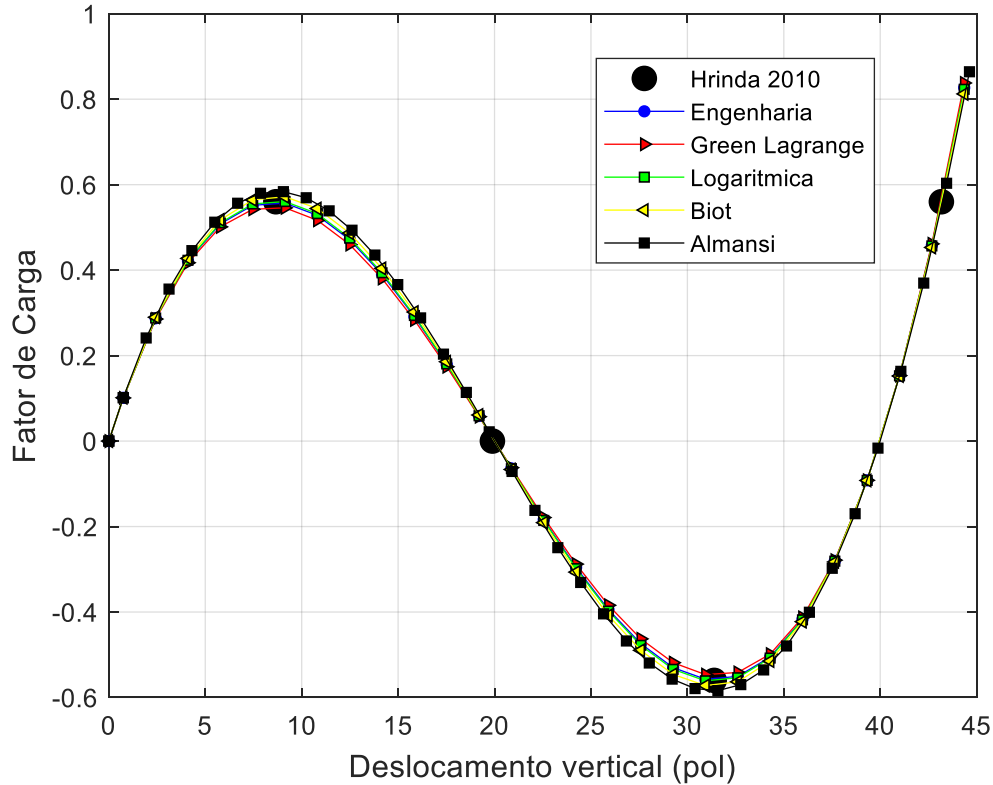
Figura 4.6 - Treliça espacial de 4 barras e cinco nós



Fonte: Hrinda (2010)

Na figura 4.7 aparecem os caminhos de equilíbrio da estrutura com dois pontos limites de força, obtidos com as diferentes medidas de deformação (Engenharia, Green-Lagrange, Biot, Almansi e Logarítmica). Alguns pontos de equilíbrio obtidos por Hrinda (2010) estão indicados nessa figura. As trajetórias de equilíbrio foram obtidas considerando as formulações Posicional e Corrotacional de Elementos Finitos e adotaram-se os seguintes valores para os parâmetros de entrada dos métodos de solução: $\Delta l^{(0)} = 0,75$; $tol = 10^{-7}$; e $k_d = 5$. Na tabela 4.2 aparecem os resultados numéricos (NP , $k_{máx}$, $k_{médio}$ e t) obtidos com ambas formulações de elementos finitos utilizando a medida de deformação de engenharia.

Figura 4.7 - Caminhos de equilíbrio encontrado do nó central para a treliça espacial para as diferentes medidas de deformação



Fonte: O autor

Tabela 4.2 – Treliça espacial - Resultados numéricos com os métodos de solução

Formulação Corrotacional de Elementos Finitos				
Método de Solução	NP	$k_{máx}$	$k_{médio}$	t (s)
NR	27	27	1	0,008227
NRM	27	27	1	0,007799

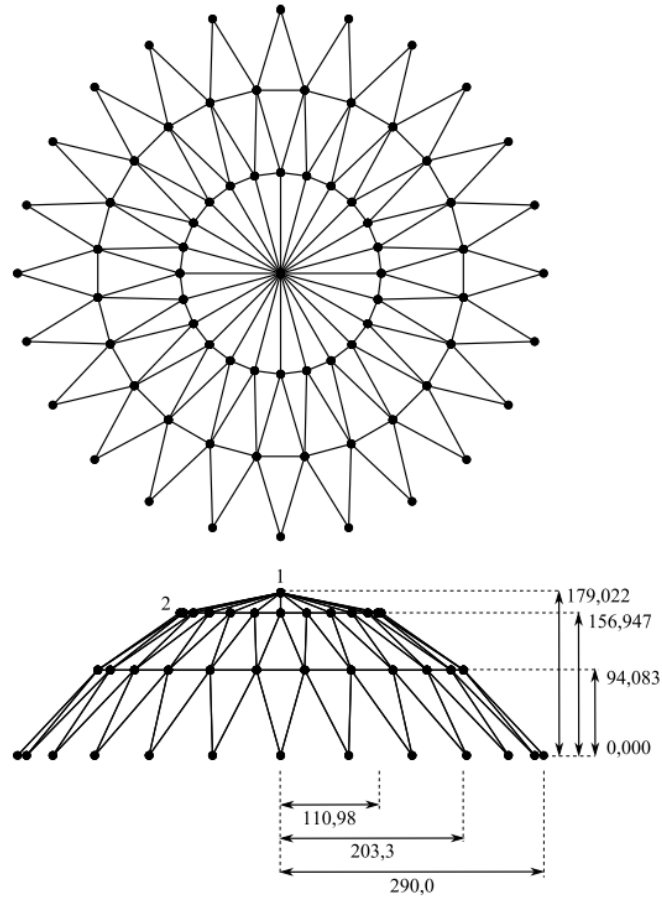
4.4. CÚPULA DE TRELIÇA COM 168 BARRAS

A cúpula de treliça com 168 barras é ilustrada na Figura 4.8 com suas dimensões. Uma carga unitária é aplicada no ápice na treliça que possui altura de 8,816. A rigidez das barras é $EA = 10^4$. Esta treliça apareceu em Forde e Stiemer (1987) e Papadrakakis (1981).

O caminho de equilíbrio foi traçado usando o código computacional elaborado pelo autor usando tolerância igual a 10^{-4} para as formulações corrotacional e posicional. Nesta treliça foi utilizada a deformação de engenharia. Os resultados do deslocamento vertical do nó

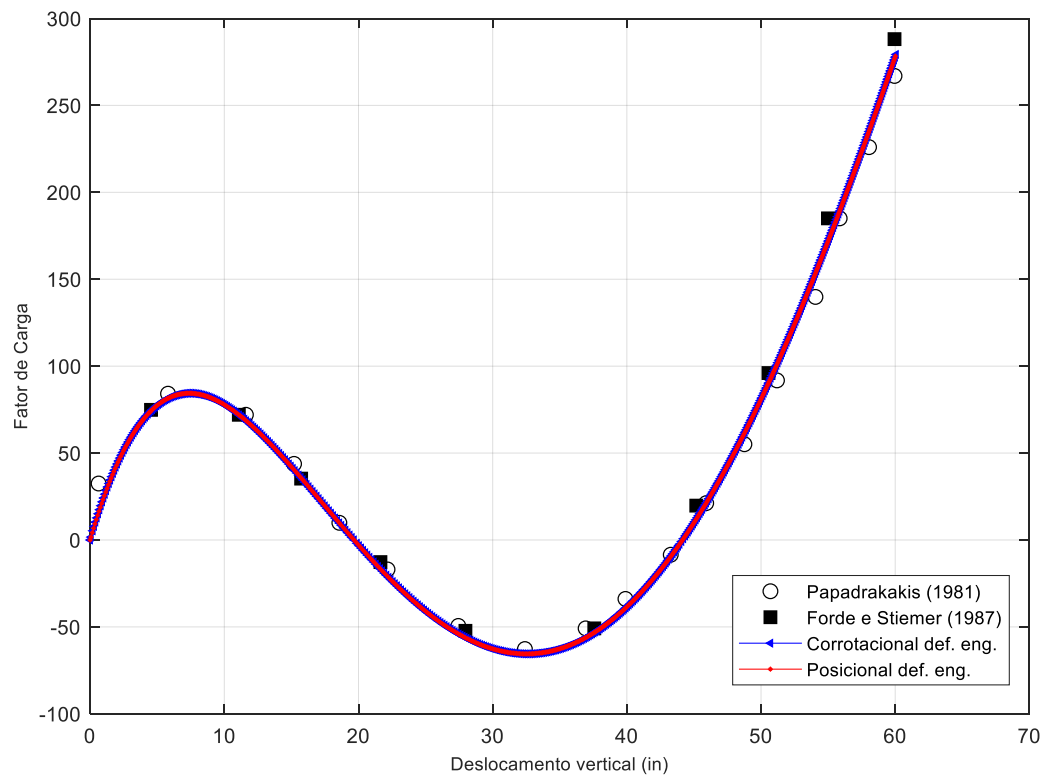
1 (Figura 4.9) foi comparado com Forde e Stiemer (1987) e Papadrakakis (1981) e apresentaram boa concordância. A Figura 4.10 e 4.11 apresentam a cúpula deformada pela carga aplicada.

Figura 4.8 – Cúpula treliçada com 168 barras



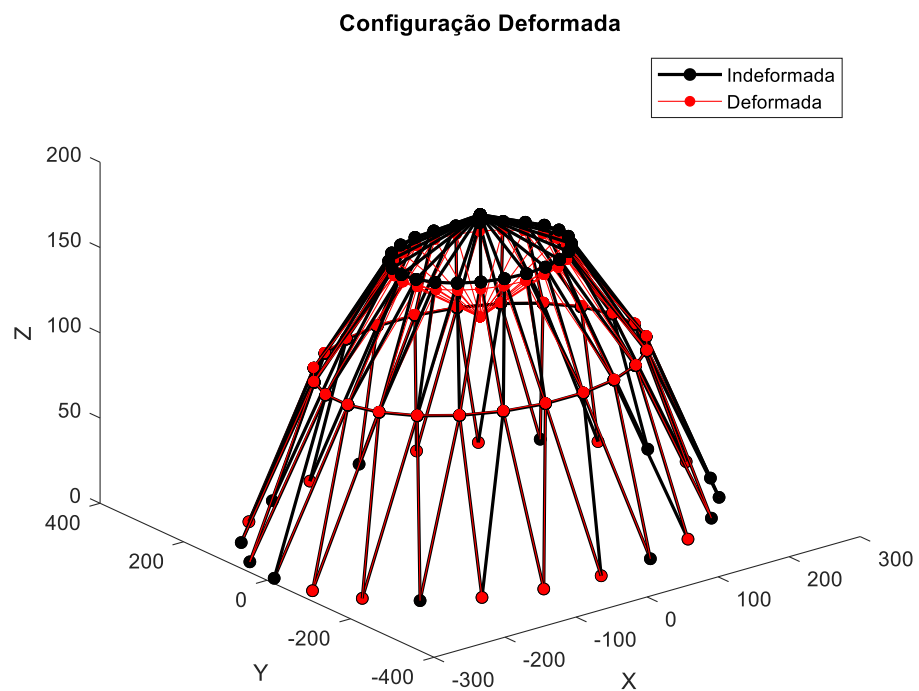
Fonte: Forde; Stiemer (1987)

Figura 4.9 – Caminho de equilíbrio (deslocamento vertical do nó 1)



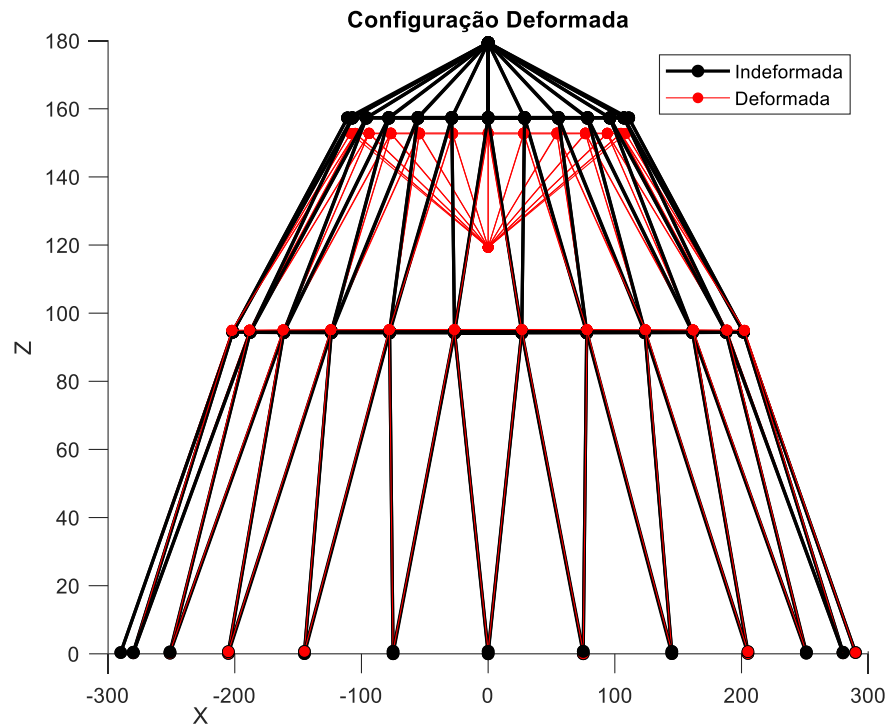
Fonte: O autor

Figura 4.10 – Vista isométrica da cúpula em sua configuração indeformada e deformada



Fonte: O autor

Figura 4.11 - Vista frontal da cúpula em sua configuração indeformada e deformada



Fonte: O autor

Tabela 4.3 – Cúpula 168 Barras - Resultados numéricos com os métodos de solução

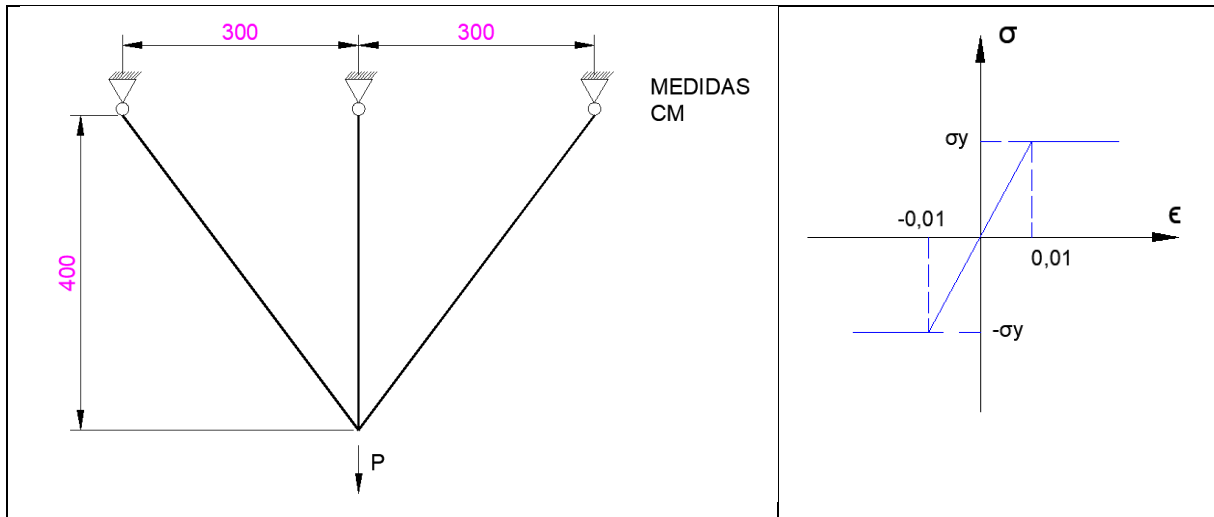
Formulação Posicional de Elementos Finitos				
Método de Solução	<i>NP</i>	<i>k_{máx}</i>	<i>k_{médio}</i>	<i>t (s)</i>
NR	607	1594	2,63	11,8776
NRM	608	1600	2,63	10,4628
Formulação Corrotacional de Elementos Finitos				
Método de Solução	<i>NP</i>	<i>k_{máx}</i>	<i>k_{médio}</i>	<i>t (s)</i>
NR	536	1067	1,99	8,9350
NRM	536	1067	1,99	7,6000
POTRA-PTAK	381	381	1,00	4,9397
PETKOVIC	381	381	1,00	6,0926
MOHIT	381	381	1,00	5,2886

4.5. TRELIÇA PLANA ELASTOPLÁSTICA DE 3 BARRAS

Esse exemplo mostra o comportamento não linear do material de uma treliça plana (2D). A geometria e o modelo constitutivo elastoplástico são mostrados na figura 4.12. Para rodar esse exemplo, foi modelado 3 elementos finitos de treliça e aplicado carga unitária vertical para baixo no nó que une os três elementos. Foram adotados para cada elemento a rigidez $EA =$

10^4 kN e a tensão de escoamento igual a $\sigma_y = 10 \text{ kN/cm}^2$. Adotaram-se os seguintes valores para os parâmetros de entrada dos métodos de solução: $\Delta l^{(0)} = 0,05$; $tol = 10^{-10}$; e $k_d = 5$. Esse exemplo apareceu em Greco et al. (2006).

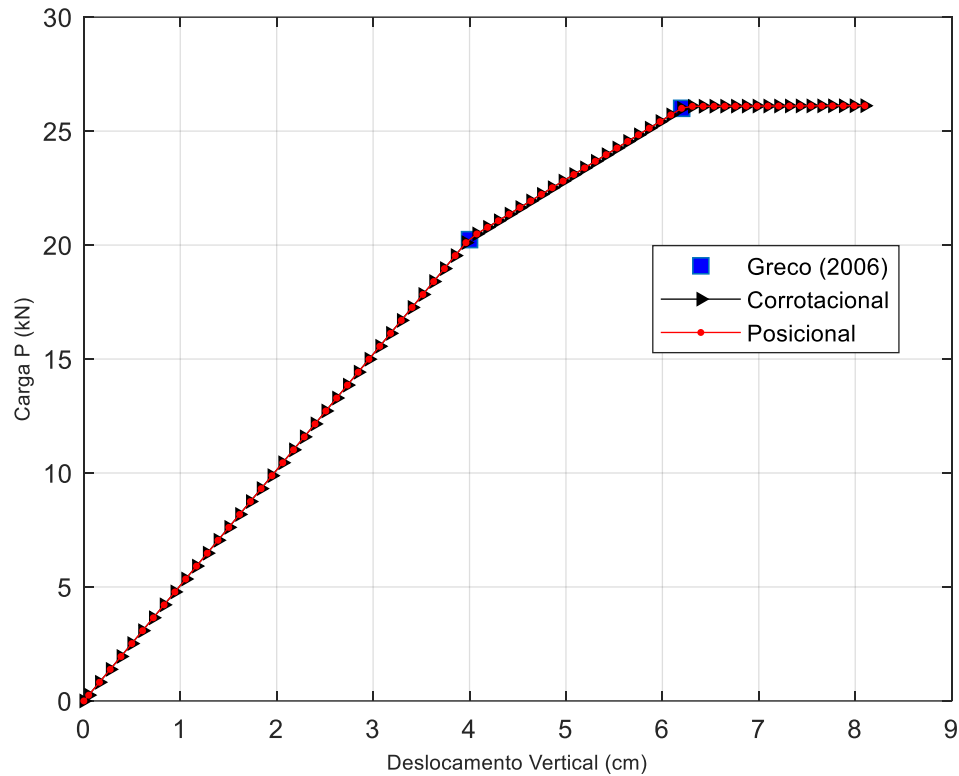
Figura 4.12 – Estrutura treliça plana elastoplástica 3 barras e modelo constitutivo elastoplástico do material



Fonte: Adaptado de Greco et al., (2014)

O caminho de equilíbrio foi traçado usando o código computacional elaborado pelo autor usando as formulações corrotacional e posicional. Nesta treliça foi utilizada a deformação de engenharia. Os resultados do deslocamento vertical do nó onde é aplicada a força (Figura 4.13) foi comparado com Greco et al. (2006) e apresentaram boa concordância. A tabela 4.4 compara o desempenho das duas formulações para traçar o caminho de equilíbrio para o carregamento e descarregamento da estrutura.

Figura 4.13 – Caminho de equilíbrio da estrutura de 3 barras com não linearidade física



Fonte: O autor

Tabela 4.4 – Não linearidade física - Resultados numéricos com os métodos de solução

Formulação Posicional de Elementos Finitos				
Método de Solução	<i>NP</i>	<i>k_{máx}</i>	<i>k_{médio}</i>	<i>t (s)</i>
NR	73	73	1	0,01192
NRM	73	73	1	0,00976
Formulação Corrotacional de Elementos Finitos				
Método de Solução	<i>NP</i>	<i>k_{máx}</i>	<i>k_{médio}</i>	<i>t (s)</i>
NR	73	73	1	0,01864
NRM	73	73	1	0,01612

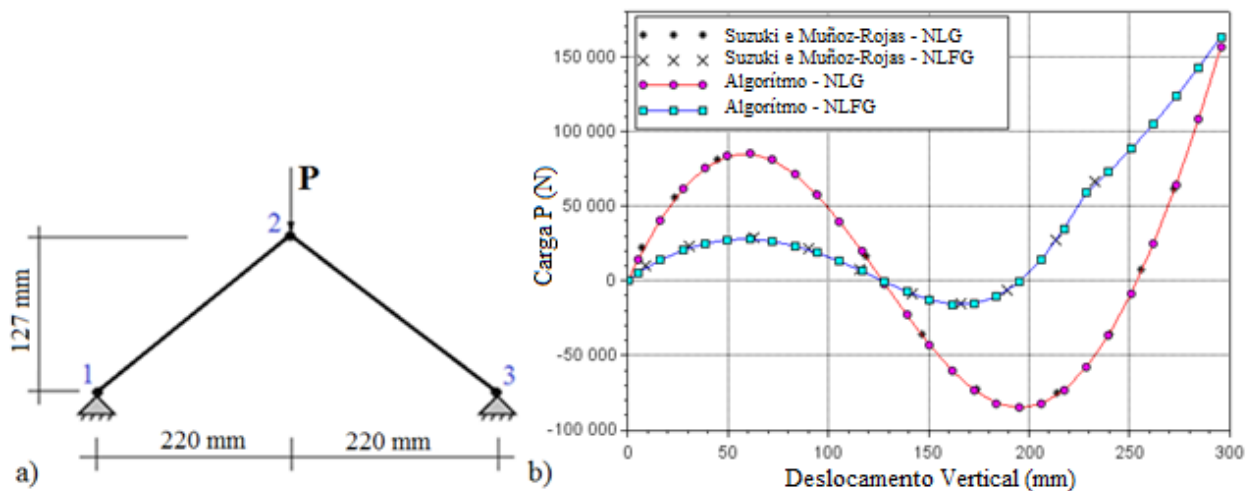
4.6. TRELIÇA DE 2 BARRAS

O exemplo a seguir foi apresentado por Suzuki e Muñoz-Rojas (2014) e trata de um exemplo muito similar ao já apresentado em 4.1, porém com as diferenças apresentadas a seguir.

O exemplo foi estudado com duas barras, área da seção transversal das barras $A = 7 \text{ mm}^2$, conforme mostrado na figura 4.14a e diferente do primeiro exemplo, nesse caso foi feita análise considerando a não linearidade física e a geométrica ao mesmo tempo. Para o material das barras foi considerado relação constitutiva elastoplástico com encruamento positivo. As propriedades do material consideradas foram: Módulo de elasticidade $E_0 = 210 \text{ kN/mm}^2$; módulo de encruamento isotrópico $H = 100 \text{ kN/mm}^2$; e tensão de escoamento $\sigma_y = 150 \text{ kN/mm}^2$. Em 4.14b são apresentados caminhos de equilíbrios considerando as análises não linear geométrica e não linear geométrica em conjunto com a física. Foi verificado uma boa concordância entre os caminhos obtidos pelo autor e os pontos de equilíbrio obtidos por Suzuki e Muñoz-Rojas (2014).

Foi considerada a deformação logarítmica e método de solução de Newton-Raphson e adotaram-se os seguintes valores para os parâmetros de entrada dos métodos de solução: $\Delta l^{(0)} = 5,0$; $k_{max} = 150$; $tol = 10^{-10}$; $\Delta P = 1,0 \text{ kN}$ e $k_d = 5$.

Figura 4.14 – a) Treliza com 2 barras; b) Caminhos de equilíbrio

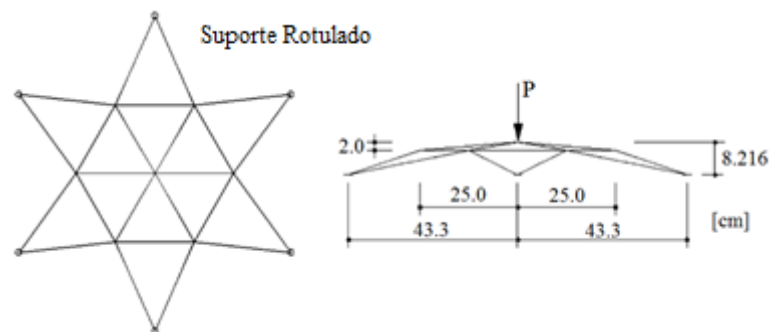


Fonte: a) Adaptado de Suzuki e Muñoz-Rojas (2014); b) O Autor

4.7. DOMO EM ESTRELA DE 24 BARRAS

Este exemplo apresenta o comportamento não linear de um domo em forma de estrela. A geometria e a carga são apresentadas na figura 4.15. A geometria consiste em 24 elementos finitos (barra) e 13 nós. Foi considerada relação constitutiva elastoplástico perfeitamente plástico ($H = 0$). Para cada barra foi considerado $E_0 = 3,0 \times 10^4 \text{ N/cm}^2$, $A = 3,17 \text{ cm}^2$ e $\sigma_y = 200 \text{ N/cm}^2$. Esse é outro exemplo clássico da literatura sobre análise não linear e foi estudado por Greco et al (2006). Foi considerada na análise a deformação de engenharia.

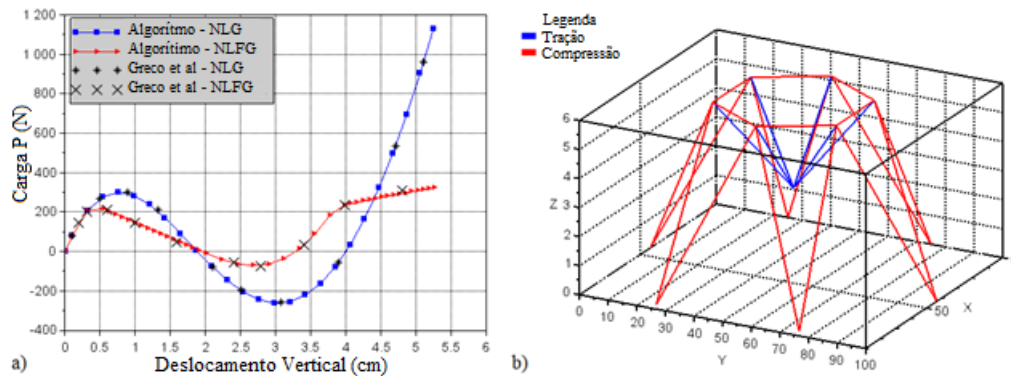
Figura 4.15 – Domo em formato de estrela



Fonte: a) Adaptado de Greco et al (2006)

A figura 4.16a mostra a resposta obtida do algoritmo implementado para os casos de não linearidade geométrica (NLG) e para o caso de não linearidade e física e geométrica (elastoplástico – NLFG), com uma boa convergência de resultados comparados com de Greco et al (2006). Os parâmetros considerados na análise foram $\Delta l^{(0)} = 0,1$; $k_{max} = 150$; $tol = 10^{-8}$; $\Delta P = 1,0 \text{ N}$ e $k_d = 5$. A figura 4.16b mostra a posição deformada do domo com a indicação de elementos comprimidos (em vermelho) e tracionados (em azul) para a análise NLG. Na tabela 4.5 a é apresentada uma comparação entre métodos de solução para análise NLFG.

Figura 4.16 – a) Caminhos de Equilíbrio; b) Posição deformada



Fonte: O Autor

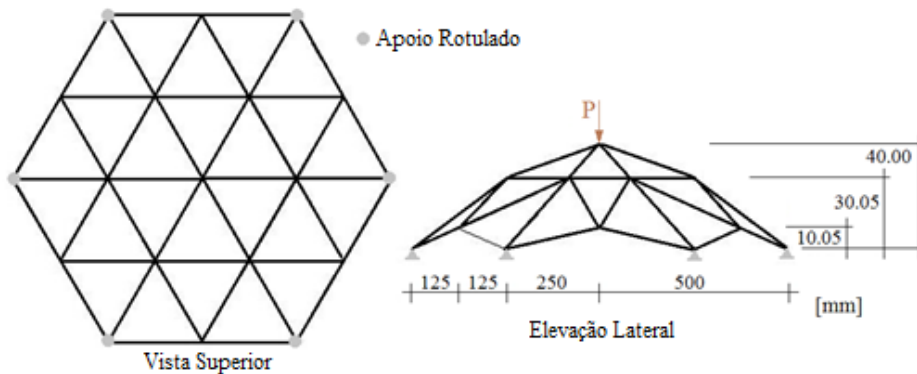
Tabela 4.5 – Domo em formato de estrela – resultados numéricos para análise NLFG

Método de Solução	NP	$k_{máx}$	$k_{médio}$	t (s)
NR	72	888	12,333	23,2967
NRM	76	939	12,355	9,61944

4.8. TRELIÇA ESPACIAL COM 42 BARRAS

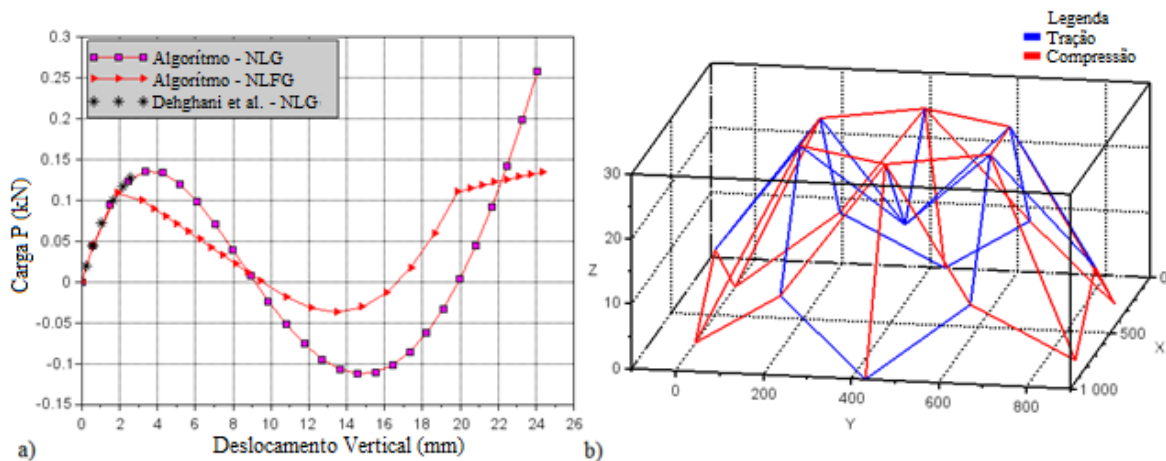
A treliça espacial apresentada na figura 4.17 é constituída por 42 barras e 19 nós e apoios rotulados. Foi considerada relação constitutiva elastoplástico perfeitamente plástico ($H = 0$). As propriedades de seção transversal são iguais para todas as barras com módulo de elasticidade $E_0 = 211,67 \text{ kN/mm}^2$, a tensão de escoamento $\sigma_y = 0,04 \text{ kN/mm}^2$ e área $A = 16 \text{ mm}^2$. Uma carga concentrada P é aplicada no topo da estrutura. Este exemplo foi estudado por Dehghani et al. (2020). A curva carga-deslocamento é apresentada na figura 4.18a. A posição deformada da treliça espacial com indicação das barras comprimidas (em vermelho) e tracionadas (em azul) para análise NLG é apresentada na figura 4.18b. A tabela 4.6 apresenta a comparação entre os métodos de solução. Os parâmetros considerados na análise foram $\Delta l^{(0)} = 0,6$; $k_{max} = 150$; $tol = 10^{-6}$; $\Delta P = 0,03 \text{ N}$ e $k_d = 5$. Neste exemplo foi considerado a deformação de Green-Lagrange.

Figura 4.17 – Treliça espacial de 42 barras



Fonte: Adaptado de Dehghani et al. (2020)

Figura 4.18 – a) Caminhos de equilíbrio; b) Posição deformada



Fonte: O Autor

Tabela 4.6 – Treliça espacial de 42 barras – resultados numéricos para análise NLFG

Método de Solução	NP	$k_{máx}$	$k_{médio}$	t (s)
NR	43	331	7,6977	0,85528
NRM	47	358	7,6170	0,79268
POTRA-PTAK	38	266	7,0000	0,49388
PETKOVIC	41	286	6,9756	0,72516
MOHIT	28	81	2,8929	0,20024

4.9. DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Nos exemplos 4.1 e 4.3, foram testadas várias medidas de deformação, conforme demonstrado. A diferença da formulação de cada uma fica claro no traçado do caminho de equilíbrio dos problemas propostos.

Nota-se concordância entre as diferentes medidas de deformação inclusive entre os diferentes problemas. A deformação de Almansi foi a que mais se distanciou do eixo horizontal,

ou seja, a que precisou do maior e posteriormente do menor fator de carga para chegar ao ponto limite de força.

O exemplo 4.2 foi utilizado para comparar os diferentes resultados entre as formulações posicional e corrotacional para uma estrutura de treliça plana. Comparado com os resultados de Hrinda (2010) notasse uma boa concordância com os pontos limites para ambas as formulações. Para esse caso, a formulação posicional se mostrou vantajosa com menos passos de força, menos iterações e menor tempo de processamento. Nas duas formulações, o método de Newton-Raphson Modificado (NRM) se mostrou mais eficiente que o método de Newton-Raphson Padrão (NR).

Já o exemplo 4.4 foi utilizado para comparar os diferentes resultados entre as formulações posicional e corrotacional para uma estrutura de treliça espacial. Comparado com os resultados de Forde e Stiemer (1987) e Papadrakakis (1981) notasse uma boa concordância com os pontos limites para ambas as formulações. Para esse caso, a formulação corrotacional se mostrou vantajosa com menos passos de força, menos iterações e menor tempo de processamento utilizando os métodos de NR e NRM. Devido ao grande número de passos de carga, iterações e tempo de processamento nas primeiras análises desse problema, o mesmo foi escolhido para que se testasse os outros métodos de solução, sendo eles o método de Potra-Pták, Petkovic e Petkovic e Mohit *et al.*

Os números de passos de força e de iterações se igualaram entre os três métodos, sendo menores que os dois primeiros, NR e NRM, porém o melhor tempo de processamento ocorreu quando a estrutura foi analisada utilizando-se o Potra-Pták. Isso deve-se ao fato de que, apesar de ter uma ordem de convergência menor que o método de Mohit, o custo computacional dele é menor e, como o caminho de equilíbrio não tem muitos pontos limites, o custo computacional menor fez diferença.

O exemplo 4.5 foi utilizado para validar o código computacional utilizado pelo autor quanto a análise não linear física, elastoplasticidade. O exemplo foi implementado utilizando-se da formulação posicional e corrotacional e por mais que seja um exemplo simples, nota-se uma ligeira vantagem em relação ao tempo de processamento utilizando-se a formulação posicional. Nota-se também uma boa concordância com o mesmo exemplo publicado por Greco (2006).

Os exemplos 4.6, 4.7 e 4.8 foram implementados utilizando a formulação corrotacional de elementos finitos com as não linearidades geométricas e físicas concomitantemente.

O exemplo 4.6 é uma estrutura plana composta por 2 elementos de treliça. O mesmo foi estudado para validar o código em que as duas não linearidades atuassem ao mesmo tempo. É possível observar uma boa concordância com os resultados de Suzuki e Muñoz-Rojas (2014).

Já o exemplo 4.7 é uma estrutura espacial de 24 barras usado para validar o código anterior mas para estruturas espaciais e foi feito uma comparação entre os métodos de solução de NR e NRM. O código computacional funcionou corretamente como é possível observar pela concordância dos pontos apresentados por Greco et al (2006). Para este problema, apesar da maior quantidade de passos de carga e mais iterações, o tempo de processamento do método NRM foi vantajoso quando comparado com NR.

Por último, o exemplo 4.8, uma estrutura espacial de 42 barras, foi selecionado a ser estudado com todos os métodos de solução apresentados neste trabalho, já que o mesmo possui mais elementos e conseqüentemente mais quantidade de dados a serem processados. O código foi validado devido a concordância com os pontos apresentados por Dehghani et al. (2020). Nesse caso, além da quantidade de dados processados serem grandes, temos duas não linearidades sendo aplicadas, fato esse que levou o método de Mohit *et al.* a ser mais vantajoso que os outros devido ao seu maior grau de convergência.

5 CONCLUSÃO

Análise estrutural avançada, incluindo os efeitos de não linearidade, formulações diferentes para o método dos elementos finitos, deformações diferentes e métodos de soluções diferentes são ferramentas que permitem um aprofundamento no entendimento do comportamento estrutural nos seus limites de estabilidade. O objetivo desse trabalho era implementar um código computacional para análise não linear física e geométrica de treliças planas e espaciais, utilizando as formulações corrotacional e posicional de Elementos Finitos, diferentes medidas de deformação e métodos de solução de sistemas de equações não lineares.

Os resultados numéricos mostraram boa concordância com alguns clássicos problemas estruturais não lineares apresentado por diversos autores, validando assim o código computacional.

Eles também mostraram que os métodos de Potra-Pták e Mohit tiveram vantagens quando comparados com os clássicos NR e NRM.

Os caminhos de equilíbrio traçados mostraram que as estruturas têm comportamentos diferentes quando considerado que a não linearidade física atua junto com a não linearidade geométrica. O efeito da elastoplasticidade pode ser uma excelente maneira de caracterizar a perda de rigidez e pode ser considerado junto com o efeito não linear geométrico de grandes deslocamentos.

Para trabalhos futuros sugere-se a implementação de outras técnicas de continuação como por exemplo Comprimento de Arco Cilíndrico. Também a implementação de outra teoria de não linearidade física como a mecânica do dano e por último a implementação do efeito da flambagem em elementos comprimidos.

REFERÊNCIAS

- BATOZ, J. -L; DHATT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262–1267, 1979.
- BORST, R. et al. **Nonlinear finite element analysis of solids and structures**. 2^a ed. New Jersey: Wiley, 2012.
- CHAPRA, S. C.; CANELE, R. P. **Métodos Numéricos para Engenharia**. 5^a ed. New York: McGrawHill, 2008.
- CODA, H. .; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33–35, p. 3541–3557, ago. 2004.
- CRISFIELD, M. A. A Fast Incremental / Iterative Solution Procedure That Handles "Snap-Through". **Computers & Structures**, v. 13, p. 55–62, 1981.
- CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. New York: John Wiley & Sons, 1991.
- DEHGHANI, H.; MANSOURI, I.; FARZAMPOUR, A. Improved Homotopy Perturbation Method for Geometrically Nonlinear Analysis of Space Trusses. **Applied Sciences** 10(8), 2987, 2020.
- DE SOUZA NETO, E. A.; FENG, Y. T. On the determination of the path direction for arc-length methods in the presence of bifurcations and “snap-backs”. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 179, n. 1–2, p. 81–89, 1999.
- FENG, Y. T.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. Determination of travel directions in path-following methods. **Mathematical and Computer Modelling**, v. 21, n. 7, p. 43–59, 1995.
- FENG, Y. T.; PERIĆ, D.; OWEN, D. R. J. A new criterion for determination of initial loading

parameter in arc-length methods. **Computers and Structures**, v. 58, n. 3, p. 479–485, 1996.

FORDE, B. W. R.; STIEMER, S. F. Improved arc length orthogonality methods for nonlinear finite element analysis. **Computers and Structures**, v. 27, n. 5, p. 625–630, 1987.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. **Métodos Numéricos para Engenheiros e Cientistas**. Porto Alegre: Bookman, 2008.

GRECO, M. et al. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, n. 12, p. 1079–1086, ago. 2006.

HRINDA, G. A. Snap-through instability patterns in truss structures. Collection of Technical Papers - AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference. **Anais...** 2010

KRENK, S. **Non-Linear Modeling and Analysis of Solids and Structures**. Cambridge: Cambridge University Press, 2009.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. 2014. 92f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LAM, B. W. F.; MORLEY, C. T. Arc-length method for passing limit points in structural calculation. **Journal of Structural Engineering** v. 118, n. 1, p. 169–185, 1992.

LEGGERINI, M. R. C.; KALIL, S. B. Apostila da disciplina de Mecânica dos Sólidos. p. 1–9, 2010.

LEON, S. E. et al. A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes. **Applied Mechanics Reviews** v. 64, n. Julho, 2011.

LOURENÇO, P. B. **Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear**. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, 1999.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D. DA; SILVEIRA, R. A. DA M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches.

Rem: Revista Escola de Minas, v. 67, n. 2, p. 143–150, 2014.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas.**

2006. p. 172. Tese (Doutorado em Estruturas e Construção Civil) - Universidade de Brasília: Brasília, 2006.

MOHIT, M.; SHARIFI, Y.; TAVAKOLI, A. Geometrically nonlinear analysis of space trusses using new iterative techniques. **Asian Journal of Civil Engineering**, v. 21, n. 5, p. 785–795, 2020.

OLIVEIRA, C. M. Progressive Collapse of Spatial Trusses. **Instituto Superior Técnico**. 2017.

OLIVEIRA, L. D. et al. Análise dinâmica não linear geométrica de treliças planas. **REEC - Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 13, n. 2, 19 abr. 2017.

PAPADRAKAKIS, M. Post-buckling analysis of spatial structures by vector iteration methods. **Computers and Structures**, v. 14, n. 5–6, p. 393–402, 1981.

PETKOVIC, M.; PETKOVIC, L. Families of optimal multipoint methods for solving nonlinear equations : a survey. **Applicable Analysis and Discrete Mathematics**. v. 4, p. 1–22, 2010.

PINHEIRO, L. Análise da estabilidade elástica de treliças espaciais. **Rem: Revista Escola de Minas**. 57(2), p. 85-92, 2004.

REZAIIEE-PAJAND, M.; NASERIAN, R. Using residual areas for geometrically nonlinear structural analysis. **Ocean Engineering**, v. 105, p. 327–335, 2015.

RIKS, E. The application of newton's method to the problem of elastic stability. **Journal of Applied Mechanics, Transactions ASME**, v. 39, n. 4, p. 1060–1065, 1972.

RIKS, E. an Incremental Approach To the Solution. **International Journal of Solids and Structures**, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

RODRIGUES, E. A. **Um modelo constitutivo de dano composto para simular o comportamento de materiais quase-frágeis**. 2011. 98f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica) - Universidade Estadual Paulista, Bauro, 2011.

SAFFARI, H.; MANSOURI, I. International Journal of Non-Linear Mechanics Non-linear analysis of structures using two-point method. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 46, n. 6, p. 834–840, 2011.

SEÇER, M. Inelastic and large deformation analyses of plane trusses. **Technology**. v. 12, n. 3, p. 175–184, 2009.

SHARIFI, M.; BABAJEE, D. K. R.; SOLEYMANI, F. Finding the solution of nonlinear equations by a class of optimal methods. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 63, n. 4, p. 764–774, 2012.

SILVA, J. L. E. **Formulações Corrotacionais 2D para Análise Geometricamente Não Linear de Estruturas Reticuladas**. 2016. 115f. Dissertação (Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil) - Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Novembro, 2016.

SOUZA, A. S. C. **Análise Teórica E Experimental De Treliças Espaciais**. 2003. 350f. Tese (Doutorado em Engenharia de Estruturas) - Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

SOUZA, A. N. DE; MALITE, M. Análise do projeto de estruturas metálicas espaciais : ênfase em coberturas. **Cadernos de Engenharia de Estruturas**. v. 7, p. 27–58, 2005.

SOUZA, L. A. F. Método de Potra-Pták adaptado a problemas não lineares de pórticos planos. SIMPÓSIO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA, 2017. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2017.

SUZUKI J.L.; MUÑOZ-ROJAS P.A. Transient analysis of geometrically non-linear trusses considering coupled plasticity and damage. In: *10th World Congress on Computational Mechanics, Blucher Mechanical Engineering Proceedings*, Maio 2014, vol. 1, num. 1. pp. 322–341.

TRINH, M. -C.; JUN, H. A Higher-order quadrilateral shell finite element for geometrically nonlinear analysis. **European Journal of Mechanics / Solids**, (89) 2021.

WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.

YAW, L. L. 2D Corotational Beam Formulation. **Walla Walla University**. Disponível em: <<https://gab.wallawalla.edu/~louie.yaw/publications.html>>. p. 1–17, 2009a.

YAW, L. L. 2D Co-rotational Truss Formulation. **Walla Walla University**. Disponível em: <<https://gab.wallawalla.edu/~louie.yaw/publications.html>>. p. 1–15, 2009b.

YAW, L. L. 3D Co-rotational Truss Formulation. **Walla Walla University**. Disponível em: <<https://gab.wallawalla.edu/~louie.yaw/publications.html>>. p. 1–11, 2011.

ZHONG, J.; ROSS, S. D. Differential correction and arc-length continuation applied to boundary value problems: Examples based on snap-through of circular arches. **Applied Mathematical Modelling**, v. 97, p. 81-95, 2021.

ZHOU, Z.; MURRAY, D. W. An incremental solution technique for unstable equilibrium paths of shell structures. **Computers and Structures**, v. 55, n. 5, p. 749–759, 1995.