



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

**AVALIAÇÃO MECÂNICA DE PAINÉIS DE MADEIRA LAMELADA
COLADA CRUZADA VIA TEORIAS DE PLACAS, MÉTODOS
NUMÉRICOS E SIMPLIFICADOS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil/PCV da Universidade Estadual de Maringá como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Engenharia de Estruturas e Geotecnia.

Aluno: CAUÊ IZELLI DOS SANTOS

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Miotto

MARINGÁ
2022

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

S237a

Santos, Cauê Izelli dos

Avaliação mecânica de painéis de madeira lamelada colada cruzada via teoria de placas, métodos numéricos e simplificados / Cauê Izelli dos Santos. -- Maringá, PR, 2022. 338 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. José Luiz Miotto.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2022.

1. Madeira lamelada colada cruzada. 2. Estruturas de madeira (Construção civil) - Teoria clássica de placas. 3. Teorias de deformação de cisalhamento. 4. Teoria de *Rankine-Grasshoff*. 5. Memétodo dos elementos finitos. I. Miotto, José Luiz, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 23.ed. 624.184

CAUÊ IZELLI DOS SANTOS

**AVALIAÇÃO MECÂNICA DE PAINÉIS DE MADEIRA LAMELADA COLADA
CRUZADA VIA TEORIA DE PLACAS, MÉTODOS NUMÉRICOS E SIMPLIFICADOS**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 22/02/2022, julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

BANCA EXAMINADORA



Prof. Dr. José Luiz Miotto

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Orientador



Prof. Dr. Leandro Vanalli

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Prof. Dr. Nilson Tadeu Mascia

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Campinas

AGRADECIMENTOS

A priori, agradeço aos meus pais pelo apoio ao longo de mais uma jornada.

Agradeço também ao meu orientador, o professor Dr. José Luiz Miotto, por me auxiliar na escolha do tema e no desenvolvimento do presente trabalho.

Ademais, gostaria de estender meus agradecimentos a todos os professores e funcionários que estiveram de alguma forma envolvidos com o Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil/PCV da Universidade Estadual de Maringá.

RESUMO

SANTOS, C. I. **Avaliação mecânica de painéis de madeira lamelada colada cruzada via teoria de placas, métodos numéricos e simplificados**. 2022. 338 f. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil/PCV, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2022.

No estudo dos painéis de madeira lamelada colada cruzada (MLCC), encontra-se como grande desafio a consideração conjunta da disposição ortogonal das lamelas com o comportamento ortótropo da madeira. Uma das formas possíveis de se avaliar o comportamento estrutural deste produto é por meio das teorias de placas, isto é, de análises estruturais bidimensionais. Neste contexto, é que se insere o presente trabalho, o qual se propôs a analisar um dado painel de MLCC por meio de três distintas teorias de placas: a teoria clássica de placas (ou teoria de Kirchhoff), a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem e a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem. Além do emprego das referidas teorias de placas, optou-se, para fins comparativos, por avaliar o painel de MLCC proposto por meio de três métodos analíticos unidimensionais comumente utilizados na prática de projetos - Método Gama, Método κ e Método de Analogia ao Cisalhamento – e também por meio do Método dos Elementos Finitos, valendo-se para isso do *software* ADINA. Em complemento, com vista a dar uma maior contribuição ao estudo, foi apresentada uma nova proposta de cálculo destes painéis, que pode ser entendida como sendo uma adaptação da consagrada Teoria de Rankine-Grasshoff para o cálculo das lajes de concreto armado. Mais especificamente em relação ao objeto de estudo, foi considerado inicialmente um painel de MLCC quadrado, com 3,0 m de lado, composto por cinco camadas de lamelas de 20 mm e sujeito a um carregamento transversal uniformemente distribuído com intensidade de 5,0 kN/m². Posteriormente, foram também estipuladas variações paramétricas da razão entre as dimensões em planta e da razão espessura/vão do painel proposto, a fim de averiguar a sua sensibilidade estrutural frente a essas variações. Destarte, com a aplicação de todos os métodos aludidos, foi possível a obtenção das tensões – normais e cisalhantes – e dos deslocamentos verticais máximos para o painel de MLCC objeto de estudo e suas variações paramétricas. De posse das magnitudes das grandezas de interesse, pôde-se atestar, de forma geral, uma boa concordância entre os resultados fornecidos pelos distintos métodos de análise estrutural, excetuando-se os casos referentes às tensões de cisalhamento transversais e aos painéis com razão entre dimensões em planta igual a 1,0. Por fim, os valores críticos das flechas e das tensões, normais e de cisalhamento, foram verificados à luz da filosofia de projeto dos Estados Limites Último e de Serviço, seguindo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020. Em conformidade com os critérios da referida norma, concluiu-se que o painel de MLCC proposto, assim como todas as suas variações paramétricas, seriam viáveis para serem empregados em situações reais de projeto, independentemente do método de cálculo escolhido.

Palavras-chave: madeira lamelada colada cruzada; teoria clássica de placas; teorias de deformação de cisalhamento; métodos analíticos simplificados; teoria de Rankine-Grasshoff; método dos elementos finitos

ABSTRACT

SANTOS, C. I. **Mechanical evaluation of cross laminated timber panels through plate theories, numerical and simplified methods**. 2022. 338 f. M.Sc. Dissertation – Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil/PCV, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2022.

In the study of Cross laminated timber (CLT), the main challenge consists in the joint consideration of the orthogonal arrangement of the lamellae and the orthotropic mechanical behaviour of wood. One of the many ways to evaluate the structural behaviour of this product is via plate theories or, in other words, through theories that allow two-dimensional structural analysis. The present work is inserted in this context, proposing to analyse a given CLT panel through three types of plate theories: classical plate theory (or Kirchhoff plate theory), first order shear deformation theory and third order shear deformation theory. In addition to the plate theories, it was decided, for comparative purposes, to evaluate the proposed CLT panel through three different one-dimensional analytical methods commonly used in design practice – Gama Method, κ Method and Shear Analogy Method – and also through the Finite Element Method, using the ADINA software. In order to give a greater contribution to the present study, a new method was proposed, which, in general terms, can be understood as an adaptation of the well known Rankine-Grasshoff theory, which is used for the design of reinforced concrete slabs. When it comes to the definition of the object of study, a CLT panel with equal dimensions in plane was defined at first. For this panel, it was considered the following characteristics: spans of 3,0 m, five layers of lamellae with 20 mm each and a transverse uniformly distributed load of 5,0 kN/m². Afterward, parametric variations of the ratio between spans and the ratio between total thickness and span were also stipulated in order to ascertain the structural sensitivity of the initially proposed CLT panel. Therefore, with the application of all the aforementioned methods it was possible to obtain the maximum values of vertical displacement and normal and shear stresses for the studied CLT panel and its parametric variations. Having the magnitudes of the quantities of interest, it was attested, in general terms, a good agreement among the results provided by the different methods of structural analysis, excepting the values of the transverse shear stress and the case of CLT panels with ratio between spans equal to 1,0. Finally, the critical magnitudes of vertical displacements and stresses were verified according to the criteria of the Ultimate Limit State and the Serviceability Limit State established by ABNT NBR 7190:2020. In accordance with this standard, the proposed CLT panel and all its parametric variations would be viable to be used in real situations, regardless of the chosen method.

Key-words: cross laminated timber; classical plate theory; shear deformation theories; simplified analytical methods; Rankine-Grasshoff theory; finite element method

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Ortotropia da madeira: direções longitudinal, radial e tangencial	46
Figura 2.2 – Painéis de MLCC utilizados como placas em pisos e tetos	49
Figura 2.3 – Pannel de MLCC utilizado como chapa em paredes	49
Figura 2.4 – <i>The Open Academy</i> – Aplicação da MLCC em edificação educacional	51
Figura 2.5 – <i>Carmathen House</i> (construção) – Aplicação da MLCC em edificação residencial	51
Figura 2.6 – <i>Wilderness Restaurant</i> (construção) – Aplicação da MLCC em edificação comercial	52
Figura 2.7 – <i>Belarusian Memorial Chapel</i> – Aplicação da MLCC em edificação pública	52
Figura 2.8 – Disposição das lamelas de madeira em um painel de MLCC	53
Figura 2.9 – Exemplos de seções transversais de painéis de MLCC	54
Figura 2.10 – Tensões internas de tração em painéis de MLCC devidas a gradientes de teor de umidade	55
Figura 2.11 – Realização de incisões em lamelas de um painel de MLCC	56
Figura 2.12 – Etapas do processo de produção de painéis de MLCC	56
Figura 2.13 – Representação esquemática do ensaio de flexão de quatro pontos	59
Figura 2.14 – Exemplo de aparato para realização do ensaio de flexão de quatro pontos	60
Figura 2.15 – Prensa hidráulica para produção de painéis de MLCC	62
Figura 2.16 – Prensa à vácuo para produção de painéis de MLCC	62
Figura 2.17 – Componentes de tensão em um cubo elementar	67
Figura 2.18 – Configurações de referência e deformada de um corpo sólido	68
Figura 2.19 – Equilíbrio de um cubo elementar	75
Figura 2.20 – Teorema da reciprocidade do trabalho (ou teorema de Betti)	79
Figura 2.21 – Cinemática de deslocamentos de uma placa segundo a teoria clássica	82
Figura 2.22 – Distâncias z para o cálculo dos coeficientes A_{ij} , B_{ij} e D_{ij}	91

Figura 2.23 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos para a teoria clássica	94
Figura 2.24 – Cinemática de deslocamentos de uma placa segundo a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem.....	100
Figura 2.25 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem	108
Figura 2.26 – Comparação entre as cinemáticas de deslocamentos de uma placa segundo as teorias de placas apresentadas	115
Figura 2.27 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem	122
Figura 2.28 – Influência do fator de eficiência γ das ligações entre as lamelas de madeira ..	130
Figura 2.29 – Fatores de composição para painéis de MLCC segundo o Método κ	133
Figura 2.30 – Vigas virtuais do Método de Analogia ao Cisalhamento.....	134
Figura 2.31 – Tensões normais e de cisalhamento na viga virtual A	136
Figura 2.32 – Tensões normais e de cisalhamento na viga virtual B	137
Figura 2.33 – Tensões finais segundo o Método de Analogia ao Cisalhamento.....	137
Figura 2.34 – Distribuição das tensões normais em um painel de MLCC segundo o Método de Analogia ao Cisalhamento e o Método κ	140
Figura 2.35 – Efeito da contraflecha nas estruturas de madeira sujeitas à flexão simples.....	148
Figura 2.36 – Painéis de MLCC com carregamentos concentrados estudados por Czardeski et al. (2007) e Erpen, Benincá e Morsch (2021).....	153
Figura 2.37 – Ensaio dos painéis de MLCC estudados por Czardeski et al. (2007)	154
Figura 2.38 – Resultados de Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) para painel de MLCC com carregamento distribuído.....	161
Figura 2.39 – Comparação dos deslocamentos verticais obtidos por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010).....	163
Figura 2.40 – Comparação das tensões normais σ_{xx} obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)	163

Figura 2.41 – Comparação das tensões normais σ_{yy} obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)	164
Figura 2.42 – Comparação das tensões normais σ_{zz} obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)	164
Figura 2.43 – Representação esquemática do aparato de ensaio de painéis de MLCC empregado por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)	166
Figura 2.44 – Representação esquemática do aparato de ensaio de painéis de MLCC empregado por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)	167
Figura 3.1 – Painel de MLCC de referência – perspectiva.....	170
Figura 3.2 – Painel de MLCC de referência – seções transversais.....	171
Figura 4.1 – Cotas z para o cálculo das rigidezes à flexão do painel de MLCC de referência e de suas variações paramétricas da razão b/a.....	179
Figura 4.2 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para os deslocamentos verticais w_0 ..	185
Figura 4.3 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{xx}	185
Figura 4.4 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{yy}	186
Figura 4.5 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xy} ..	186
Figura 4.6 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xz} ..	190
Figura 4.7 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{yz} ..	190
Figura 4.8 – Cotas z para o cálculo das rigidezes flexionais do painel de MLCC de referência com razão h/b = 1/30	191
Figura 4.9 – Cotas z para o cálculo das rigidezes flexionais do painel de MLCC com razão h/b = 1/20.....	191
Figura 4.10 – Cotas z para o cálculo das rigidezes flexionais do painel de MLCC com razão h/b = 1/15.....	192
Figura 4.11 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para os deslocamentos verticais w_0 ..	197
Figura 4.12 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{xx}	198
Figura 4.13 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{yy}	198
Figura 4.14 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xy} ..	199

Figura 4.15 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xz}	199
Figura 4.16 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{yz}	200
Figura 4.17 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para os deslocamentos verticais w_0	207
Figura 4.18 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{xx}	207
Figura 4.19 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{yy}	208
Figura 4.20 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xy}	208
Figura 4.21 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xz}	209
Figura 4.22 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{yz}	209
Figura 4.23 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para os deslocamentos verticais w_0	213
Figura 4.24 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{xx}	213
Figura 4.25 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{yy}	214
Figura 4.26 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xy}	214
Figura 4.27 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xz}	215
Figura 4.28 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{yz}	215
Figura 4.29 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para os deslocamentos verticais w_0	224
Figura 4.30 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{xx}	224
Figura 4.31 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{yy}	225
Figura 4.32 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xy}	225

Figura 4.33 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xz}	226
Figura 4.34 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{yz}	226
Figura 4.35 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para os deslocamentos verticais w_0	231
Figura 4.36 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{xx}	232
Figura 4.37 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{yy}	232
Figura 4.38 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xy}	233
Figura 4.39 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xz}	233
Figura 4.40 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{yz}	234
Figura 4.41 – Painel de MLCC apoiado nos quatro bordos: faixas de largura unitária, quinhões de carregamento e flechas.....	253
Figura 4.42 – Painel de MLCC apoiado nos quatro bordos: seções transversais contidas nos planos coordenados x-z e y-z	254
Figura 4.43 – Interface do <i>software</i> ADINA.....	274
Figura 4.44 – ADINA: perspectiva isométrica do painel de MLCC de referência	275
Figura 4.45 – ADINA: malha de elementos finitos do painel de MLCC de referência	275
Figura 4.46 – ADINA: deslocamentos verticais w para $b/a = 1,0$	277
Figura 4.47 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,0$	277
Figura 4.48 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $b/a = 1,0$	278
Figura 4.49 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,0$	278
Figura 4.50 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,0$	278
Figura 4.51 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,0$	279
Figura 4.52 – ADINA: deslocamentos verticais w para $b/a = 1,5$	279

Figura 4.53 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,5$	279
Figura 4.54 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $b/a = 1,5$	280
Figura 4.55 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,5$	280
Figura 4.56 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,5$	280
Figura 4.57 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,5$	281
Figura 4.58 – ADINA: deslocamentos verticais w para $b/a = 2,0$	281
Figura 4.59 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 2,0$	281
Figura 4.60 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $b/a = 2,0$	282
Figura 4.61 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 2,0$	282
Figura 4.62 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 2,0$	282
Figura 4.63 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 2,0$	283
Figura 4.64 – ADINA: deslocamentos verticais w para $h/b = 1/20$	283
Figura 4.65 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/20$	283
Figura 4.66 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $h/b = 1/20$	284
Figura 4.67 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/20$	284
Figura 4.68 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/20$	284
Figura 4.69 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/20$	285
Figura 4.70 – ADINA: deslocamentos verticais w para $h/b = 1/15$	285
Figura 4.71 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/15$	285
Figura 4.72 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/15$	286
Figura 4.73 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/15$	286
Figura 4.74 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/15$	286
Figura 4.75 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/15$	287
Figura 4.76 – Comparação das flechas $w_{m\acute{a}x}$ para a razão $b/a = 1,0$	289
Figura 4.77 – Comparação das flechas $w_{m\acute{a}x}$ para a razão $b/a = 1,5$	289
Figura 4.78 – Comparação das flechas $w_{m\acute{a}x}$ para a razão $b/a = 2,0$	290

Figura 4.79 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,0$	291
Figura 4.80 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,5$	292
Figura 4.81 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 2,0$	292
Figura 4.82 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,0$.	293
Figura 4.83 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,5$.	293
Figura 4.84 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 2,0$.	294
Figura 4.85 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,0$	296
Figura 4.86 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,5$	297
Figura 4.87 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 2,0$	297
Figura 4.88 – Comparação das flechas $w_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/30$	299
Figura 4.89 – Comparação das flechas $w_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/20$	299
Figura 4.90 – Comparação das flechas $w_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/15$	300
Figura 4.91 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/30$..	301
Figura 4.92 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/20$..	302
Figura 4.93 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/15$..	302
Figura 4.94 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/30$	303
Figura 4.95 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/20$	303
Figura 4.96 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/15$	304
Figura 4.97 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/30$	306
Figura 4.98 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/20$	306
Figura 4.99 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/15$	307
Figura 4.100 – Proporcionalidade entre carregamentos e flechas	309

Figura 4.101 – Proporcionalidade inversa entre módulos de elasticidade e flechas	311
Figura A.1 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas CPT (parte 1).....	333
Figura A.2 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas CPT (parte 2).....	334
Figura A.3 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas CPT (parte 3).....	334
Figura B.1 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas FSDT (parte 1)	335
Figura B.2 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas FSDT (parte 2)	336
Figura B.3 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas FSDT (parte 3)	336
Figura C.1 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas TSDT (parte 1)	337
Figura C.2 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas TSDT (parte 2)	338
Figura C.3 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas TSDT (parte 3)	338
Figura C.4 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas TSDT (parte 4)	338

LISTA DE QUADROS

Quadro 2.1 – Influência da quantidade de adesivo estrutural aplicada ao painéis de MLCC ..	61
Quadro 2.2 – Formas de aplicação de pressões aos painéis de MLCC	63
Quadro 2.3 – Esforços solicitantes e tensões para a viga virtual A.....	136
Quadro 2.4 – Esforços solicitantes e tensões para a viga virtual B	136

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Valores dos fatores de combinação ψ_0 e dos fatores de redução ψ_1 e ψ_2	142
Tabela 2.2 – Valores dos coeficientes de modificação k_{mod1}	143
Tabela 2.3 – Valores dos coeficientes de modificação k_{mod2}	144
Tabela 2.4 – Classes de umidade da madeira	144
Tabela 2.5 – Valores dos coeficientes de modificação C_t	145
Tabela 2.6 – Valores dos coeficientes de fluência ϕ	146
Tabela 2.7 – Valores do coeficiente α_n	151
Tabela 2.8 – Características dos painéis de MLCC estudados por Czardeski et al. (2007) ...	155
Tabela 2.9 – Máximos deslocamentos verticais obtidos por Czardeski et al. (2007).....	156
Tabela 2.10 – Máximas tensões normais obtidas por Czardeski et al. (2007)	157
Tabela 2.11 – Máximas tensões normais obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021).....	159
Tabela 2.12 – Resultados obtidos por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015).....	167
Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas consideradas para as lamelas dos painéis de MLCC..	171
Tabela 3.2 – Publicações para o termo de busca <i>cross laminated timber</i>	174
Tabela 3.3 – Publicações para o termo de busca <i>plate theories for cross laminted timber</i>	175
Tabela 4.1 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	180
Tabela 4.2 – Pontos (x,y) críticos para os cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} nos planos dos painéis de MLCC	180
Tabela 4.3 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$	183
Tabela 4.4 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$	183
Tabela 4.5 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$	184

Tabela 4.6 – Pontos (x,y) críticos para os cálculos das tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} dos painéis de MLCC	187
Tabela 4.7 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$	188
Tabela 4.8 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$	189
Tabela 4.9 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$	189
Tabela 4.10 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	192
Tabela 4.11 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/20$	193
Tabela 4.12 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/15$	193
Tabela 4.13 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	194
Tabela 4.14 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	195
Tabela 4.15 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	195
Tabela 4.16 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	196
Tabela 4.17 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	196
Tabela 4.18 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	197
Tabela 4.19 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	202
Tabela 4.20 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$	205

Tabela 4.21 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$	205
Tabela 4.22 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$	206
Tabela 4.23 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	210
Tabela 4.24 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	210
Tabela 4.25 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	210
Tabela 4.26 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	211
Tabela 4.27 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	212
Tabela 4.28 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	212
Tabela 4.29 – Rigidezes à flexão D_{44} e D_{55} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	216
Tabela 4.30 – Rigidezes F_{11} , F_{12} , F_{22} , F_{44} , F_{55} e F_{66} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	217
Tabela 4.31 – Rigidezes H_{11} , H_{12} , H_{22} e H_{66} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	217
Tabela 4.32 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} obtidas para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	218
Tabela 4.33 – Coeficientes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	219
Tabela 4.34 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$	222
Tabela 4.35 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$	223

Tabela 4.36 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$	223
Tabela 4.37 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	227
Tabela 4.38 – Coeficientes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	227
Tabela 4.39 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	228
Tabela 4.40 – Coeficientes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	228
Tabela 4.41 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	228
Tabela 4.42 – Coeficientes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	229
Tabela 4.43 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	230
Tabela 4.44 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	230
Tabela 4.45 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	231
Tabela 4.46 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva para todas as razões b/a do painel de MLCC de referência	237
Tabela 4.47 – Método Gama: avaliação paramétrica da razão b/a	238
Tabela 4.48 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva do painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	239
Tabela 4.49 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva do painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	239
Tabela 4.50 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva do painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	240
Tabela 4.51 – Método Gama: produto do módulo de elasticidade pelo momento estático da seção transversal EQ (razões h/b)	240

Tabela 4.52 – Método Gama: avaliação paramétrica da razão h/b	240
Tabela 4.53 – Método κ : avaliação paramétrica da razão b/a	242
Tabela 4.54 – Método κ : fator de composição k_1 para as razões h/b do painel de MLCC.....	242
Tabela 4.55 – Método κ : avaliação paramétrica da razão h/b	243
Tabela 4.56 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para as razões b/a painel de MLCC	245
Tabela 4.57 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para as razões b/a painel de MLCC	246
Tabela 4.58 – Método de Analogia ao Cisalhamento: avaliação paramétrica da razão b/a ...	247
Tabela 4.59 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	248
Tabela 4.60 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	248
Tabela 4.61 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	249
Tabela 4.62 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$	249
Tabela 4.63 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$	249
Tabela 4.64 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$	250
Tabela 4.65 – Método de Analogia ao Cisalhamento: quinhões de carregamento e esforços solicitantes internos para as razões b/a painel de MLCC	250
Tabela 4.66 – Método de Analogia ao Cisalhamento: avaliação paramétrica da razão h/b ...	250
Tabela 4.67 – Método analítico proposto: $(EI)_x$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$	264
Tabela 4.68 – Método analítico proposto: $(EI)_y$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$	264
Tabela 4.69 – Método proposto: $(GA)_{xz}$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$	265

Tabela 4.70 – Método proposto: $(GA)_{yz}$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$	265
Tabela 4.71 – Método proposto: momento de inércia da seção transformada para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$	266
Tabela 4.72 – Método proposto (sem deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão b/a	271
Tabela 4.73 – Método proposto (com deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão b/a	271
Tabela 4.74 – Método proposto: propriedades mecânicas das seções transversais para a avaliação paramétrica da razão h/b	272
Tabela 4.75 – Método proposto (sem deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão h/b	272
Tabela 4.76 – Método proposto (com deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão h/b	273
Tabela 4.77 – ADINA: avaliação paramétrica da razão b/a	276
Tabela 4.78 – ADINA: avaliação paramétrica da razão h/b	276
Tabela 4.79 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $b/a = 1,0$ e $h/b = 1/30$	314
Tabela 4.80 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $b/a = 1,5$	314
Tabela 4.81 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $b/a = 2,0$	315
Tabela 4.82 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $h/b = 1/20$	315
Tabela 4.83 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $h/b = 1/15$	316
Tabela 4.84 – Estado Limite de Último para as variações paramétricas $b/a = 1,0$ e $h/b = 1/30$	318
Tabela 4.85 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $b/a = 1,5$	319
Tabela 4.86 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $b/a = 2,0$	319
Tabela 4.87 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $h/b = 1/20$	320
Tabela 4.88 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $h/b = 1/15$	320
Tabela 4.89 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $b/a = 1,0$ e $h/b = 1/30$	321

Tabela 4.90 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $b/a = 1,5$	321
Tabela 4.91 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $b/a = 2,0$	322
Tabela 4.92 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $h/b = 1/20$	322
Tabela 4.93 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $h/b = 1/15$	322

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas:

A_i Área da seção transversal da i -ésima camada de lamelas de madeira

A_{ij} Rigidez extensional

$\hat{A}_{ij}$ Rigidez flexional que depende de A_{ij} e D_{ij}

$\bar{A}_{ij}$ Rigidez flexional que depende de $\hat{A}_{ij}$ e $\hat{D}_{ij}$

B_A Rigidez à flexão da viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento

B_B Rigidez à flexão da viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento

B_{mn} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de $\alpha_m, \beta_n, X_{mn}, Y_{mn}$ e Q_{ij}

B_x Força de massa na direção x

B_y Força de massa na direção y

B_z Força de massa na direção z

B_{ij} Rigidez extensional-flexional

C_c Coeficiente de modificação devido à curvatura das peças de madeira

C_e Coeficiente de modificação devido à presença de emendas *fingerjoints*

C_{ijkl} Tensor de quarta ordem referente aos parâmetros de rigidez de um material

C_t Coeficiente de modificação devido à temperatura

D_{ij} Rigidez flexional

$\hat{D}_{ij}$ Rigidez flexional que depende de D_{ij} e F_{ij}

$\bar{D}_{ij}$ Rigidez flexional que depende de $\hat{D}_{ij}$ e $\hat{F}_{ij}$

D_{mn} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de $\alpha_m, \beta_n, X_{mn}, Y_{mn}$ e Q_{ij}

E Tensor de deformação Green-Lagrange

$E_{co,ef}$ Valor efetivo do módulo de elasticidade paralelo às fibras da madeira segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

$E_{co,m}$ Valor médio do módulo de elasticidade paralelo às fibras da madeira segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

E_i Módulo de elasticidade da i -ésima camada de lamelas de madeira

E_{mn} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de $\alpha_m, \beta_n, W_{mn}, B_{mn}$ e Q_{ij}

E_0 Módulo de elasticidade na direção longitudinal (para os métodos unidimensionais)

E_1 Módulo de elasticidade segundo a direção do eixo 1

E_2 Módulo de elasticidade segundo a direção do eixo 2

E_3 Módulo de elasticidade segundo a direção do eixo 3

E_{90} Módulo de elasticidade na direção transversal (para os métodos unidimensionais)

$(EI)_{ef}$ Rigidez à flexão efetiva

$(EI)_A$ Rigidez à flexão da viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento

$(EI)_B$ Rigidez à flexão da viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento

F_d Valor da combinação última normal

$F_{d,serv}$ Valor da combinação quase-permanente

$F_{G,ik}$ Valor característico das ações permanentes

$F_{Q,ik}$ Valor característico das ações variáveis

$F_{Q,1k}$ Valor característico da ação variável principal

F_{ij} Rigidez de ordem 5

$\hat{F}_{ij}$ Rigidez de ordem 5 que depende de F_{ij} e H_{ij}

F_{mn} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de $\alpha_m, \beta_n, W_{mn}, D_{mn}$ e Q_{ij}

G_{ef} Valor efetivo do módulo de elasticidade transversal da madeira segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

$(GA)_{ef}$ Rigidez ao cisalhamento efetiva

$(GA)_A$ Rigidez ao cisalhamento da viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento

$(GA)_B$ Rigidez ao cisalhamento da viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento

G_R Módulo de elasticidade transversal *rolling shear*

G_{12} Módulo de elasticidade transversal associado ao plano 1-2

G_{13} Módulo de elasticidade transversal associado ao plano 1-3

G_{23} Módulo de elasticidade transversal associado ao plano 2-3

H_{ij} Rigidez de ordem 7

I_i Momento de inércia da i-ésima camada de lamelas de madeira

K_s Fator de correção de cisalhamento

L Vão

MOE Módulo de elasticidade obtido pelo ensaio de flexão de quatro pontos

MOR Módulo de ruptura obtido pelo ensaio de flexão de quatro pontos

M_{xx} Momento fletor em torno do eixo x

$\overline{M}_{xx}$ Momento fletor que depende de M_{xx} e P_{xx}

M_{xy} Momento volvente

$\overline{M}_{xy}$ Momento volvente que depende de M_{xy} e P_{xy}

M_{yy} Momento fletor em torno do eixo y

$\overline{M}_{yy}$ Momento fletor que depende de M_{yy} e P_{yy}

N_{xx} Resultante das tensões normais σ_{xx}

N_{xy} Resultante das tensões de cisalhamento τ_{xy}

N_{yy} Resultante das tensões normais σ_{yy}

P Força concentrada do ensaio de flexão de quatro pontos

$P_{m\acute{a}x}$ Valor máximo da força concentrada do ensaio de flexão de quatro pontos

P_{xx} Resultante de ordem superior das tensões normais σ_{xx}

P_{xy} Resultante de ordem superior das tensões de cisalhamento τ_{xy}
 P_{yy} Resultante de ordem superior das tensões normais σ_{yy}
 Q_{ij} Coeficiente dependente das propriedade mecânicas da madeira
 $\bar{Q}_{ij}$ Coeficiente dependente das propriedade mecânicas da madeira e da orientação das lamelas
 Q_x Resultante das tensões de cisalhamento τ_{xz}
 $\bar{Q}_x$ Resultante que depende de Q_x e R_x
 Q_y Resultante das tensões de cisalhamento τ_{yz}
 $\bar{Q}_y$ Resultante que depende de Q_y e R_y
 R_x Resultante de ordem superior das tensões de cisalhamento τ_{xz}
 R_y Resultante de ordem superior das tensões de cisalhamento τ_{yz}
 S_A Rigidez ao cisalhamento da viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento
 S_B Rigidez ao cisalhamento da viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento
 S_{ijkl} Tensor de quarta ordem referente aos parâmetros de complacência de um material
 S_{mn}^{xx} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de α_m e X_{mn}
 S_{mn}^{xy} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de $\alpha_m, \beta_n, X_{mn}$ e Y_{mn}
 S_{mn}^{yy} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de β_n e Y_{mn}
 T_{ij} Parâmetros auxiliares para o cômputo das tensões de cisalhamento transversais
 T_{mn}^{xx} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de α_m, X_{mn} e W_{mn}
 T_{mn}^{xy} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de $\alpha_m, \beta_n, X_{mn}, Y_{mn}$ e W_{mn}
 T_{mn}^{yy} Parâmetro auxiliar da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem que depende de β_n, Y_{mn} e W_{mn}
 V_A Esforço cortante na viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento

$V_{A,i}$ Esforço cortante na i-ésima camada dos painéis de MLCC pelo Método de Analogia ao Cisalhamento

V_B Esforço cortante na viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento

$V_{B,i}$ Esforço cortante na i-ésima camada dos painéis de MLCC pelo Método de Analogia ao Cisalhamento

V_{xz} Esforço cortante no plano coordenado x-z

V_{yz} Esforço cortante no plano coordenado y-z

W_{mn} Parâmetro das expansões em séries de Fourier associado aos deslocamentos w_0

X Vetor das coordenadas de um corpo sólido na configuração indeformada

X_{mn} Parâmetro das expansões em séries de Fourier associado às rotações φ_x

Y_{mn} Parâmetro das expansões em séries de Fourier associado às rotações φ_y

Letras romanas minúsculas:

a Menor vão dos painéis de MLCC

a_m , a_{m-2} e a_{m-4} Espessuras das camadas de lamelas de madeira pelo Método κ

a_i Distância entre o centroide da i-ésima camada de lamelas de madeira e a linha neutra dos painéis de MLCC como um todo

b Maior vão dos painéis de MLCC

b_{mn} , b_0 , b_1 e b_2 Parâmetros auxiliares das teorias de deformação de cisalhamento que dependem dos parâmetros $\hat{s}_{ij}$

b_w Largura dos painéis de MLCC considerados no ensaio de flexão de quatro pontos

b_x Largura da seção transversal no plano coordenado x-z

b_y Largura da seção transversal no plano coordenado y-z

c_1 e c_2 Parâmetros da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem associados à espessura dos painéis de MLCC

d_{mn} Parâmetro auxiliares das expansões em séries de Fourier

dW Trabalho de forças infinitesimais

$f_{c0,d}$ Valor de cálculo da resistência à compressão na direção paralela às fibras da madeira

$f_{c0,k}$ Valor característico da resistência à compressão na direção paralela às fibras da madeira

$f_{t0,d}$ Valor de cálculo da resistência à tração na direção paralela às fibras da madeira

$f_{t0,k}$ Valor característico da resistência à tração na direção paralela às fibras da madeira

$f_{v0,d}$ Valor de cálculo da resistência da madeira ao cisalhamento longitudinal

$f_{v0,k}$ Valor característico da resistência da madeira ao cisalhamento longitudinal

f_x Força externa por unidade de massa na direção x

f_y Força externa por unidade de massa na direção y

f_z Força externa por unidade de massa na direção z

f_1 Força externa por unidade de massa na direção 1

f_2 Força externa por unidade de massa na direção 2

f_3 Força externa por unidade de massa na direção 3

h Espessura total dos painéis de MLCC

h_i Espessura da i-ésima camada de lamelas de madeira

k_{mod} , k_{mod1} , k_{mod2} e k_{mod3} Coeficientes de modificação das resistências e das rigidezes da madeira

k_1 , k_2 , k_3 e k_4 Fatores de composição para o Método κ

m Primeiro limite das expansões em séries de Fourier

n Segundo limite das expansões em séries de Fourier

q Carregamento uniformemente distribuído por unidade de área

q_0 Carregamento uniformemente distribuído por unidade de área adotado nos cálculos

q_{0x} Quinhão do carregamento q_0 segundo a direção do eixo x

$q_{0x,A}$ Quinhão do carregamento q_0 , segundo a direção do eixo x, absorvido pela viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento

$q_{0x,B}$ Quinhão do carregamento q_0 , segundo a direção do eixo x, absorvido pela viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento

q_{0y} Quinhão do carregamento q_0 segundo a direção do eixo y

q_{mn} Parâmetro das expansões em séries de Fourier associado ao carregamento q
 r Menor raio de curvatura das peças de madeira para o cálculo do coeficiente C_e
 s Razão entre os vãos dos painéis de MLCC
 $\hat{s}_{ij}$ Parâmetros auxiliares das teorias de deformação de cisalhamento que permitem obter os parâmetros W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn}
 t Espessura das lamelas de madeira para o cálculo do coeficiente C_e
 u Deslocamento na direção do eixo coordenado x
 $u(X,t)$ Vetor dos deslocamentos das partículas de um corpo sólido em função das coordenadas materiais e do tempo
 u_0 Deslocamento, na direção do eixo x , do plano médio dos painéis de MLCC
 u_1 Deslocamento na direção do eixo 1
 u_2 Deslocamento na direção do eixo 2
 u_3 Deslocamento na direção do eixo 3
 v Deslocamento na direção do eixo coordenado y
 v_0 Deslocamento, na direção do eixo y , do plano médio dos painéis de MLCC
 $x(X,t)$ Vetor das coordenadas de um corpo sólido na configuração deformada
 w Deslocamento na direção do eixo coordenado z
 w_c Flecha devida à fluência segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020
 w_{cf} Contraflecha segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020
 w_{ef} Flecha efetiva segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020
 w_{ef}^* Flecha efetiva, segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, quando da necessidade de contraflechas
 w_g Flecha devida às ações permanentes segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020
 w_{ime} Flecha imediata segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020
 w_{lim} Flecha limite segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020
 $w_{máx}$ Valor máximo do deslocamento na direção do eixo coordenado z

w_q Flecha devida às ações variáveis segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

w_0 Deslocamento, na direção do eixo z , do plano médio dos painéis de MLCC

z Cota dos painéis de MLCC

z_k Cota dos painéis de MLCC anterior à cota z

Letras gregas:

α_m Parâmetro que relaciona m e a

α_n Coeficiente que leva em conta a extensão do carregamento normal às fibras e que é medida paralelamente às fibras da madeira

β_n Parâmetro que relaciona n e b

δu_0 Deslocamento virtual, na direção do eixo x , do plano médio dos painéis de MLCC

δv_0 Deslocamento virtual, na direção do eixo y , do plano médio dos painéis de MLCC

δw_0 Deslocamento virtual, na direção do eixo z , do plano médio dos painéis de MLCC

δW_E Trabalho virtual das forças externas

δW_I Trabalho virtual dos esforços solicitantes internos

$\delta \epsilon_{xx}$ Deformação específica virtual na direção do eixo coordenado x

$\delta \epsilon_{yy}$ Deformação específica virtual na direção do eixo coordenado y

$\delta \gamma_{xy}$ Distorção virtual no plano coordenado x - y

$\delta \gamma_{xz}$ Distorção virtual no plano coordenado x - z

$\delta \gamma_{yz}$ Distorção virtual no plano coordenado y - z

$\delta \phi_x$ Rotação virtual dos painéis de MLCC em torno do eixo y

$\delta \phi_y$ Rotação virtual dos painéis de MLCC em torno do eixo x

Δ Flecha dos painéis de MLCC sujeitos ao ensaio de flexão de quatro pontos

ϵ Tensor das deformações infinitesimais

ϵ_{xx} Deformação específica na direção do eixo coordenado x

ε_{yy} Deformação específica na direção do eixo coordenado y

ε_{zz} Deformação específica na direção do eixo coordenado z

ε_{xy} Distorção no plano coordenado x-y

ε_{xz} Distorção no plano coordenado x-z

ε_{yz} Distorção no plano coordenado y-z

ε_{11} Deformação específica na direção do eixo 1

ε_{22} Deformação específica na direção do eixo 2

ε_{33} Deformação específica na direção do eixo 3

ε_{12} Distorção no plano coordenado 1-2

ε_{13} Distorção no plano coordenado 1-3

ε_{23} Distorção no plano coordenado 2-3

η Parâmetro que envolve as resultantes N_{xx} , N_{yy} e N_{xy} com as derivadas de primeira ordem do deslocamento w_0

κ Fator de forma no cisalhamento para o método analítico unidimensional proposto

ν_{12} Coeficiente de Poisson definido pela razão entre a deformação transversal na direção 2 e a deformação longitudinal na direção 1

ν_{13} Coeficiente de Poisson definido pela razão entre a deformação transversal na direção 3 e a deformação longitudinal na direção 1

ν_{23} Coeficiente de Poisson definido pela razão entre a deformação transversal na direção 3 e a deformação longitudinal na direção 2

ρ Massa específica

$\sigma_{A,i}$ Tensão normal na i-ésima camada da viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento

$\sigma_{B,i}$ Tensão normal na i-ésima camada da viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento

$\sigma_{c0,d}$ Valor de cálculo da tensão normal de compressão solicitante na direção paralela às fibras da madeira

$\sigma_{c0,k}$ Valor característico da tensão normal de compressão solicitante na direção paralela às fibras da madeira

$\sigma_{c90,d}$ Valor de cálculo da tensão normal de compressão solicitante na direção perpendicular às fibras da madeira

$\sigma_{c90,k}$ Valor característico da tensão normal de compressão solicitante na direção perpendicular às fibras da madeira;

$\sigma_{t0,d}$ Valor de cálculo da tensão normal de tração solicitante na direção paralela às fibras da madeira

$\sigma_{t0,k}$ Valor característico da tensão normal de tração solicitante na direção paralela às fibras da madeira

σ_{xx} Tensão normal na direção do eixo coordenado x

σ_{yy} Tensão normal na direção do eixo coordenado y

σ_{zz} Tensão normal na direção do eixo coordenado z

σ_{11} Tensão normal na direção do eixo 1

σ_{22} Tensão normal na direção do eixo 2

σ_{33} Tensão normal na direção do eixo 3

$\tau_{A,i}$ Tensão de cisalhamento na i-ésima camada da viga virtual A do Método de Analogia ao Cisalhamento

$\tau_{B,i+1}$ Tensão cisalhamento na camada i+1 da viga virtual B do Método de Analogia ao Cisalhamento

τ_d Valor de cálculo da tensão de cisalhamento longitudinal solicitante

τ_k Valor característico da tensão de cisalhamento longitudinal solicitante

τ_{xy} Tensão de cisalhamento no plano coordenado x-y

τ_{xz} Tensão de cisalhamento no plano coordenado x-z

τ_{yz} Tensão de cisalhamento no plano coordenado y-z

τ_{12} Tensão de cisalhamento no plano 1-2

τ_{13} Tensão de cisalhamento no plano 1-3

τ_{23} Tensão de cisalhamento no plano 2-3

γ_f Coeficiente de ponderação das ações

γ_g Coeficiente de ponderação das ações permanentes

γ_i Fator de eficiência da i-ésima camada de lamelas de madeira
 γ_q Coeficiente de ponderação das ações variáveis
 γ_{wc} Coeficiente de ponderação da resistência da madeira à compressão paralela às fibras
 γ_{wv} Coeficiente de ponderação da resistência da madeira ao cisalhamento longitudinal,
 γ_{wt} Coeficiente de ponderação da resistência da madeira à tração paralela às fibras
 γ_{xy} Distorção no plano coordenado x-y
 γ_{xz} Distorção no plano coordenado x-z
 γ_{yz} Distorção no plano coordenado y-z
 ϕ Coeficiente de fluência
 ϕ_x Rotação dos painéis de MLCC em torno do eixo y
 ϕ_y Rotação dos painéis de MLCC em torno do eixo x
 $\chi(z)$ Parâmetro que envolve as cotas z e z_k para tensões de cisalhamento τ_{xz}
 ψ_0 Fator de combinação de ações para Estado Limite Último
 ψ_1 e ψ_2 Fator de redução de ações para Estado Limite de Serviço
 $\Upsilon(z)$ Parâmetro que envolve as cotas z e z_k para tensões de cisalhamento τ_{yz}

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	40
1.1 JUSTIFICATIVA	41
1.2 OBJETIVOS	42
1.2.1 Objetivo geral.....	42
1.2.2 Objetivos específicos.....	42
2 REVISÃO DE LITERATURA.....	44
2.1 MADEIRA LAMELADA COLADA CRUZADA.....	44
2.1.1 Aspectos gerais do produto madeira lamelada colada cruzada	44
2.1.1.1 A madeira como material estrutural	44
2.1.1.2 Breve histórico, definições e aplicações do produto madeira lamelada colada cruzada.....	48
2.1.1.3 Geometria dos painéis de madeira lamelada colada cruzada	53
2.1.1.4 Processo de produção dos painéis de madeira lamelada colada cruzada	56
2.1.1.5 Vantagens e limitações da madeira lamelada colada cruzada	64
2.1.1.6 Desempenho dos painéis de madeira lamelada colada cruzada	65
2.1.1.7 A madeira lamelada colada cruzada no Brasil.....	66
2.2 TÓPICOS SOBRE TEORIA DA ELASTICIDADE E MECÂNICA DO CONTÍNUO.....	66
2.2.1 Definições iniciais e natureza das forças em corpos sólidos	66
2.2.2 Componentes de tensão para um corpo sólido deformável	67
2.2.3 Relações deformação-deslocamento para um corpo sólido deformável.....	68
2.2.4 Equações de compatibilidade de deformações para um corpo sólido deformável	71
2.2.5 Equações diferenciais de movimento e de equilíbrio para um corpo sólido deformável.....	74

2.2.6 Relações constitutivas ou lei de Hooke generalizada para o material de um corpo sólido deformável.....	76
2.3 TEORIAS DE PLACAS	80
2.3.1 Teoria clássica de placas ou teoria de Kirchhoff	81
2.3.1.1 Campo de deslocamentos e deformações para a teoria clássica de placas	81
2.3.1.2 Equações diferenciais de equilíbrio para a teoria clássica de placas	84
2.3.1.3 Relações constitutivas para a teoria clássica de placas	87
2.3.1.4 Equações diferenciais de equilíbrio em termos dos deslocamentos do plano médio de referência para a teoria clássica	92
2.3.1.5 Solução de Navier para a teoria clássica de placas.....	94
2.3.1.6 Expressões das tensões normais e de cisalhamento para a teoria clássica de placas	97
2.3.2 Teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem	99
2.3.2.1 Campo de deslocamentos e deformações para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem.....	99
2.3.2.2 Equações diferenciais de equilíbrio para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem.....	102
2.3.2.3 Relações constitutivas para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem	105
2.3.2.4 Equações diferenciais de equilíbrio em termos dos deslocamentos do plano médio de referência para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem	106
2.3.2.5 Solução de Navier para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem	108
2.3.2.6 Expressões das tensões normais e de cisalhamento para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem.....	111
2.3.3 Teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem.....	113
2.3.3.1 Campo de deslocamentos e deformações para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem	113

2.3.3.2 Equações diferenciais de equilíbrio para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem	118
2.3.3.3 Relações constitutivas para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem.....	120
2.3.3.4 Solução de Navier para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem.....	122
2.3.2.5 Expressões das tensões normais e de cisalhamento para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem	125
2.4 MÉTODOS ANALÍTICOS UNIDIMENSIONAIS	127
2.4.1 Método Gama.....	127
2.4.1.1 Rigidez à flexão efetiva e tensão normal de flexão máxima	129
2.4.1.2 Tensão de cisalhamento máxima.....	131
2.4.2 Método κ.....	132
2.4.3 Método de Analogia ao Cisalhamento	134
2.5 ESTADOS LÍMITES ÚLTIMO E DE SERVIÇO SEGUNDO O PROJETO DE REVISÃO DA ABNT NBR 7190:2020.....	140
2.5.1 Verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas	141
2.5.1.1 Combinação de ações para verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas	141
2.5.1.2 Valores efetivos do módulo de elasticidade, módulo de elasticidade transversal e coeficientes de modificação da madeira	142
2.5.2 Verificação das resistências	148
2.5.2.1 Verificação da resistência à compressão paralela às fibras	148
2.5.2.2 Verificação da resistência à tração paralela às fibras	149
2.5.2.3 Verificação do cisalhamento longitudinal	150
2.5.2.4 Verificação da resistência à compressão perpendicular às fibras.....	151
2.5.2.5 Combinação Última Normal.....	152

2.6 TRABALHOS CORRELATOS A RESPEITO DA AVALIAÇÃO MECÂNICA DE PAINÉIS DE MLCC.....	152
2.6.1 Czardeski et al. (2007) e Erpen, Benincá e Morsch (2021): análise estrutural de painéis de MLCC sujeitos à flexão simples por carregamento concentrado	152
2.6.1.1 Estudo de Czardeski et al. (2007).....	152
2.6.1.2 Estudo de Erpen, Benincá e Morsch (2021).....	158
2.6.2 Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) e Erpen, Benincá e Morsch (2021): análise estrutural de painéis de MLCC sujeitos à flexão simples por carregamento distribuído	160
2.6.2.1 Estudo de Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)	160
2.6.2.2 Estudo de Erpen, Benincá e Morsch (2021)	162
2.6.3 Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015): comparação entre Método Gama, Método Experimental e Método dos Elementos Finitos para painéis de MLCC com carregamento uniformemente distribuído	165
2.6.3.1 Considerações acerca do método experimental de Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)	166
2.6.3.2 Resultados obtidos por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015).....	167
3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	170
4 RESULTADOS E DISCUSSÕES	177
4.1 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DA APLICAÇÃO DAS TEORIAS DE PLACAS	177
4.1.1 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação da teoria clássica de placas (CPT).....	177
4.1.1.1 CPT: cálculo dos coeficientes Q_{ij} , Q_{ij} e D_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	177
4.1.1.2 CPT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} no plano do painel de MLCC de referência e de suas variações paramétricas da razão b/a	180

4.1.1.3 CPT: cálculos das tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	187
4.1.1.4 CPT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , Q_{ij} e D_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	191
4.1.1.5 CPT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	193
4.1.2 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (FSDT)	200
4.1.2.1 FSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , Q_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	200
4.1.2.2 FSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	202
4.1.2.3 FSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , Q_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	210
4.1.2.4 FSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	211
4.1.3 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem (TSDT).....	216
4.1.3.1 TSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , Q_{ij} , D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , H_{ij} , D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	216
4.1.3.2 TSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	219
4.1.3.3 TSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , Q_{ij} , D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , H_{ij} , D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	227

4.1.3.4 FSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	229
4.1.4 Ponderações acerca da aplicação das teorias de placas ao painel de MLCC analisado	234
4.2 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS ANALÍTICOS UNIDIMENSIONAIS	235
4.2.1 Máximos deslocamentos verticais e máximas tensões decorrentes da aplicação do Método Gama	235
4.2.1.1 Método Gama: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{m\acute{a}x}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	236
4.2.1.2 Método Gama: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{m\acute{a}x}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	239
4.2.2 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação do Método κ.....	240
4.2.2.1 Método κ : cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$ e da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	241
4.2.2.2 Método κ : cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$ e da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	242
4.2.3 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação do Método de Analogia ao Cisalhamento	243
4.2.3.1 Método de Analogia ao Cisalhamento: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{m\acute{a}x}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a	245
4.2.3.2 Método de Analogia ao Cisalhamento: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ e da tensão de cisalhamento máxima	

$(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	248
4.2.4 Ponderações acerca da aplicação dos método unidimensionais ao painel de MLCC analisado.....	251
4.3 PROPOSTA DE UM MÉTODO ANALÍTICO UNIDIMENSIONAL PARA O CÁLCULO DE PAINÉIS DE MLCC SUJEITOS À FLEXÃO SIMPLES	252
4.3.1 Hipóteses simplificadoras para o método analítico proposto	252
4.3.2 Dedução da expressão do quinhão de carregamento q_{0x}	255
4.3.2.1 Dedução da expressão do quinhão de carregamento q_{0x} desprezando as deformações de cisalhamento.....	255
4.3.2.2 Dedução da expressão do quinhão de carregamento q_{0x} considerando as deformações de cisalhamento.....	256
4.3.3 Expressões para as rigidezes à flexão e ao cisalhamento efetivas	258
4.3.3.1 Expressões para as rigidezes à flexão efetivas	258
4.3.3.2 Expressões para as rigidezes ao cisalhamento efetivas	259
4.3.4 Expressões para os esforços solicitantes internos	259
4.3.5 Expressões para as máximas tensões normais e de cisalhamento e para o máximo deslocamento vertical	260
4.3.5.1 Expressão para a máxima tensão normal.....	260
4.3.5.2 Expressões para a máxima tensão de cisalhamento.....	261
4.3.5.3 Expressões para o máximo deslocamento vertical	262
4.4 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DA APLICAÇÃO DO MÉTODO ANALÍTICO PROPOSTO.....	262
4.4.1 Método analítico proposto: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a.....	262
4.4.1.1 Método analítico proposto: aplicação para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$ (sem a consideração das deformações de cisalhamento).....	263

4.4.1.2 Método analítico proposto: aplicação para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$ (com a consideração das deformações de cisalhamento).....	269
4.4.1.3 Método analítico proposto: aplicação para o painel de MLCC de referência com razão b/a igual 1,5 e 2,0.....	271
4.4.2 Método analítico proposto: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{máx}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{máx}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{máx}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b	272
4.4.3 Ponderações acerca da aplicação do método analítico proposto ao painel de MLCC analisado.....	273
4.5 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DE MODELAGENS NO SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS.....	274
4.5.1 Modelagens em elementos finitos no <i>software</i> ADINA.....	274
4.5.2 Ponderações acerca da aplicação do Método dos Elementos Finitos por meio do <i>software</i> ADINA	287
4.6 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES: COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO ACERCA DOS DIFERENTES MÉTODOS	287
4.6.1 Comparação e discussão das análises estruturais referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC	288
4.6.1.1 Comparação e discussão dos máximos deslocamentos verticais $w_{máx}$ referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC	288
4.6.1.2 Comparação e discussão das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{máx}$ e de cisalhamento $(\tau_{xz})_{máx}$ referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC.....	291
4.6.1.3 Comparação e discussão das máximas tensões de cisalhamento $(\tau_{xy})_{máx}$ referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC	295
4.6.2 Comparação e discussão das análises estruturais referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC.....	298
4.6.2.1 Comparação e discussão dos máximos deslocamentos verticais $w_{máx}$ referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC	298

4.6.2.2 Comparação e discussão das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e de cisalhamento $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC.....	301
4.6.2.3 Comparação e discussão das máximas tensões de cisalhamento $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC	305
4.7 VERIFICAÇÃO DOS PAINÉIS DE MLCC SEGUNDO OS CRITÉRIOS DO PROJETO DE REVISÃO DA ABNT NBR 7190:2020.....	308
4.7.1 Verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas	308
4.7.2 Verificação do Estado Limite Último.....	316
5 CONCLUSÃO.....	324
REFERÊNCIAS	327
APÊNDICE A – MODELO DE TABELA DO EXCEL PARA A TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS	333
APÊNDICE B – MODELO DE TABELA DO EXCEL PARA A TEORIA DE DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO DE PRIMEIRA ORDEM	335
APÊNDICE C – MODELO DE TABELA DO EXCEL PARA A TEORIA DE DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO DE TERCEIRA ORDEM.....	337

1 INTRODUÇÃO

A Áustria e a Alemanha, no início dos anos 1990, destacaram-se pelo advento de um novo produto, a madeira lamelada colada cruzada (MLCC), o qual é também comumente denominado, em inglês, por *cross laminated timber* (CLT).

A MLCC é um produto que, sob a forma de painéis, pode ser empregado como placas ou chapas em diversas aplicações estruturais de caráter residencial ou não residencial. Karacabeyli e Gagnon (2019) apontam que, nos últimos anos, a MLCC começou a ter o seu emprego cada vez mais difundido, especialmente em países da Europa e da América do Norte, por razão das inúmeras vantagens que lhe são inerentes, tais como: eficiência energética na produção, alto grau de pré-fabricação, baixo peso próprio, bom desempenho termoacústico, além de um bom desempenho em condições de incêndio.

Assim como qualquer material empregado em finalidades estruturais, os painéis de MLCC devem atender a determinados requisitos de dimensionamento e de utilização, ou seja, devem satisfazer os Estados Limites Último e de Serviço. A verificação desses estados limites necessita, *a priori*, do levantamento das tensões normais e de cisalhamento ou dos esforços solicitantes internos, além do cálculo dos deslocamentos verticais por intermédio da análise estrutural.

Atualmente, para a análise estrutural dos painéis de MLCC utilizados como placas, a norma CEN EN 1995-1-1:2004 prescreve o Método Gama, também referido por *Mechanically Jointed Beams Theory*, cuja ideia central é avaliar esses painéis por meio da consideração de rigidezes efetivas à flexão e ao cisalhamento. Esse método também é especificado em outras literaturas técnicas internacionais, juntamente a outros, nomeadamente: o Método de Analogia ao Cisalhamento (ou *Shear Analogy Method*) e o Método κ (ou *Composite Theory*).

Os métodos supracitados são bastante interessantes sob a óptica da prática de projetos, uma vez que possibilitam, com relativa facilidade e rapidez, o cálculo das flechas e das tensões – normais e de cisalhamento – decorrentes nos painéis de MLCC empregados como placas.

É também importante pontuar que esses métodos aludidos analisam o problema dos painéis de MLCC, sujeitos à flexão simples, sob a forma unidimensional, isto é, dão a eles um tratamento típico de vigas. Contudo, a avaliação dos deslocamentos verticais e das tensões nesses painéis também pode ser feita mediante o uso das teorias de placas, isto é, de análises bidimensionais, cujos fundamentos residem na Teoria da Elasticidade. Outra abordagem possível, sendo largamente empregada nos dias atuais, consiste em realizar análises estruturais por meio do Método dos Elementos Finitos, com o auxílio de um programa computacional.

Dentro do contexto delineado, o presente trabalho propõe-se, mediante a aplicação de diferentes teorias de placas, a avaliar os deslocamentos verticais e as tensões, normais e de cisalhamento, em painéis de MLCC utilizados como placas e submetidos a um carregamento perpendicular ao seu plano. De forma complementar, a pesquisa também alvitra comparar os resultados fornecidos pelas teorias de placas com aqueles resultantes do emprego dos métodos unidimensionais, bem como com os resultados advindos de modelagens em *software* de Elementos Finitos e de uma nova abordagem de cálculo proposta. Posteriormente à determinação das flechas e das máximas tensões, também constitui uma proposição deste trabalho verificar o atendimento dos Estados Limites Último e de Serviço de acordo com os critérios contidos no projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020.

1.1 JUSTIFICATIVA

A MLCC é um produto relativamente recente e de uso estrutural crescente nos últimos anos. Em face dessa percepção, esta pesquisa pretende, sobretudo, fazer uso de formulações, oriundas da Teoria da Elasticidade, para descrever o comportamento estrutural – em termos de deslocamentos verticais e tensões - de painéis de MLCC utilizados como placas e solicitados por carregamento distribuído perpendicular ao seu plano.

Dentre as vantagens do uso de formulações provenientes da Teoria da Elasticidade, está o fato de que elas podem servir a análises mais generalizadas do comportamento dos corpos deformáveis, sendo passível a sua aplicação a materiais com propriedades geométricas e mecânicas distintas. Dentro dessa abordagem, elimina-se a necessidade de confecção de novos modelos numéricos ou experimentais a cada análise desejada, bastando-se lançar mão das formulações desenvolvidas.

As supramencionadas formulações correspondem, neste caso, àquelas relativas às teorias de placas, as quais são elaboradas visando à consideração de relações deformação-deslocamentos, equações de compatibilidade de deformações, equações diferenciais de equilíbrio, relações constitutivas do material e condições de contorno. O uso dessas teorias pode, ao permitir o estudo do comportamento estrutural dos painéis de MLCC, possibilitar, por conseguinte, a realização de dimensionamentos e verificações das condições de serviço, à luz de teorias bem fundamentadas na Teoria da Elasticidade.

Ademais, os resultados obtidos com a aplicação da Teoria da Elasticidade podem também constituir uma boa opção para serem utilizados como referência no momento de validação de modelos numéricos elaborados para os painéis de MLCC, bem como na análise

de resultados experimentais, haja vista que a referida teoria é bastante tradicional, bem fundamentada e tem seu uso difundido e reconhecido.

A presente pesquisa também aborda os métodos analíticos unidimensionais e o Método dos Elementos Finitos aplicado aos painéis de MLCC, haja vista que os primeiros apresentam uso recorrente na prática de projetos e o segundo é uma ferramenta de uso bastante difundido atualmente e que permite analisar estruturas com as mais diversas propriedades – geométricas e mecânicas – e condições de carregamento e de vinculações.

Por ser a análise estrutural de painéis de MLCC um tema relativamente recente, o presente trabalho também adquire importância ao propor uma nova metodologia de cálculo, baseada na adaptação da Teoria de Rankine-Grasshoff (ou Teoria das Grelhas), a qual já tem uso consagrado na análise estrutural de lajes de concreto armado.

Portanto, esta pesquisa se justifica, especialmente, por apresentar diversos métodos de cálculo para os painéis de MLCC em flexão simples, além de estabelecer comparativos entre os seus resultados e aferir a viabilidade de uso desses painéis em situações habituais de projeto. Também faz-se importante enfatizar que os métodos abordados se limitam a análises em regime elástico-linear, além de considerar a madeira como um material de natureza ortotrópica. Por fim, as análises realizadas tomam, a princípio, algumas simplificações: a consideração de painéis de MLCC com resistências características à compressão e à tração iguais, a inexistência de emendas, assim como a não consideração do efeito *rolling shear*.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo geral

Avaliar o comportamento estrutural de painéis de MLCC sujeitos a carregamento transversal uniformemente distribuído, em termos de deslocamentos verticais e de tensões – normais e de cisalhamento – por meio de diferentes teorias de placas, métodos analíticos unidimensionais e Método dos Elementos Finitos.

1.2.2 Objetivos específicos

Para que o objetivo geral seja alcançado, pressupõe-se que sejam simultaneamente atingidos os seguintes objetivos específicos:

- Determinar, via teorias de placas, os deslocamentos verticais e as tensões, normais e de cisalhamento, em painéis de MLCC submetidos à flexão simples;
- Identificar como a distribuição das tensões, normais e de cisalhamento, obtidas com as teorias de placas, estão relacionadas às cinemáticas de deslocamentos assumidas em cada uma delas;
- Determinar os deslocamentos verticais e as tensões, normais e de cisalhamento, por meio dos métodos analíticos unidimensionais;
- Determinar os deslocamentos verticais e as tensões, normais e de cisalhamento, por meio do Método dos Elementos Finitos, valendo-se para isso de modelagens realizadas no *software* ADINA;
- Apresentar uma nova metodologia analítica simplificada para os painéis de MLCC em flexão simples e calcular os deslocamentos verticais e as tensões, normais e de cisalhamento, por meio dela;
- Comparar os valores críticos das grandezas de interesse à análise estrutural que foram obtidas com os diferentes métodos de cálculo;
- Verificar o atendimento dos Estados Limites Último e de Serviço para os painéis de MLCC à luz do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Nesta seção, encontra-se o desenvolvimento teórico dos temas basilares do presente trabalho. Assim sendo, tem-se, *a priori*, a exposição dos aspectos gerais e das propriedades da madeira lamelada colocada cruzada (MLCC), bem como a descrição do seu processo de produção e das vantagens e desvantagens associadas ao seu uso. Posteriormente à apresentação do produto MLCC, encontram-se os métodos de análise estrutural que podem ser aplicados para o cômputo das tensões – normais e de cisalhamento – e dos deslocamentos verticais que ocorrem nesses painéis quando da atuação de um carregamento transversal uniformemente distribuído, responsável pela imposição de um estado de flexão simples. Por último, são apresentados os critérios de verificação dos Estados Limites Último e de Serviço, referentes às peças de madeira em flexão simples, que são especificados pelo projeto de revisão da norma ABNT NBR 7190:2020 e os resultados de trabalhos correlatos.

2.1 MADEIRA LAMELADA COLADA CRUZADA

Nesta subseção, abordam-se diversos aspectos da madeira lamelada colada cruzada, de forma a apresentar um panorama geral acerca das principais características do produto MLCC. No decurso desta etapa, são abordados os seguintes tópicos: propriedades físicas e mecânicas da madeira, principais definições a respeito da MLCC, exemplos de construções que fizeram seu uso, vantagens e desvantagens que lhe são associadas, seu processo de produção, bem como seu estágio de desenvolvimento e produção em território nacional e internacional.

2.1.1 Aspectos gerais do produto madeira lamelada colada cruzada

2.1.1.1 A madeira como material estrutural

A madeira é um material orgânico e que pode provir tanto de florestas naturais como de áreas de reflorestamentos, sendo assim um recurso abundante e renovável (CALIL JÚNIOR et al., 1998). É provável que a madeira seja o material de construção de uso mais longínquo, por razão da sua disponibilidade na natureza e facilidade relativa de manuseio e trabalhabilidade (PFEIL; PFEIL, 2003). Em complemento, Forest Products Laboratory (2021) elucida que foi justamente os fatores anteriormente pontuados que fizeram da madeira um material a ser

buscado para a construção de casas, estruturas diversas, móveis, ferramentas, objetos de decoração e, até mesmo, combustível.

Como material de construção, Uriartt (1994) aponta que a madeira apresenta um amálgama de características vantajosas não encontrado em outros materiais, podendo-se elencar o baixo peso próprio em face de boas resistências mecânicas à tração e à compressão; a capacidade de absorção de esforços e choques mecânicos; a garantia de um bom isolamento térmico, a trabalhabilidade relativamente simples e o fato de a madeira constituir um recurso renovável e de manutenção não expressiva quando devidamente preservada.

Além das vantagens aludidas, Forest Products Laboratory (2021) ainda acentua que um dos principais fatores que contribui para que a madeira seja um material desejado nas construções, bem como em suas demais aplicações, consiste na sua disponibilidade em diversas espécies, tamanhos e formas, garantindo assim um atendimento às mais diversas demandas de distintos locais.

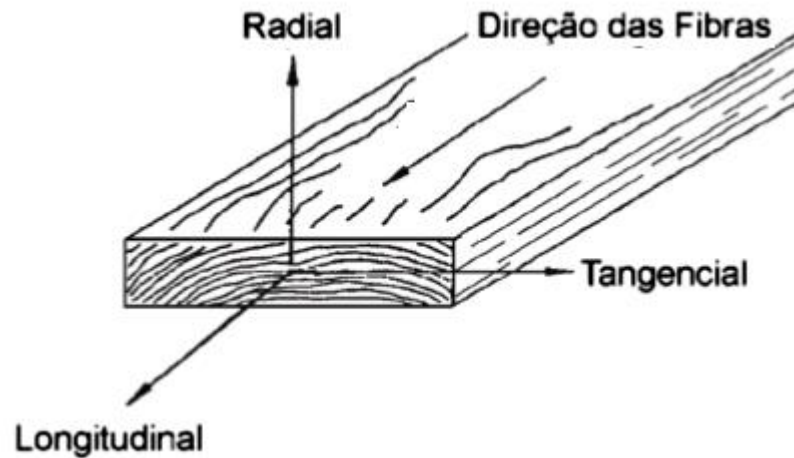
Ainda no contexto do uso da madeira nas construções, fazem-se necessárias a definição e a determinação das suas principais propriedades físicas e mecânicas, a fim de que se possa caracterizar esse material de forma adequada. Além dessas propriedades, é imprescindível o entendimento do conceito de ortotropia.

2.1.1.1.1 Ortotropia da madeira

Em Forest Products Laboratory (2021), tem-se que a madeira pode ser descrita como um material ortotrópico, isto é, um material que apresenta propriedades mecânicas distintas segundo a direção de três eixos perpendiculares entre si, nomeadamente, direções: longitudinal, radial e tangencial. A Figura 2.1 ilustra as três direções aludidas para a uma peça de madeira genérica. Forest Products Laboratory (2021) destaca também que a direção longitudinal coincide com a direção das fibras da madeira, enquanto que as direções radial e tangencial são aquelas perpendiculares e tangenciais aos anéis de crescimento da madeira, respectivamente.

No entanto, Pfeil e Pfeil (2003) complementam que, para fins práticos, é suficiente diferir as propriedades da madeira segundo duas direções: direção longitudinal e direção transversal às fibras, a qual engloba as direções radial e tangencial.

Figura 2.1 – Ortotropia da madeira: direções longitudinal, radial e tangencial



Fonte: Adaptado de Forest Products Laboratory (2021)

2.1.1.1.2 Principais propriedades físicas da madeira

As principais propriedades físicas da madeira são: teor de umidade, densidade, retratibilidade e resistência ao fogo. De forma sucinta, tais propriedades podem ser definidas das seguintes maneiras:

- a) Teor de umidade: Forest Products Laboratory (2021) afirma que o teor de umidade é um dos parâmetros mais críticos que afetam a madeira e suas propriedades, sendo determinado, na maioria dos casos, como o percentual de água existente em relação à massa seca da madeira. Como o teor de umidade exerce influência sobre as propriedades mecânicas de resistência e de rigidez, é comum as normas técnicas, tal como a ABNT NBR 7190:1997, estabelecerem classes de umidade para ajustar os valores dessas propriedades em função das condições ambientais onde um determinado elemento estrutural de madeira permanecerá;
- b) Densidade: a ABNT NBR 7190:1997 define dois tipos de densidades, a densidade básica e a densidade aparente. A densidade básica corresponde à razão entre a massa seca e o volume saturado de corpos de prova de madeira, enquanto que a densidade aparente é aquela determinada para um teor de umidade de 12%, sendo este estipulado como um valor de referência pela aludida norma brasileira. Segundo Calil Júnior et al. (1998), a densidade básica pode ser utilizada para comparação com outros valores da literatura internacional, enquanto que a densidade aparente deve ter seu uso na classificação das madeiras e no cálculo estrutural;

- c) **Retratibilidade:** Calil Júnior et al. (1998) definem a retratibilidade como sendo uma redução das dimensões de uma peça de madeira, ocasionada pela saída da água impregnada nas paredes das suas fibras. Em complemento, os autores apontam que, devido ao comportamento anisotrópico da madeira, a retratibilidade se manifesta de forma desigual segundo as três direções principais da madeira (Figura 2.1), sendo preponderante na direção tangencial, seguida da direção radial e menos presente na direção longitudinal;
- d) **Resistência ao fogo:** Ritter (1990) procura esclarecer que a performance da madeira sob condições de incêndio é, por vezes, mal compreendida, em decorrência da inflamabilidade do material. Todavia, o referido autor aponta que, à medida que a madeira queima, tem-se a formação de uma camada mais externa carbonizada, a qual age de forma a isolar a parcela intacta da madeira. Forest Products Laboratory (2021) ainda aponta que o teor de umidade exerce grande influência sobre a formação da camada carbonizada, além da densidade da madeira – associada à quantidade de massa que precisa ser queimada e às propriedades térmicas – e da direção avaliada. Segundo os referidos autores, na direção longitudinal, a carbonização é cerca de duas vezes maior que aquela verificada nas direções transversais.

2.1.1.1.3 Principais propriedades mecânicas da madeira

Já no que se refere às principais propriedades mecânicas da madeira, verificam-se, tal como para qualquer material estrutural, as seguintes:

- a) **Módulo de elasticidade:** propriedade mecânica que relaciona a tensão aplicada ao longo de um eixo com a deformação que se manifesta também ao longo deste eixo, havendo, para a madeira, valores distintos para cada uma das direções principais (RITTER, 1990);
- b) **Módulo de elasticidade transversal:** propriedade mecânica que estabelece uma relação entre as tensões de cisalhamento em um plano com as distorções associadas a esse plano, notando-se, no caso da madeira, a existência dos planos longitudinal-radial, longitudinal-tangencial e radial-tangencial (RITTER, 1990);

- c) Coeficiente de Poisson: coeficiente definido como a razão entre a deformação transversal e a deformação paralela à aplicação de um carregamento, sendo possível definir seis valores distintos para a madeira por razão de seu comportamento anisotrópico segundo três direções (RITTER, 1990);
- d) Rigidez: a ABNT NBR 7190:1997 define a rigidez da madeira como sendo o valor médio do módulo de elasticidade de corpos de prova determinado em regime elástico-linear, isto é, em um regime que não impõe deformações permanentes aos corpos de prova e que apresenta proporcionalidade para a relação tensão-deformação;
- e) Resistência: segundo a ABNT NBR 7190:1997, a resistência da madeira é, convencionalmente, considerada como a máxima tensão que pode ser aplicada a corpos de prova de madeira, isentos de defeitos, até a ocorrência de um fenômeno que empecilhe a sua utilização, sendo os fenômenos mais comuns a ruptura e a deformação excessiva.

2.1.1.2 Breve histórico, definições e aplicações do produto madeira lamelada colada cruzada

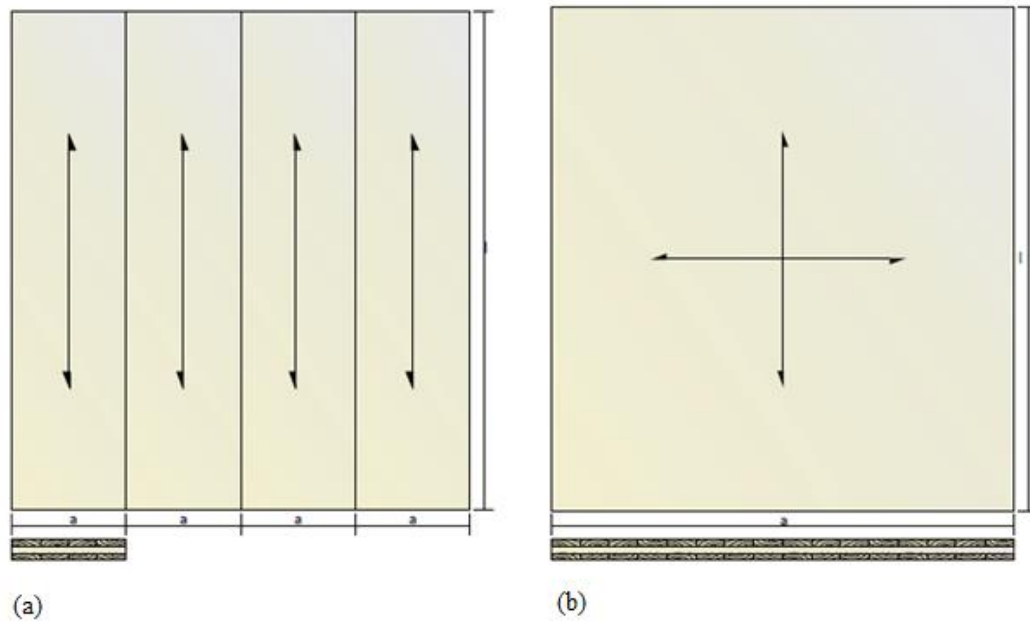
Ao longo da década de 1990, a Áustria e a Alemanha foram os países marcados pelo desenvolvimento de um novo produto de madeira, a madeira lamelada colada cruzada, ou, em inglês, *Cross Laminated Timber* (CLT). Mais especificamente, o advento de tal produto remonta a uma parceria estabelecida entre a academia e o setor industrial austríaco cujo objetivo era o desenvolvimento de um moderno produto de madeira que pudesse ser empregado como material estrutural e, concomitantemente, atendesse às demandas da construção sustentável (STAUDER, 2013).

Para fins de definição dos painéis de MLCC, pode-se recorrer à norma norte americana ANSI/APA PRG 320:2019, segundo a qual um painel de MLCC corresponde a produto pré-fabricado obtido pela disposição de, pelo menos, três camadas ortogonais de madeira serrada que são coladas entre si, a fim de se formar um sólido retangular que pode ser empregado em tetos, pisos ou paredes.

A Figura 2.2 traz representações genéricas de painéis de MLCC empregados como placas em pisos ou tetos, os quais podem trabalhar mecanicamente segundo uma direção (Figura 2.2 a) ou segundo duas direções (Figura 2.2b). A Figura 2.3, por sua vez, ilustra a terceira

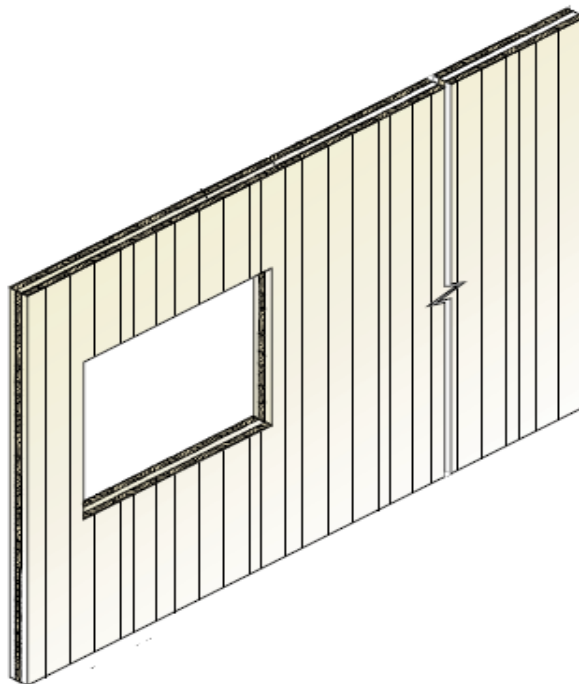
possibilidade de aplicação para os painéis de MLCC, isto é, seu emprego como chapas em paredes de edificações.

Figura 2.2 – Painéis de MLCC utilizados como placas em pisos e tetos



Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Douglas (2013)

Figura 2.3 – Painel de MLCC utilizado como chapa em paredes



Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Douglas (2013)

Em termos de aplicações práticas dos painéis de MLCC em construções, sabe-se que a primeira estrutura a fazer uso deste produto foi uma pequena residência construída em 1993 por Schuler e Guyer, porém alguns estudos apontam que placas de madeira lamelada colada cruzada haviam sido estudadas já no início do século XX, mais precisamente em 1908 por Schuchow e Kalep (DIAS, 2018).

Na contemporaneidade, os painéis de MLCC demonstram-se, até o momento, economicamente viáveis apenas para edificações de médio a grande porte, conforme demonstrado pela experiência europeia (KARACABEYLI; GAGNON, 2019). Em complemento, Jones et al. (2016), com base em pesquisas comparativas de custos, concluíram que a referida viabilidade pode ser verificada para edifícios de até oito pavimentos. Esses autores elucidam que, embora o custo do material de uma edificação com painéis de MLCC seja superior ao custo da mesma edificação em concreto armado ou aço, a viabilidade pode ser garantida por razão dos ganhos com a redução do prazo de execução.

Como uma forma de se avaliar o emprego de painéis de MLCC a construções de pequeno porte, Burbach e Pei (2017) realizaram um estudo a respeito da viabilidade econômica do emprego desses painéis em típicas residências unifamiliares norte americanas, comparando-o com uso de alternativas como o *light wood frame*. Como resultado, os referidos autores constataram que, no atual estágio de desenvolvimento da MLCC, sua aplicação em residências unifamiliares é possível, mas, sob o ponto de vista estritamente financeiro, há opções menos onerosas. Burbach e Pei (2017) também apontam que talvez a solução em MLCC para residências unifamiliares seja uma solução interessante em localidades sujeitas a ventos fortes ou sismos, haja vista que o sistema estrutural em MLCC é dotado de grande rigidez.

Com a finalidade de melhor demonstrar as potencialidades de emprego da MLCC, estão a seguir reproduzidas, nas Figuras 2.4 a 2.7, construções notáveis que fizeram uso desse sistema construtivo. Mais especificamente, são apresentadas aplicações da MLCC em edificações de usos educacional, residencial, comercial e público, respectivamente.

Figura 2.4 – *The Open Academy* – Aplicação da MLCC em edificação educacional



Fonte: Waugh Thistleton Architects (2018)

Figura 2.5 – *Carmathen House* (construção) – Aplicação da MLCC em edificação residencial



Fonte: Waugh Thistleton Architects (2018)

Figura 2.6 – *Wilderness Restaurant* (construção) – Aplicação da MLCC em edificação comercial



Fonte: Waugh Thistleton Architects (2018)

Figura 2.7 – *Belarusian Memorial Chapel* – Aplicação da MLCC em edificação pública

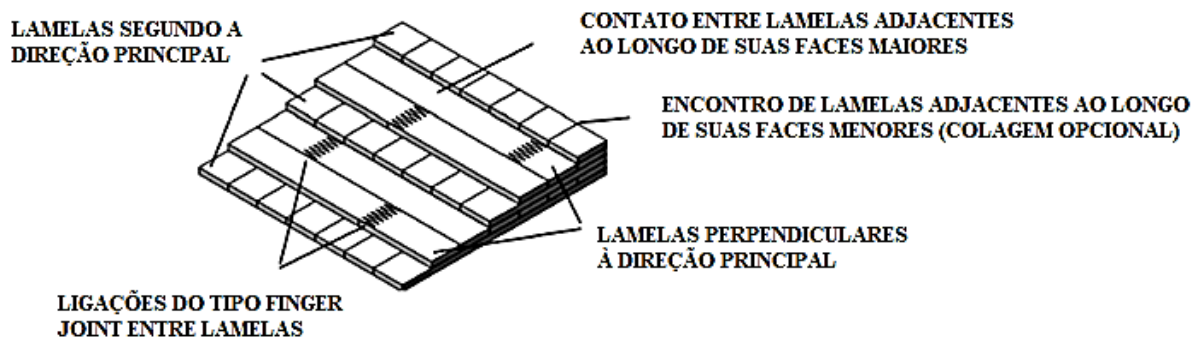


Fonte: Waugh Thistleton Architects (2018)

2.1.1.3 Geometria dos painéis de madeira lamelada colada cruzada

Em termos de geometria, é possível descrever os painéis MLCC como sendo constituídos por camadas de lamelas de madeira adjacentes, as quais são dispostas de forma cruzada, geralmente com ângulo de 90°, sendo mantidas unidas por meio de adesivo aplicado ao longo de suas faces maiores e, por vezes, também ao longo das suas faces menores (KARACABEYLI; GAGNON, 2019). A Figura 2.8 ilustra um painel de MLCC genérico juntamente com a indicação dos seus principais elementos constituintes.

Figura 2.8 – Disposição das lamelas de madeira em um painel de MLCC



Fonte: Adaptado de Christovasilis et al. (2016)

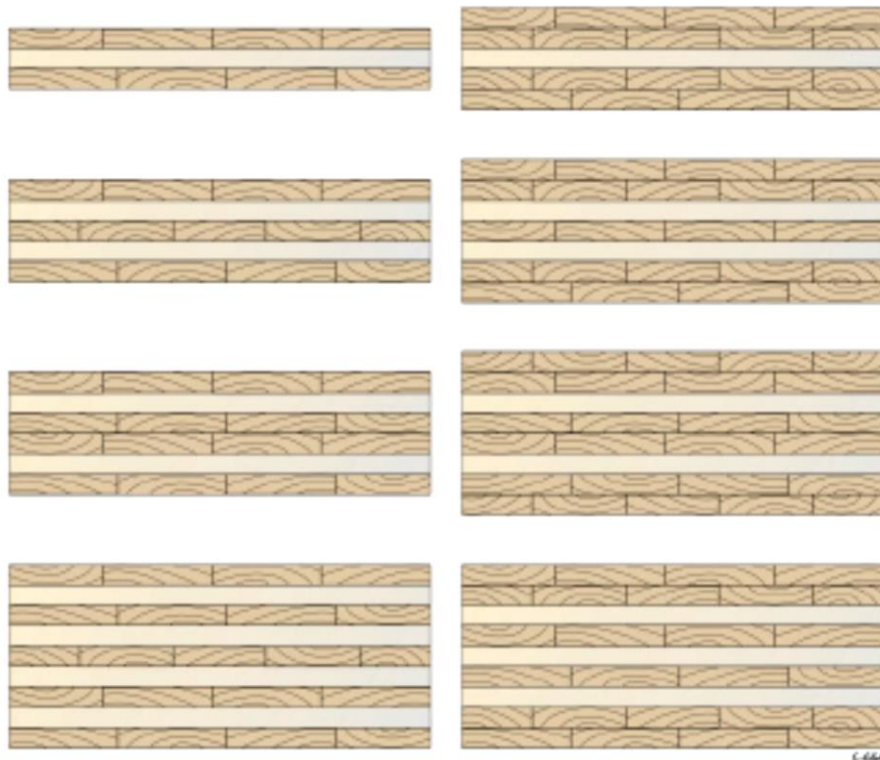
Quando da definição da geometria dos painéis de MLCC, Karacabeyli e Gagnon (2019) apontam a necessidade de serem devidamente observados os seguintes pontos:

- a) Os painéis de MLCC devem possuir, pelo menos, três camadas de lamelas de madeira adjacentes dispostas ortogonalmente entre si;
- b) É usual a produção de painéis de MLCC com um número ímpar de camadas, sendo mais comum o emprego de 3, 5 e 7 camadas;
- c) As lamelas de madeira individuais devem possuir espessura variando entre 16 mm e 51 mm, bem como largura numa faixa de 60 mm a 240 mm;
- d) As dimensões finais dos painéis de MLCC dependem do fabricante do produto. Entretanto, é possível a produção de painéis com comprimentos de até 18 m - recorrendo-se a emendas do tipo *fingerjoints* - e espessuras de até 508 mm, sendo, contudo, as espessuras finais mais usuais as de 105 mm, 175 mm e 245 mm;

- e) Nos painéis de MLCC utilizados como chapas - a exemplo de paredes de edificações - as lamelas constitutivas das camadas mais externas são dispostas numa orientação paralela à altura, enquanto que nos painéis de MLCC empregados como placas - a exemplo de pisos e tetos - as referidas lamelas têm orientação coincidente com a direção do maior vão a ser vencido.

Já no que se refere à forma de se compor as seções transversais dos painéis de MLCC, tem-se, na Figura 2.9, algumas configurações de uso comum, notando-se a possibilidade de serem produzidos painéis com camadas de lamelas adjacentes dotadas de orientação não alternada, de forma a se obter alguma vantagem estrutural.

Figura 2.9 – Exemplos de seções transversais de painéis de MLCC



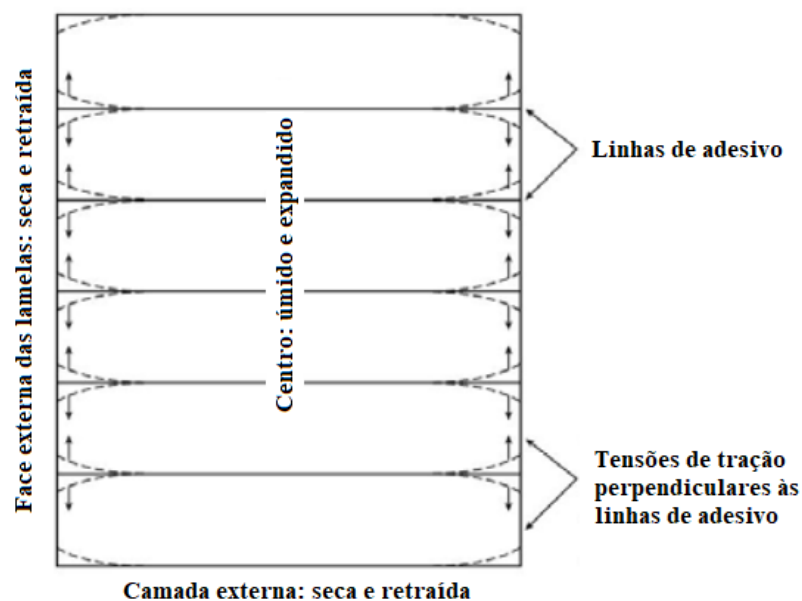
Fonte: Karacabeyli e Gagnon (2019)

Ademais, embora não constituam tema de estudo do presente trabalho, dois outros aspectos relacionados às lamelas dos painéis de MLCC merecem ter sua influência, pelo menos, pontuada, sendo eles: a colagem das lamelas de madeira com um certo espaçamento e a realização de incisões em suas superfícies.

No que se refere à colagem das lamelas de madeira com um certo espaçamento, Niemz e Sonderegger (2013) afirmam que, quanto menor o espaçamento entre as lamelas da camada

central de um painel MLCC, maiores se tornam a sua condutividade térmica e a sua resistência à difusão do vapor d'água, fator este que pode gerar gradientes de teor de umidade ao longo da altura do painel e, por conseguinte, tensões de tração e delaminação das lamelas quando do seu processo de secagem. A Figura 2.10 traz uma representação esquemática do desenvolvimento das tensões internas de tração, em um painel genérico de MLCC, por ocasião de gradientes de teor de umidade.

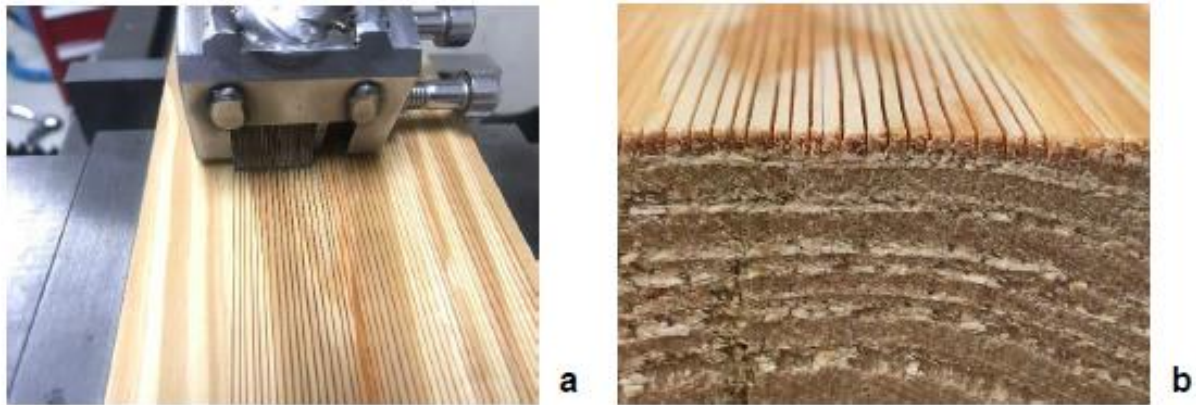
Figura 2.10 – Tensões internas de tração em painéis de MLCC devidas a gradientes de teor de umidade



Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Gagnon (2019)

No tocante à realização de incisões nas lamelas de madeira, Vella, Heitzmann e Redman (2019) afirmam que uma das formas de se buscar minimizar os efeitos adversos das tensões internas de tração e da delaminação das lamelas de madeira é justamente executar incisões ao longo das mesmas, tal como ilustra a Figura 2.11. Além dessa vantagem, os referidos autores pontuam que as incisões nas lamelas de madeira também colaboram para aumentar a penetração do adesivo aplicado nas células da madeira que lhe são mais próximas, garantindo assim uma melhor ligação entre as lamelas dos painéis de MLCC.

Figura 2.11 – Realização de incisões em lamelas de um painel de MLCC



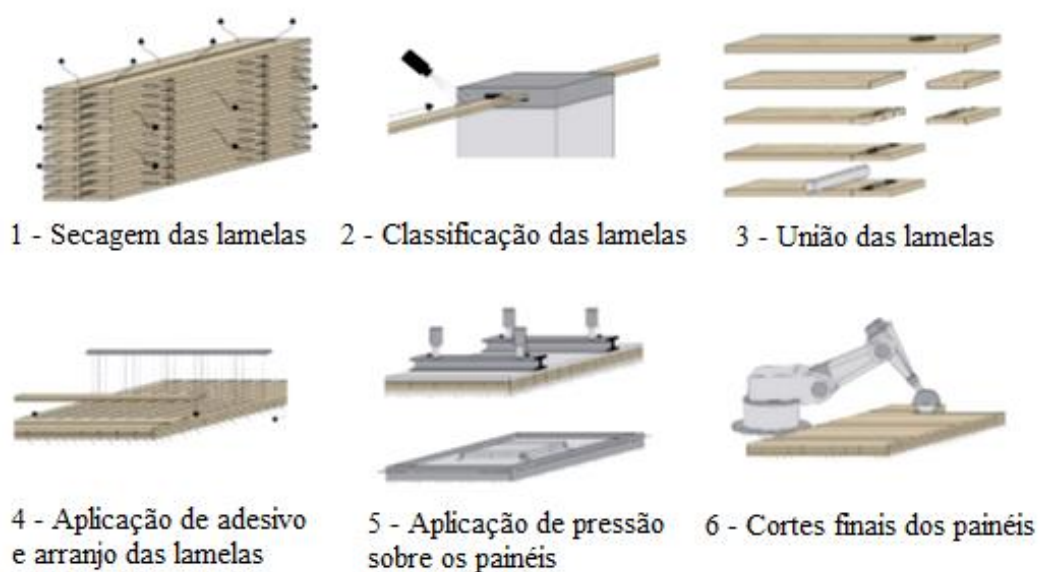
Fonte: Vella, Heitzmann e Redman (2019)

Niemz e Sonderegger (2013), em contraponto às vantagens trazidas pelo processo de abertura de incisões nas lamelas de madeira dos painéis de MLCC, pontuam que o procedimento aludido conduz a uma diminuição da seção transversal da peça e, conseqüentemente, a uma redução da sua resistência.

2.1.1.4 Processo de produção dos painéis de madeira lamelada colada cruzada

A Figura 2.12 traz uma representação esquemática das principais etapas sequenciais envolvidas no processo de produção dos painéis de MLCC.

Figura 2.12 – Etapas do processo de produção de painéis de MLCC



Fonte: Adaptado de Jeleč, Varevac e Rajčić (2017)

Em conformidade com Jeleč, Varevac e Rajčić (2017), as etapas 1, 2 e 3 da Figura 2.12 representam, respectivamente, as atividades de secagem, classificação (visual e/ou mecânica) e união longitudinal, por meio de emendas *fingerjoints*, das lamelas de madeira. Já as etapas finais, segundo os referidos autores, são aquelas que compreendem as operações de aplicação de adesivo e arranjo das lamelas, aplicação de pressão sobre os painéis e cortes finais, respectivamente.

Dentro do contexto das três primeiras etapas do processo de fabricação de painéis de MLCC, algumas observações trazidas pela norma norte americana ANSI/APA PRG 320:2019 merecem destaque, sendo elas: o teor de umidade das lamelas para o processo de fabricação e alguns critérios de classificação visual e mecânica das lamelas de madeira. Para as etapas finais, há também certos pontos que merecem melhor elucidação, tais como: os tipos de adesivos estruturais geralmente empregados, a quantidade de adesivo estrutural a ser aplicada e a pressão necessária para a conformação dos painéis de MLCC. Esses tópicos complementares são contemplados nas subseções subsequentes.

2.1.1.4.1 Teor de umidade das lamelas para a produção dos painéis de madeira lamelada colada cruzada

A norma norte americana ANSI/APA PRG 320:2019 prescreve, para o momento da fabricação dos painéis de MLCC, que as lamelas de madeira estejam com teor de umidade na faixa de $12\% \pm 3\%$, a fim de que seja assegurada a adequada eficiência do adesivo estrutural aplicado. Em complemento, tem-se, segundo o manual de informações técnicas Crosslam ([201-]b), que essa empresa brasileira efetua a secagem das lamelas de madeira em estufa até que seja atingido um teor de umidade de $12\% \pm 2\%$, notando-se grande similaridade com o valor prescrito pela norma norte americana.

Além de assegurar a eficiência do adesivo estrutural aplicado às lamelas de madeira, o teor de umidade de cerca de 12%, juntamente ao processo de laminação cruzada, garante que os painéis de MLCC venham a ter melhor estabilidade dimensional, por razão do atenuamento dos movimentos ocasionados por variações do teor de umidade (DIAS, 2018).

2.1.1.4.2 Classificação visual das lamelas de madeira

De acordo com a norma ANSI/APA PRG 320:2019, a classificação visual das lamelas de madeira deve, a princípio, ser acordada entre o fabricante e o comprador do produto, podendo alguns critérios não mandatórios serem observados para fins arquitetônicos, tais como:

- a) Em superfícies expostas, todas as aberturas de nós e fendas com dimensões superiores a 19 mm podem ser vedados com massa de preenchimento de madeira (*wood-tone filler*) ou com enxertos de madeira escolhidos com base na sua similaridade com a madeira adjacente, tanto em termos de orientação das fibras quanto em termos de coloração;
- b) As faces das lamelas aparentes devem estar livres de nós e as eventuais aberturas de nós preenchidas;
- c) As aberturas de nós não devem apresentar dimensão, medida na direção do comprimento da lamela, superior a 19 mm. Como um caso particular, podem ser admitidas fendas com dimensão maior que 19 mm, desde que a área da mesma não exceda 323 mm²;
- d) As fendas aparentes, oriundas do processo de colagem das lamelas de madeira, com dimensão superior a 1,6 mm devem ser preenchidas;
- e) As superfícies expostas devem ter aspecto suave e sem a admissão de falhas.

2.1.1.4.3 Classificação mecânica das lamelas de madeira

Outra maneira de se fazer a classificação das lamelas de madeira é por meio de uma classificação mecânica e, para tal, a norma ANSI/APA PRG 320:2019 afirma que devem ser conduzidos ensaios para determinação do módulo de elasticidade, segundo as direções de maior e de menor inércia. Com base na referida norma, a determinação dos módulos de elasticidade pode ser realizada em conformidade com o ensaio de flexão de quatro pontos (*fourth-point load method*) da norma ASTM D198:2019, empregando amostras com largura ou espessura não inferior a 305 mm e vão central com dimensão aproximadamente igual a 30 vezes a espessura da amostra.

Ainda no tocante ao ensaio de flexão de quatro pontos, Ecker, Miotto e Turmina (2017) afirmam que os valores experimentais do módulo de elasticidade à flexão (MOE) – ou módulo

de elasticidade - e do módulo de ruptura (MOR), podem ser aferidos fazendo-se uso das seguintes equações provenientes da Resistência dos Materiais:

$$MOE = \frac{23 P L^3}{108 b_w h^3 \Delta} \quad (2.1)$$

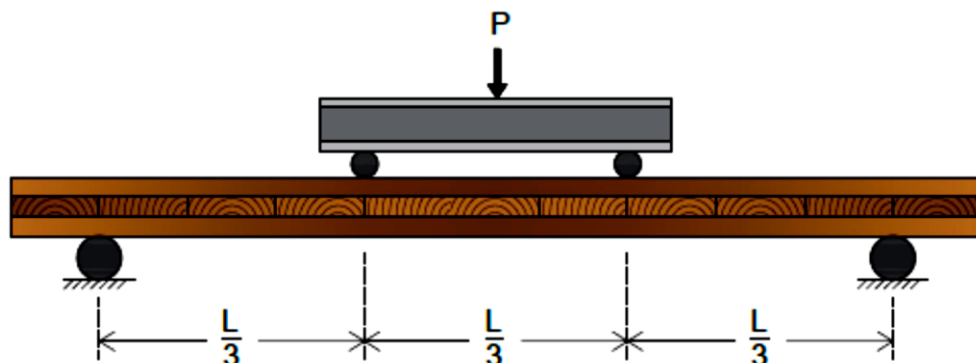
$$MOR = \frac{P_{\text{máx}} L}{b_w h^2} \quad (2.2)$$

Em que:

- P – Força concentrada aplicada ao painel de MLCC;
- $P_{\text{máx}}$ – Máximo valor da força concentrada aplicada ao painel de MLCC;
- L – Vão central do painel de MLCC;
- b_w – Largura da seção transversal do painel de MLCC;
- h – Altura da seção transversal do painel de MLCC;
- Δ - Flecha do painel de MLCC gerada pela aplicação da força concentrada P ;

Para fins de ilustração do ensaio de flexão de quatro pontos, a Figura 2.13 traz sua representação esquemática, enquanto a Figura 2.14 exemplifica um aparato real que pode ser empregado para sua realização, sendo necessários os seguintes itens: cavaletes, painel de MLCC a ser ensaiado, máquina universal de ensaios para aplicação da força concentrada P e transdutores de deslocamento para medição da flecha Δ .

Figura 2.13 – Representação esquemática do ensaio de flexão de quatro pontos



Fonte: Ecker, Miotto e Turmina (2017)

Figura 2.14 – Exemplo de aparato para realização do ensaio de flexão de quatro pontos



Fonte: Ecker, Miotto e Turmina (2017)

2.1.1.4.4 Adesivos estruturais para a colagem das lamelas de madeira

Atualmente, os adesivos estruturais mais empregados para a produção dos painéis de MLCC são a melamina ureia formaldeído (MUF) e o poliuretano monocomponente (1K-PUR), sendo que, em geral, o último é mais flexível e mais vulnerável a altas temperaturas que o primeiro (BRANDNER, 2013). Para Brandner (2013), ambos os adesivos estruturais são resistentes à radiação solar, umidade e ação da água, bem como, após a sua aplicação, deixam uma linha de cola praticamente sem coloração.

Dias (2018) complementa que, dentre os adesivos estruturais MUF e 1R-PUR, as fábricas voltadas à produção de painéis de MLCC têm dado preferência ao último, haja vista que ele não apresenta, em sua composição, solventes e formaldeídos, além de ser um produto livre de riscos de emissões tóxicas ao longo de sua vida útil.

Além do tipo de adesivo estrutural a ser aplicado às lamelas de madeira que comporão os painéis de MLCC, faz-se importante também estudar a quantidade de adesivo a ser aplicada. Em um estudo experimental desenvolvido por Ecker, Miotto e Turmina (2017), é demonstrada a influência direta que a quantidade de adesivo exerce sobre as propriedades mecânicas do produto, bem como sob a sua forma de ruptura. Para a realização desse estudo, os autores mencionados confeccionaram doze painéis de MLCC, cada qual com três camadas ortogonais de lamelas de madeira pinus, as quais foram unidas por meio da aplicação de adesivo poliuretano monocomponente. O Quadro 2.1 reúne as distintas quantidades de adesivo

estrutural estudadas por Ecker, Miotto e Turmina (2017), juntamente às principais conclusões obtidas pelos autores.

Quadro 2.1 – Influência da quantidade de adesivo estrutural aplicada ao painéis de MLCC

Quantidade de adesivo estrutural	Influência sobre as propriedades mecânicas	Influência sobre o modo de ruptura
120 g/cm ²	(MOE) _{médio} = 3,66 MPa (MOR) _{médio} = 6.373,77 MPa	Rompimento nas linhas de adesivo
160 g/cm ²	(MOE) _{médio} = 15,11 MPa (MOR) _{médio} = 9.664,63 MPa	Rompimento nas linhas de adesivo
200 g/cm ²	(MOE) _{médio} = 34,21 MPa (MOR) _{médio} = 10.200,04 MPa	Rompimento nas lamelas de madeira

Fonte: Adaptado de Ecker, Miotto e Turmina (2017)

Da análise do Quadro 2.1, é possível observar a grande disparidade dentre os valores médios obtidos para o MOE e MOR de painéis de MLCC idênticos entre si. Segundo os autores responsáveis pelo estudo, os valores médios das propriedades mecânicas relativos à quantidade de adesivo estrutural de 200 g/cm² são aqueles que mais concordam com os valores especificados pela norma norte americana ANSI/APA PRG 320:2019. Em complemento, é importante pontuar que o dimensionamento dos painéis de MLCC se baseia, sobretudo, no Estado Limite Último de ruptura das fibras mais solicitadas à flexão e ao cisalhamento das peças, ou seja, parte do pressuposto de que a ruptura ocorre nas lamelas de madeira e não nas linhas de adesivo. Dessa forma, é importante assegurar, por meio da aplicação de adequada quantidade de adesivo, que a ruptura dos painéis de MLCC venha a ocorrer nas lamelas de madeira e não das linhas de adesivo.

2.1.1.4.5 Pressões para a conformação dos painéis de madeira lamelada colada cruzada

Conforme Brandner (2013), a aplicação das pressões necessárias para promover a conformação adequada dos painéis de MLCC pode ser conduzida de três formas distintas, sendo elas: aplicação de pressões por prensa hidráulica (Figura 2.15), por prensa à vácuo (Figura 2.16) e por meio de parafusos, pregos e sargentos, sendo esta última forma pouco empregada.

Figura 2.15 – Prensa hidráulica para produção de painéis de MLCC



Fonte: Gonçalves Filho e Dias [(201-)]

Figura 2.16 – Prensa à vácuo para produção de painéis de MLCC



Fonte: Gonçalves Filho e Dias [(201-)]

Cada um dos métodos de aplicação de pressões aos painéis de MLCC possui características que lhe são peculiares e situações para as quais se mostram mais apropriados. As características dos três métodos mencionados encontram-se sintetizadas no Quadro 2.2.

Brandner (2013) também pontua a necessidade de serem estabelecidos valores mínimos e máximos para as pressões a serem aplicadas aos painéis de MLCC. Dessa forma, o referido autor sugere a adoção dos subsequentes valores mínimos:

- a) Pressões de 0,01 a 0,10 MPa para o adesivo estrutural 1R-PUR;
- b) Pressões de 1,4 a 2,0 MPa para o adesivo estrutural MUF

Já para os valores máximos de pressão, Brandner (2013) recomenda a adoção dos valores da norma europeia EN 386:2001, segundo a qual deve-se ter pressões de até 0,60 MPa para lamelas com espessura de até 35 mm e pressões numa faixa de 0,80 MPa a 1,00 MPa para lamelas com espessura entre 35 mm e 45 mm.

Quadro 2.2 – Formas de aplicação de pressões aos painéis de MLCC

Forma de aplicação de pressão	Principais características
Prensa hidráulica	Permite a aplicação de pressões de até 1,5 MPa, capacitando a colagem de lamelas mais espessas e de madeiras mais densas
	Grande automação do processo de fabricação, englobando as etapas de posicionamento, alinhamento, aplicação de adesivo estrutural e aplicação de pressão sobre os painéis de MLCC
	Prensagem paralela, a qual não permite a produção de peças curvas e a correção de falhas e desvios nas lamelas
Prensa à vácuo	Permite a aplicação de pressões numa faixa de 0,05 MPa a 0,10 MPa, limitando o uso de lamelas mais espessas, bem como certas espécies de madeira mais densas
	Mais econômica que a prensa hidráulica
	A disposição das lamelas de madeira é feita de forma manual, enquanto que a aplicação da pressão é feita mecanicamente e à vácuo, com o auxílio de uma lona sintética, garantindo a distribuição uniforme da pressão sobre a superfície do painel de MLCC
	Permite a produção de peças curvas e a correção de falhas e desvios nas lamelas de madeira
Parafusos, pregos e sargentos	Forma de prensagem mais simples e de baixo custo

Fonte: Adaptado de Brandner (2013)

2.1.1.5 Vantagens e limitações da madeira lamelada colada cruzada

Nesta subseção, estão reunidas as principais vantagens e desvantagens associadas ao uso dos painéis de MLCC como sistema estrutural nas edificações.

2.1.1.5.1 Vantagens da madeira lamelada colada cruzada

Karacabeyli e Gagnon (2019) sintetizam um conjunto de vantagens que são obtidas quando da escolha da MLCC como sistema estrutural, sendo elas: eficiência energética na produção, alto grau de pré-fabricação, baixo peso próprio, bom desempenho termoacústico, além de um bom desempenho em condições de incêndio.

Brandner (2013), por sua vez, também pontua que o uso da MLCC conduz a construções mais limpas e com menor tempo de execução, por razão dos painéis de MLCC chegarem prontos para montagem no canteiro de obras. Mais precisamente, durante a pré-fabricação dos painéis de MLCC, as portas, as janelas e os demais furos para passagem de dutos são cortados com equipamentos de alta precisão, sendo, posteriormente, transportados ao canteiro de obras e montados com o auxílio de guindastes ou gruas e uma reduzida equipe de trabalhadores (DIAS, 2018).

Ademais, a combinação do baixo peso específico e da capacidade de transmissão de carga bidirecional fazem dos painéis de MLCC uma excelente alternativa para situações de reconstrução ou de reforma de edifícios existentes, bem como para os casos de construções sujeitas a carregamentos excepcionais que envolvem, por exemplo, terremotos (BRANDNER, 2013).

2.1.1.5.2 Limitações da madeira lamelada colada cruzada

Apesar de os painéis de MLCC apresentarem uma grande quantidade de vantagens quando do seu uso nas construções, é igualmente importante elencar algumas de suas limitações.

Para Jones et al. (2016), constituem-se em limitações ao emprego da MLCC as seguintes necessidades: projeto completo da edificação antes da produção e montagem dos painéis, revestimento externo que seja capaz de fornecer adequada impermeabilização e instalação dos painéis acima de uma camada impermeabilizante quando se faz presente o risco de contato com a umidade do solo.

Mallo e Espinoza (2014) também identificaram, com base em entrevistas com acadêmicos, arquitetos e profissionais do setor de produção que o consumo excessivo de madeira para produção dos painéis de MLCC, bem como a falta de conhecimento acerca do produto e, por vezes, a falta de um custo competitivo também constituem desvantagens para o sistema em questão, uma vez que limitam o avanço de sua aplicação.

2.1.1.6 Desempenho dos painéis de madeira lamelada colada cruzada

Mohammad et al. (2012) reúnem algumas características relacionadas ao desempenho apresentado pelos painéis de MLCC em algumas condições práticas de interesse, sendo elas:

- a) Desempenho térmico: os painéis de MLCC apresentam bom desempenho térmico, o qual, caso desejado, pode ser melhorado com a aplicação de adesivo ao longo das menores faces das lamelas de madeira, impedindo assim potenciais fluxos de ar. Além disso, o bom desempenho térmico também está associado à estabilidade dimensional desses painéis, a qual age no sentido de diminuir os efeitos adversos da retração e, por conseguinte, a ocorrência de problemas relacionados a fluxos de ar por razão de distorções de geometria;
- b) Desempenho acústico: os painéis de MLCC também são caracterizados por apresentar bom desempenho acústico quando adequadamente construídos. Esse bom desempenho constitui uma das vantagens do emprego dos referidos painéis em edificações de múltiplos pavimentos;
- c) Desempenho em condições de incêndio: os painéis de MLCC apresentam um bom desempenho em condições de incêndio e esse fato se deve à própria natureza desses painéis em utilizar espessuras consideráveis de madeira, tendendo a queimar vagarosamente e formar uma camada isolante de carvão;
- d) Desempenho em condições de umidade: assim como qualquer produto de madeira, os painéis de MLCC devem ser mantidos distantes da umidade, a fim de lhes assegurar boa durabilidade ao longo de sua vida útil. Neste contexto, faz-se então importante a adoção de técnicas e de materiais de revestimento que venham a impedir o contato desses painéis com a umidade e com fluxos de ar e de vapor.

2.1.1.7 A madeira lamelada colada cruzada no Brasil

Atualmente, a utilização de produtos de madeira no Brasil, em especial, a madeira lamelada colada (MLC) vem apresentando um crescimento expressivo, mas isso ainda não é uma realidade no que se refere à madeira lamelada colocada cruzada (PEREIRA; CALIL JUNIOR, 2019).

Dentre os motivos relacionados à carência de utilização dos painéis de MLCC, pode-se elencar, como o principal motivo, a falta de conhecimento a respeito do material e do sistema construtivo a ele associado (PEREIRA; CALIL JUNIOR, 2019).

Além do mais, é importante pontuar que, em território nacional, há apenas uma empresa especializada atuando na produção de painéis de MLCC, a qual se encontra situada no Estado de São Paulo. Esse fato também constitui um sério agravante na falta de expressividade da MLCC no Brasil e para a expansão do seu campo de aplicações.

2.2 TÓPICOS SOBRE TEORIA DA ELASTICIDADE E MECÂNICA DO CONTÍNUO

Após uma exposição geral do produto madeira lamelada colada cruzada, é possível então abordar tópicos mais específicos acerca deste trabalho, ou seja, os tópicos relativos às teorias de placas e aos demais métodos de análise estrutural trazidos pela literatura técnica. Todavia, antes de adentrar a esses temas, faz-se necessária uma breve exposição dos principais tópicos da Teoria da Elasticidade e da Mecânica do Contínuo, haja vista que essas disciplinas são aquelas que fornecem o embasamento teórico e matemático para as teorias de placas. Desta forma, esta subseção aborda as principais conceituações e formulações pertinentes à Teoria da Elasticidade e à Mecânica do Contínuo, isto é, trata dos seguintes assuntos relativos aos sólidos deformáveis: natureza das forças, componentes de tensão, relações deformação-deslocamento, equações de compatibilidade de deformações, equações diferenciais de equilíbrio e relações constitutivas dos materiais.

2.2.1 Definições iniciais e natureza das forças em corpos sólidos

Até certa extensão, todos os materiais estruturais apresentam uma propriedade denominada elasticidade, segundo a qual, tem-se que, se a atuação de forças externas, produtoras de deformação, não excederem um determinado limite, então a deformação introduzida desaparece quando da remoção dessas forças (TIMOSHENKO, 1951).

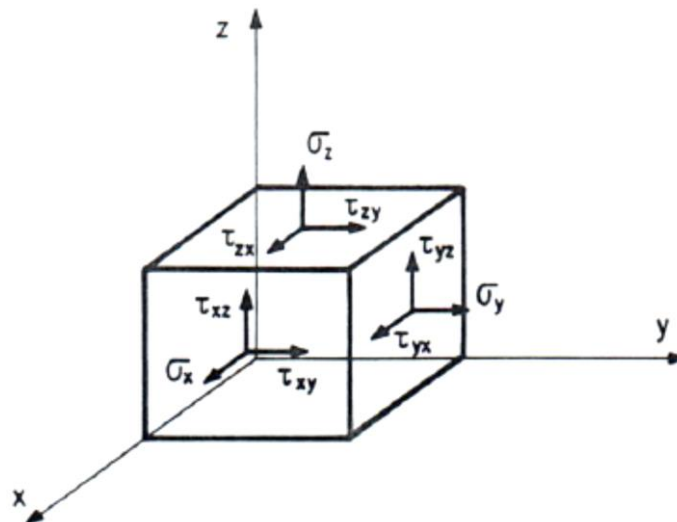
Segundo Villaça e Garcia (1998), as forças externas que atuam sobre um corpo são definidas como a ação do meio externo sobre ele, podendo ser classificadas como:

- a) Forças de superfície: são estabelecidas por intermédio do contato entre dois corpos, sendo esse contato feito ao longo de uma determinada área. Portanto, as forças de superfície são forças por unidade de área, isto é, apresentam dimensão $[FL^{-2}]$;
- b) Forças de massa ou de volume: atuam sobre o corpo à distância e se fazem presentes por razão da atuação de um campo (por exemplo, o campo gravitacional). As forças de massa, por sua vez, são forças que se distribuem ao longo do volume do corpo e, por conseguinte, possuem dimensão $[FL^{-3}]$.

2.2.2 Componentes de tensão para um corpo sólido deformável

As forças que atuam sobre um corpo sólido deformável podem ser avaliadas em termos de tensões normais (σ) e tensões de cisalhamento (τ) atuantes em um ponto O de um cubo elementar, conforme representado na Figura 2.17.

Figura 2.17 – Componentes de tensão em um cubo elementar



Fonte: Villaça e Garcia (1998)

Para que seja possível a descrição do estado tensional nas seis faces do cubo elementar, deve-se ter três componentes de tensão normal ($\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$ e $\sigma_{zz} = \sigma_z$) e seis componentes de tensão de cisalhamento (τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} e τ_{zy}) (TIMOSHENKO, 1951). Entretanto, Timoshenko (1951) demonstra, pelo Teorema de Cauchy ou Teorema das Tensões Recíprocas,

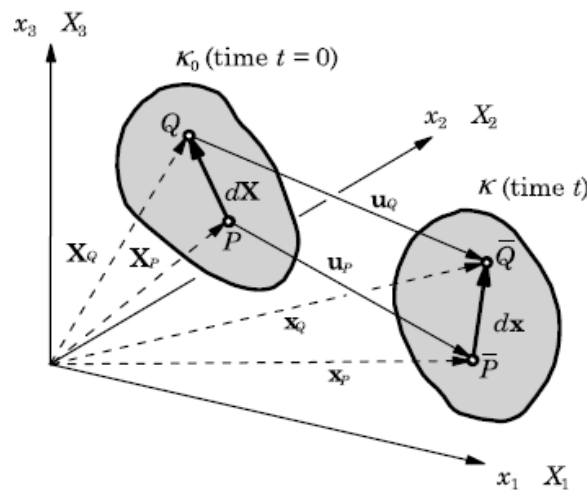
que $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$ e $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, de modo que o estado de tensões no cubo elementar fica completamente definido para seis componentes de tensão.

2.2.3 Relações deformação-deslocamento para um corpo sólido deformável

Quando um corpo elástico apresenta restrições suficientes para impedir seu movimento como um corpo rígido, o deslocamento de suas partículas só é possível quando o corpo experimenta uma deformação (TIMOSHENKO, 1951).

A Figura 2.18 ilustra o movimento das partículas de um corpo sólido deformável qualquer de uma posição de referência (ou indeformada) κ_0 , no instante de tempo $t = 0$, para uma nova posição deformada κ , em um instante de tempo t .

Figura 2.18 – Configurações de referência e deformada de um corpo sólido



Fonte: Reddy (2007)

Pela análise da Figura 2.18, observa-se que, na configuração de referência, cada partícula do corpo sólido tem sua posição definida pelo vetor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$, enquanto que, na configuração deformada, as posições das partículas do corpo passam a ser definidas pelo vetor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Em conformidade com Reddy (2007), ao se adotar uma descrição Lagrangeana, os deslocamentos das partículas do corpo sólido podem ser escritos em função das coordenadas $\mathbf{X}$, as quais recebem o nome de coordenadas materiais, e do tempo t . Dessa forma, os referidos deslocamentos de um corpo sólido, designados por $\mathbf{u}$, podem ser expressos por:

$$u(X,t) = x(X,t) - X \quad (2.3)$$

Já em relação à deformação de um corpo sólido, tem-se que esta pode ser medida por meio do tensor de deformação de Green-Lagrange (E), o qual é definido de modo a considerar as variações dos quadrados dos comprimentos infinitesimais inicial (dX) e final (dx) (REDDY, 2007). A partir da definição anterior, tem-se então que o tensor de deformação de Green-Lagrange fica definido por:

$$E = \frac{dx \, dx - dX \, dX}{2 \, dX \, dX} \quad (2.4)$$

Utilizando o operador gradiente ∇ , em relação às coordenadas materiais, para o deslocamento u, Reddy (2007) reescreve a Equação (2.4) na seguinte forma:

$$E = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T + \nabla u (\nabla u)^T] \quad (2.5)$$

As componentes do tensor de deformação de Green-Lagrange E_{jk} fornecem todas as equações de deformação-deslocamento, podendo elas ser escritas na subsequente forma de notação indicial:

$$E_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial X_k} + \frac{\partial u_k}{\partial X_j} + \frac{\partial u_m}{\partial X_j} \frac{\partial u_m}{\partial X_k} \right) \quad (2.6)$$

Na Equação (2.6), os índices j e k são índices livres e que definem, para um corpo sólido deformável no espaço, um conjunto de 6 equações de deformação-deslocamento, enquanto que o índice m é um índice mudo (ou índice fictício) e que, portanto, representa soma em cada uma das equações. Dessa forma, a Equação (2.6) pode ser reescrita, de forma expandida, resultando no conjunto de equações a seguir:

$$E_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_1} \right)^2 \right] \quad (2.7)$$

$$E_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right)^2 \right] \quad (2.8)$$

$$E_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial X_3} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right)^2 \right] \quad (2.9)$$

$$E_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_2} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \right) \quad (2.10)$$

$$E_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_1} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \quad (2.11)$$

$$E_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} + \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \frac{\partial u_1}{\partial X_3} + \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \frac{\partial u_2}{\partial X_3} + \frac{\partial u_3}{\partial X_2} \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \right) \quad (2.12)$$

Segundo Reddy (2007), quando da consideração de pequenos deslocamentos, os termos das Equações (2.7) a (2.12) que envolvem quadrados e produtos podem ser desprezados, uma vez que os mesmos são negligenciáveis em face da unidade. Ademais, o referido autor ainda pontua que a diferença entre $\partial u_i / \partial x_j$ e $\partial u_i / \partial X_j$ acaba por também desaparecer e, para a situação de pequenos deslocamentos, emprega-se então o denominado tensor das deformações infinitesimais ε , o qual é dado por:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} [\nabla u + (\nabla u)^T] \quad \text{ou} \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.13)$$

Ao se considerar um sistema de coordenadas cartesianas retangulares ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $u_1 = u$, $u_2 = v$ e $u_3 = w$), a Equação (2.13) pode ser reescrita com o auxílio das seis relações deformação-deslocamento a seguir.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (2.16)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2.17)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.18)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad (2.19)$$

As relações deformação-deslocamento anteriores, demonstradas com o auxílio da Mecânica do Contínuo, são, conforme Timoshenko (1951) e Villaça e Garcia (1998), as mesmas expressões obtidas pela Teoria da Elasticidade quando é feita a consideração da ocorrência de pequenas deformações em um corpo.

2.2.4 Equações de compatibilidade de deformações para um corpo sólido deformável

Da necessidade de se conhecer o estado tensional em um corpo, faz-se necessária também a consideração das chamadas equações de compatibilidade de deformações. Em conformidade com Timoshenko (1951), quando essas equações são satisfeitas, as mesmas garantem que os deslocamentos do corpo estejam associados às suas deformações.

Sob a óptica da Mecânica do Contínuo, Reddy (2007) apresenta as seguintes equações de compatibilidade de deformações escritas em notação indicial:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{ij}}{\partial x_m \partial x_n} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{mn}}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{im}}{\partial x_j \partial x_n} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{jn}}{\partial x_i \partial x_m} = 0 \quad (2.20)$$

Os índices i, j, m e n da Equação (2.20) são todos índices livres e podem assumir os valores 1, 2 ou 3 quando um problema tridimensional é analisado. Para garantir que todas as deformações de um corpo sólido estejam relacionadas entre si, algumas situações devem ser avaliadas, sendo elas:

a) $i = j = 1$ e $m = n = 2$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} \quad (2.21)$$

b) $i = j = 1$ e $m = n = 3$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_3} \quad (2.22)$$

c) $i = j = 2$ e $m = n = 3$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} \quad (2.23)$$

d) $i = j = 1, m = 2$ e $n = 3$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1^2} \quad (2.24)$$

e) $i = j = 2, m = 1$ e $n = 3$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2^2} \quad (2.25)$$

f) $i = j = 3, m = 1$ e $n = 2$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{13}}{\partial x_2 \partial x_3} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{23}}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_3^2} \quad (2.26)$$

As Equações (2.21), (2.22) e (2.23) correspondem às relações entre as deformações longitudinais e as distorções nos planos 1-2, 1-3 e 2-3, respectivamente. Já as Equações (2.24), (2.25) e (2.26), são aquelas que, por sua vez, estabelecem relações entre as deformações longitudinais ε_{11} , ε_{22} e ε_{33} e todas as distorções ε_{12} , ε_{13} e ε_{23} , respectivamente. Se todas as seis

equações mencionadas forem satisfeitas, então todas as deformações de um corpo sólido estão compatibilizadas entre si.

Ao se lançar mão de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $u_1 = u$, $u_2 = v$ e $u_3 = w$), as Equações (2.21) a (2.26) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \quad (2.29)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} \quad (2.30)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y^2} \quad (2.31)$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z^2} \quad (2.32)$$

As Equações (2.27) a (2.32) também podem ser encontradas em Villaça e Garcia (1998), sendo que esses autores as deduzem com o auxílio da Teoria da Elasticidade.

Em complemento, para a situação específica de problemas bidimensionais, tal como as teorias de placas, haverá somente uma equação de compatibilidade de deformações a ser satisfeita. Ao supor, por exemplo, que o problema esteja contido no plano 1-2 (ou no plano x - y , para o caso de coordenadas cartesianas retangulares), tem-se que a única equação de compatibilidade de deformações a ser atendida é:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{22}}{\partial x_1 \partial x_1} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (2.33)$$

Ou:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 \quad (2.34)$$

2.2.5 Equações diferenciais de movimento e de equilíbrio para um corpo sólido deformável

Com o auxílio da segunda lei de Newton, Reddy (2007) estabelece, para um corpo sólido de massa específica ρ e sujeito a ação de forças externas T (por unidade de área) e f (por unidade de massa), a seguinte relação entre as tensões σ e os deslocamentos u :

$$\text{div}(\sigma) + \rho f = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \text{ou} \quad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial X_j} + \rho f_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (2.35)$$

Para o caso específico da Equação (2.35), as tensões designadas por σ podem se referir tanto às tensões normais quanto às tensões de cisalhamento. Ademais, tem-se que, na Equação (2.35), i é um índice livre e que varia de 1 a 3, definindo assim um conjunto de três equações diferenciais. Já j é um índice mudo e, portanto, representa uma soma, de 1 a 3, em cada equação diferencial do sistema. Dessa forma, ao se expandir a Equação (2.35), obtém-se o sistema:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial X_3} + \rho f_1 = \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \quad (2.36)$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial X_3} + \rho f_2 = \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial X_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial X_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial X_3} + \rho f_3 = \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} \quad (2.38)$$

Caso sejam consideradas pequenas deformações ($X \approx x$) e um sistema de coordenadas cartesianas retangulares ($x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $u_1 = u$, $u_2 = v$ e $u_3 = w$), as Equações (2.36), (2.37) e (2.38) podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \rho f_x = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2.39)$$

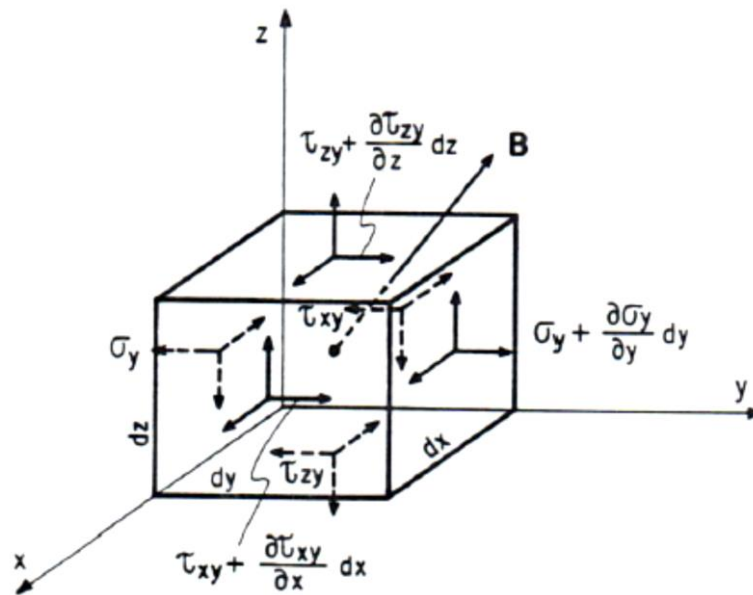
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \rho f_y = \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \rho f_z = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.41)$$

Para o caso de equilíbrio estático, basta considerar os membros direitos das Equações (2.35) a (2.41), denominadas equações diferenciais de movimento, iguais a zero, haja vista que esses termos representam acelerações do corpo sólido, isto é, correspondem às derivadas de segunda ordem dos deslocamentos (u, v ou w) em relação ao tempo t.

As Equações (2.39) a (2.41), com os seus membros direitos nulos, são as mesmas deduzidas por Villaça e Garcia (1998), a partir da Teoria da Elasticidade, tomando-se um cubo elementar sujeito às componentes de tensões que caracterizam por completo o seu estado tensional, às variações dessas tensões, bem como às forças de massa $B = \rho \cdot f$. Essa situação encontra-se ilustrada na Figura 2.19.

Figura 2.19 – Equilíbrio de um cubo elementar



Fonte: Villaça e Garcia (1998)

Villaça e Garcia (1998), ao realizarem a análise do equilíbrio do cubo elementar da Figura 2.19, segundo as direções dos eixos coordenados x , y e z , deduzem igualmente o subsequente sistema de equações diferenciais:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + B_x = 0 \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + B_y = 0 \quad (2.43)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + B_z = 0 \quad (2.44)$$

As Equações (2.42) a (2.44) são as denominadas equações diferenciais de equilíbrio de um corpo sólido.

2.2.6 Relações constitutivas ou lei de Hooke generalizada para o material de um corpo sólido deformável

As equações que correlacionam as componentes de tensão com as componentes de deformação, de forma a caracterizar o comportamento de um material, são denominadas relações constitutivas (VILLAÇA; GARCIA, 1998).

Antes do estabelecimento das relações constitutivas, algumas definições acerca das propriedades dos materiais fazem-se necessárias. Segundo Reddy (2004), os corpos podem assumir as seguintes designações:

- a) Corpos homogêneos e heterogêneos. Os corpos homogêneos são aqueles cujas propriedades do material constituinte são as mesmas em toda a sua extensão, ou seja, são independentes da posição analisada. De forma contrária, para os materiais heterogêneos, observa-se uma relação de dependência entre as propriedades do material e a posição considerada;
- b) Corpos anisotrópicos, ortotrópicos e isotrópicos. Os corpos anisotrópicos caracterizam-se por apresentar, em um determinado ponto, propriedades mecânicas distintas para diferentes direções avaliadas. Os corpos isotrópicos, por sua vez,

possuem as mesmas propriedades mecânicas para qualquer direção de interesse. Já os corpos ortotrópicos, são aqueles dotados de três planos ortogonais de simetria, de tal modo que as propriedades mecânicas variam segundo três direções;

- c) Corpos elásticos e inelásticos. Corpos elásticos são aqueles distinguidos por exibir uma capacidade de retorno a sua configuração original quando da remoção das forças que lhe provocam deformações. Além disso, para esses corpos, têm-se relações unívocas entre estados de tensão e estados de deformação. Um corpo que não apresenta as propriedades anteriormente descritas é dito inelástico.

Realizadas as definições precedentes, pode-se então estabelecer as relações existentes entre as componentes de tensão e de deformação para um corpo sólido deformável. As equações matriciais (2.45) e (2.46) reúnem as relações constitutivas de um material, segundo Reddy (2007), sendo a primeira relativa às relações tensões-deformações e a última às relações deformações-tensões.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \quad (2.45)$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{ij} \quad (2.46)$$

Em que: C_{ijkl} e S_{ijkl} são tensores de quarta ordem, cujas componentes são denominadas parâmetros de rigidez e parâmetros de complacência do material, respectivamente. É possível ainda escrever as equações matriciais (2.45) e (2.46) de forma expandida, fazendo-se:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & C_{1113} & C_{1112} \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & C_{2213} & C_{2212} \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & C_{3313} & C_{3312} \\ C_{2311} & C_{2322} & C_{2333} & C_{2323} & C_{2313} & C_{2312} \\ C_{1311} & C_{1322} & C_{1333} & C_{1323} & C_{1313} & C_{1312} \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & C_{1223} & C_{1213} & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.47)$$

E:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & S_{1123} & S_{1113} & S_{1112} \\ S_{2211} & S_{2222} & S_{2233} & S_{2223} & S_{2213} & S_{2212} \\ S_{3311} & S_{3322} & S_{3333} & S_{3323} & S_{3313} & S_{3312} \\ S_{2311} & S_{2322} & S_{2333} & S_{2323} & S_{2313} & S_{2312} \\ S_{1311} & S_{1322} & S_{1333} & S_{1323} & S_{1313} & S_{1312} \\ S_{1211} & S_{1222} & S_{1233} & S_{1223} & S_{1213} & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Nota-se, a partir da Equação (2.47), que o parâmetro de rigidez C_{ijkl} relaciona tensões de subíndice ij com deformações de subíndice kl . Outrossim, o parâmetro de complacência S_{ijkl} relaciona deformações de subíndice ij com tensões de subíndice kl .

Villaça e Garcia (1998) também fazem algumas considerações importantes a respeito das relações constitutivas anteriores, sendo elas:

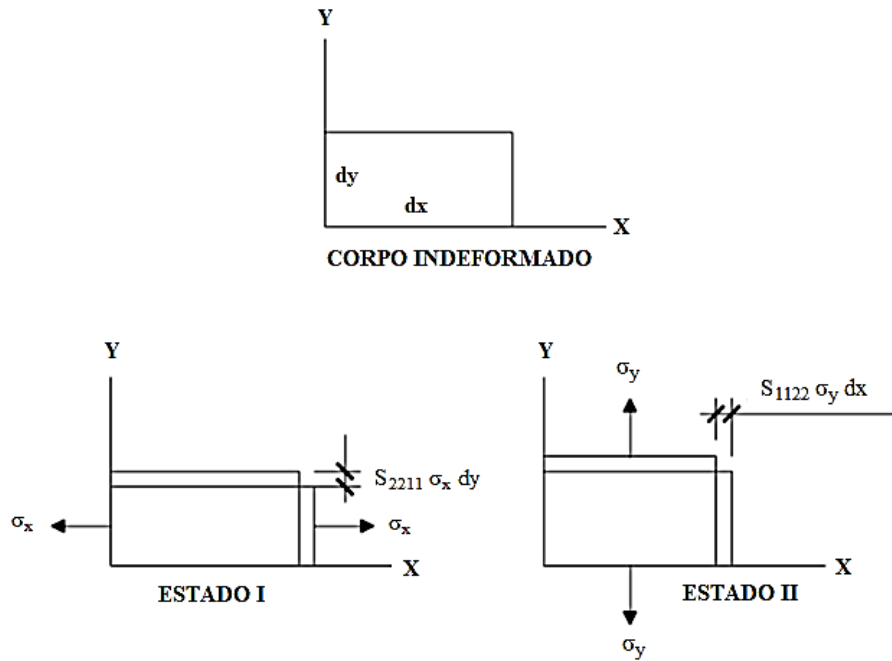
- a) As Equações (2.47) e (2.48) também recebem a denominação de Lei de Hooke Generalizada e os parâmetros de rigidez e de complacência tornam-se constantes quando da assunção da hipótese de homogeneidade do material;
- b) Pelo teorema da reciprocidade do trabalho, ou teorema de Betti, pode-se demonstrar que $S_{ijkl} = S_{klij}$ e, por conseguinte, $C_{ijkl} = C_{klij}$. Dessa forma, o número de parâmetros de rigidez e de complacência reduzem de 36 para 21.

O teorema de Betti encontra-se reproduzido na Figura 2.20. Segundo esse teorema, o trabalho dW das forças do Estado I para os deslocamentos do Estado II é igual ao trabalho dW das forças do Estado II para os deslocamentos do Estado I (VILLAÇA; GARCIA, 1998). Matematicamente, e com o auxílio da Figura 2.20, é possível escrever que:

$$dW = (\sigma_x dy dz) (S_{1122} \sigma_y dx) = (\sigma_y dx dz) (S_{2211} \sigma_x dy) \quad (2.49)$$

Da Equação (2.49), é imediata a conclusão de que $S_{1122} = S_{2211}$. Conclusão análoga pode ser obtida para os demais parâmetros S_{ijkl} e S_{klij} .

Figura 2.20 – Teorema da reciprocidade do trabalho (ou teorema de Betti)



Fonte: Adaptado de Villaça e Garcia (1998)

Além disso, Reddy (2004) afirma que, para o caso específico de um material ortotrópico (tal como a madeira), os parâmetros de rigidez e de complacência reduzem de 21 para 9. Neste caso, as expressões (2.47) e (2.48) são reduzidas às expressões (2.50) e (2.51).

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

Ou:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1111} & S_{1122} & S_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1122} & S_{2222} & S_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ S_{1133} & S_{2233} & S_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{1212} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Ainda segundo Reddy (2004), as propriedades de um material são definidas em laboratório por meio das seguintes constantes: módulo de elasticidade, módulo de elasticidade

transversal e coeficiente de Poisson. Com isso, o referido autor reescreve a relação constitutiva (2.51) da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E_1 & -\nu_{21}/E_2 & -\nu_{31}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{12}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{32}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{13}/E_1 & -\nu_{23}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G_{23} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

Sendo:

- E_1, E_2 e E_3 - Módulos de elasticidade do material segundo as direções 1, 2 e 3;
- G_{23}, G_{13} e G_{12} - Módulos de elasticidade transversal do material associados aos planos 2-3, 1-3 e 2-3;
- ν_{ij} - Coeficiente de Poisson definido pela razão entre a deformação transversal na direção j e deformação longitudinal na direção i .

2.3 TEORIAS DE PLACAS

Uma vez apresentados o panorama geral a respeito dos painéis de MLCC (subseção 2.1) e os principais tópicos acerca da Teoria da Elasticidade e da Mecânica do Contínuo (subseção 2.2), é possível adentrar ao cerne do presente trabalho, ou seja, a apresentação das denominadas Teorias de Placas.

Mais precisamente, nesta subseção, foca-se em três teorias de placas, nomeadamente: a teoria clássica de placas (ou *classical plate theory* – *CPT*), a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (ou *first order shear deformation theory* – *FSDT*) e a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem (ou *third order shear deformation theory* – *TSDT*). Essas teorias são derivadas da Teoria da Elasticidade tridimensional por meio do estabelecimento de hipóteses acerca da cinemática de deslocamentos (*displacement-based theories*) ou da cinemática de tensões (*stress-based theories*) ao longo da espessura da placa, as quais permitem reduzir um problema, originalmente tridimensional, a um problema bidimensional (REDDY, 2004).

2.3.1 Teoria clássica de placas ou teoria de Kirchhoff

2.3.1.1 Campo de deslocamentos e deformações para a teoria clássica de placas

De acordo com Reddy (2007), a teoria clássica de placas, também denominada teoria de placas de Kirchhoff, é uma extensão da teoria de vigas de Euler-Bernoulli para os problemas bidimensionais e que se baseia nas subseqüentes hipóteses simplificadoras:

- a) Linhas retas e perpendiculares ao plano médio da placa permanecem retas e perpendiculares após a deformação da placa;
- b) Inextensibilidade de qualquer reta normal transversal ao plano médio da placa após sua deformação;
- c) As retas normais transversais, após a deformação da placa, rotacionam de modo a permanecerem perpendiculares ao plano médio da placa.

Como consequência das hipóteses a e b, tem-se que:

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (2.53)$$

A integração da Equação (2.53) implica que o deslocamento w seja constante e uma função das coordenadas do plano da placa. Considerando que o plano da placa esteja contido no plano cartesiano x - y , pode-se escrever:

$$w(x,y) = w_0(x,y) \quad (2.54)$$

Já da hipótese c, verifica-se que as deformações transversais de cisalhamento são nulas, isto é:

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (2.55)$$

$$\epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (2.56)$$

As integrações das Equações (2.55) e (2.56) conduzem às expressões relativas aos deslocamentos u e v nas direções x e y do plano da placa, respectivamente. Como resultado dos processos de integração, tem-se as seguintes expressões:

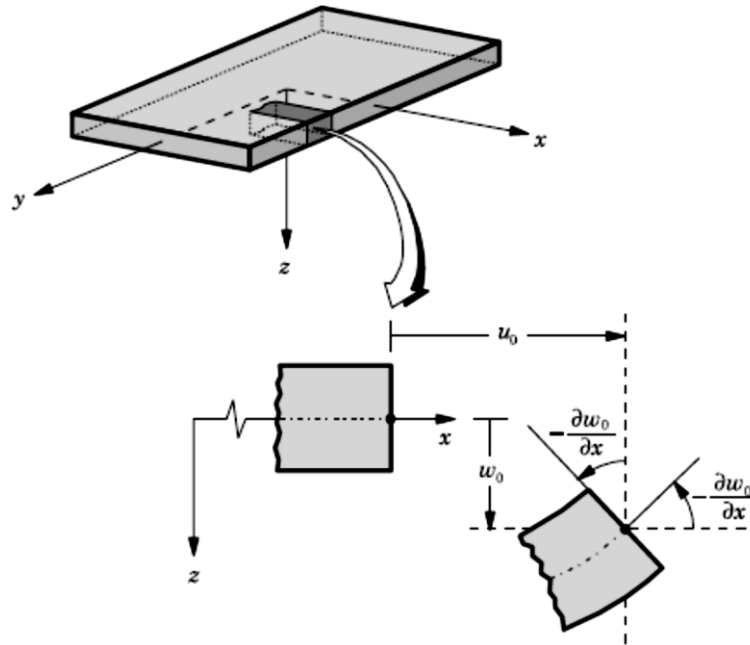
$$u(x,y,z) = u_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.57)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.58)$$

Em que: u_0 , v_0 e w_0 são as componentes de deslocamento, segundo as direções x , y e z , de um ponto contido no plano médio da placa, o qual é tomado como referência.

Segundo Reddy (2007), as Equações (2.54), (2.57) e (2.58) traduzem, portanto, o campo de deslocamentos assumido para a teoria clássica de placas, campo este que se encontra esquematicamente ilustrado na Figura 2.21.

Figura 2.21 – Cinemática de deslocamentos de uma placa segundo a teoria clássica



Fonte: Reddy (2007)

Reddy (2007), com a consideração de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, ao retomar as relações deformação-deslocamento (2.7) a (2.12), juntamente ao

campo de deslocamentos assumido e não desprezando os termos de ordem superior $(\partial w/\partial x)^2$, $(\partial w/\partial y)^2$ e $(\partial w/\partial x) \cdot (\partial w/\partial y)$, escreve as seguintes relações deformação-deslocamento:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (2.59)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 - z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} - 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.61)$$

$$\varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.62)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left(- \frac{\partial w_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) = 0 \quad (2.63)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.64)$$

A inclusão dos termos de ordem superior $(\partial w/\partial x)^2$, $(\partial w/\partial y)^2$ e $(\partial w/\partial x) (\partial w/\partial y)$ nas equações anteriores, faz com que as mesmas sejam válidas para placas que venham a apresentar rotações moderadas para as normais transversais (em torno de 10 a 15°). Em complemento, o autor também pontua que as Equações (2.59) a (2.61) são denominadas deformações de von Kármán, sendo possível reescrevê-las da seguinte maneira:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \varepsilon_{xx}^{(1)} \quad (2.65)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \varepsilon_{yy}^{(1)} \quad (2.66)$$

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}^{(0)} + z \gamma_{xy}^{(1)} \quad (2.67)$$

Sendo:

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad (2.68)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \quad (2.69)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \quad (2.70)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = - \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \quad (2.71)$$

$$\gamma_{xy}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.72)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = - 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (2.73)$$

2.3.1.2 Equações diferenciais de equilíbrio para a teoria clássica de placas

2.3.1.2.1 Considerações iniciais acerca da obtenção das equações diferenciais de equilíbrio das teorias de placas

Reddy (2007) realiza a dedução das equações diferenciais de equilíbrio das teorias de placas a partir do Princípio de Hamilton, o qual pode ser entendido como uma extensão do Princípio dos Trabalhos Virtuais, pois, além de considerar o trabalho realizado pelos esforços solicitantes internos e o trabalho das ações externas, também leva em consideração a contribuição da energia cinética e, desta forma, permite computar os efeitos dinâmicos sobre as placas. Ademais, o autor mencionado, no tocante ao trabalho realizado pelas ações externas, procura contabilizar os seguintes efeitos: carregamento distribuído por unidade de área, forças prescritas no contorno da placa e rigidez k de fundações elásticas.

Todavia, o presente trabalho limita-se a deduzir as equações diferenciais de equilíbrio das teorias de placas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais, considerando apenas as contribuições dos esforços solicitantes internos e a contribuição de um carregamento q distribuído por unidade de área. Essa abordagem é suficiente para avaliar os deslocamentos

verticais e as tensões – normais e de cisalhamento – em painéis de MLCC sujeitos à flexão simples.

Com as considerações anteriores, é possível então proceder com as deduções matemáticas das equações diferenciais de equilíbrio para a teoria clássica de placas. Apesar da dedução apresentada ser uma versão simplificada daquela feita por Reddy (2007), as formulações apresentadas foram extraídas da obra desse autor.

2.3.1.2.2 Dedução das equações diferenciais de equilíbrio da teoria clássica de placas

O Princípio dos Trabalhos Virtuais afirma que, se um corpo está em equilíbrio, então o trabalho virtual performado por todas as forças reais que sobre ele atuam é zero, quando essas forças agem segundo deslocamentos virtuais (REDDY, 2007). Matematicamente, o enunciado precedente por ser traduzido pela expressão:

$$\delta W_I + \delta W_E = 0 \quad (2.74)$$

As grandezas δW_I e δW_E correspondem aos trabalhos virtuais desempenhados pelos esforços solicitantes internos e pelas ações externas, respectivamente. Segundo a teoria clássica de placas, essas grandezas tem seu cômputo através das expressões:

$$\delta W_I = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} (\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy}) dz dx dy \quad (2.75)$$

Ou:

$$\begin{aligned} \delta W_I = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} & \left[\sigma_{xx} (\delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)}) + \sigma_{yy} (\delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)}) \right. \\ & \left. + \tau_{xy} (\delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)}) \right] dz dx dy \end{aligned} \quad (2.76)$$

E:

$$\delta W_E = - \int_A [q \delta w(x,y,0)] dx dy = - \int_A q \delta w_0 dx dy \quad (2.77)$$

O sinal negativo da Equação (2.77) tem apenas a função de indicar que o trabalho virtual do carregamento q distribuído por unidade de área é realizado sobre a placa, contrariamente ao trabalho virtual dos esforços solicitantes internos. Além disso, as integrações expressas em (2.76) e (2.77) podem ser reescritas com a consideração das seguintes resultantes para uma placa de altura h :

$$\begin{pmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} dz \quad (2.78)$$

$$\begin{pmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} z dz \quad (2.79)$$

De posse das resultantes (2.78) e (2.79), é possível substituir as Equações (2.76) e (2.77) na Equação (2.74), relativa ao Princípio dos Trabalhos Virtuais, de forma a reformulá-la em termos dos esforços solicitantes internos e das deformações virtuais. Dessa maneira, obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_A (N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} + \\ N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} - q \delta w_0) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.80)$$

Entretanto, ainda se pode efetuar a substituição das Equações (2.68) a (2.73), referentes às deformações, de modo que a Equação (2.80) seja escrita em função dos deslocamentos virtuais do plano de referência da placa (δu_0 , δv_0 e δw_0). Posteriormente a essa substituição, a integral em questão necessita de ser resolvida por partes, uma vez que esse procedimento permite fatorar os termos que multiplicam os deslocamentos virtuais δu_0 , δv_0 ou δw_0 . A partir do que foi descrito, a Equação (2.80) pode então ser reescrita na forma subsequente:

$$\begin{aligned} \int_A \left[- \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 - \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \right) \delta v_0 \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N + q \right) \delta w_0 \right] dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.81)$$

Sendo:

$$N = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.82)$$

Para deslocamentos virtuais δu_0 , δv_0 e δw_0 não nulos, é possível extrair, da Equação (2.81), o sistema que engloba as equações diferenciais de equilíbrio da teoria clássica de placas, sendo elas:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.83)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + N + q = 0 \quad (2.85)$$

2.3.1.3 Relações constitutivas para a teoria clássica de placas

Quando da dedução das teorias de placas laminadas (caso dos painéis de MLCC), Reddy (2007) apresenta as relações tensões-deformações de forma distinta daquela usualmente empregada para materiais homogêneos, uma vez que as coordenadas materiais (1, 2 e 3) encontram-se defasadas de um ângulo θ em relação às coordenadas do problema (x, y e z). Acerca dessas relações, o referido autor apresenta as seguintes expressões:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.86)$$

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (2.87)$$

Em que:

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11} \cos^4 \theta + 2 (Q_{12} + 2 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \sin^4 \theta \quad (2.88)$$

$$\bar{Q}_{12} = (Q_{11} + Q_{22} - 4 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{12} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (2.89)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11} \sin^4 \theta + 2 (Q_{12} + 2 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{22} \cos^4 \theta \quad (2.90)$$

$$\bar{Q}_{16} = (Q_{11} - Q_{12} - 2 Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2 Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta \quad (2.91)$$

$$\bar{Q}_{26} = (Q_{11} - Q_{12} - 2 Q_{66}) \sin^3 \theta \cos \theta + (Q_{12} - Q_{22} + 2 Q_{66}) \sin \theta \cos^3 \theta \quad (2.92)$$

$$\bar{Q}_{66} = (Q_{11} + Q_{22} - 2 Q_{12} - 2 Q_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + Q_{66} (\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) \quad (2.93)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44} \cos^2 \theta + Q_{55} \sin^2 \theta \quad (2.94)$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44}) \cos \theta \sin \theta \quad (2.95)$$

$$\bar{Q}_{55} = Q_{55} \cos^2 \theta + Q_{44} \sin^2 \theta \quad (2.96)$$

No caso específico de painéis de MLCC com disposição ortogonal das camadas de lamelas, o ângulo θ assume valores de 0° ou 90° , a depender da camada do painel analisada. Além disso, os coeficientes Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66} , Q_{44} e Q_{55} também podem variar conforme a camada avaliada, pois as lamelas que as constituem podem apresentar propriedades mecânicas distintas.

Reddy (2007) prescreve, para materiais homogêneos e para cada camada de uma placa laminada ortotrópica e simétrica, em termos de geometria e de material, as seguintes expressões para os coeficientes Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66} , Q_{44} e Q_{55} .

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (2.97)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (2.98)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} \quad (2.99)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (2.100)$$

$$Q_{44} = G_{23} \quad (2.101)$$

$$Q_{55} = G_{13} \quad (2.102)$$

Caso o material analisado seja ortotrópico, tal como a madeira, então o coeficiente de Poisson ν_{21} fica definido, segundo o referido autor, por:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} \quad (2.103)$$

Como as equações diferenciais de equilíbrio (2.83) a (2.85) envolvem esforços solicitantes internos, faz-se então necessário retomar as Equações (2.78) e (2.79), com o intuito de escrever esses esforços em termos das propriedades mecânicas do material e das deformações. Para tal, deve-se proceder com a substituição da Equação (2.86) nas Equações (2.78) e (2.79), obtendo-se assim:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (2.104)$$

Ou:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (2.105)$$

E:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} z \, dz \quad (2.106)$$

Ou:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^0 \\ \varepsilon_{yy}^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^1 \\ \varepsilon_{yy}^1 \\ \gamma_{xy}^1 \end{Bmatrix} \quad (2.107)$$

Os termos A_{ij} , B_{ij} e D_{ij} são denominados rigidez extensional, rigidez extensional-flexional e rigidez flexional, respectivamente. Das Equações (2.104) a (2.107), é possível concluir que:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \, dz \quad (2.108)$$

$$B_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z \, dz \quad (2.109)$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} z^2 \, dz \quad (2.110)$$

Para o caso específico de placas laminadas com N camadas, Reddy (2007) resolve as integrais entre os limites inferior z_k e superior z_{k+1} , de maneira a obter:

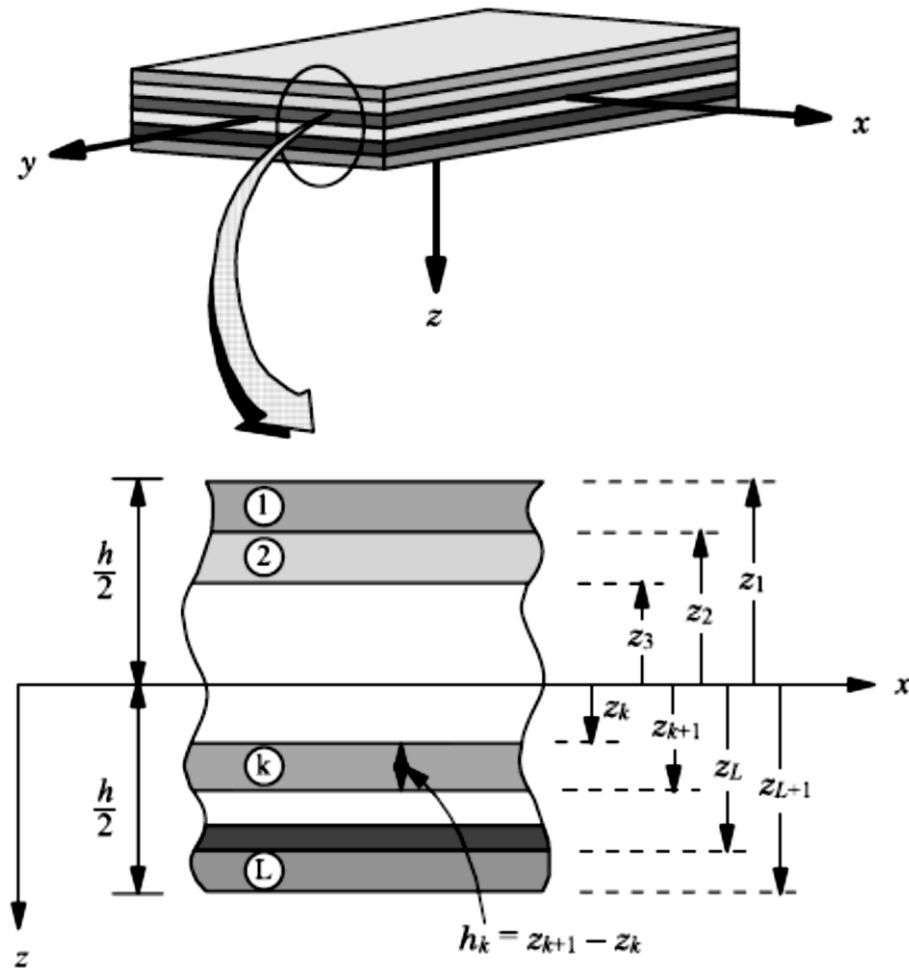
$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij} (z_{k+1} - z_k) \quad (2.111)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij} (z_{k+1}^2 - z_k^2) \quad (2.112)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij} (z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (2.113)$$

A Figura 2.22 ilustra a forma de se considerar as distâncias z_k e z_{k+1} das Equações (2.111) a (2.113) para uma placa laminada constituída de várias camadas.

Figura 2.22 – Distâncias z para o cálculo dos coeficientes A_{ij} , B_{ij} e D_{ij}



Fonte: Reddy (2007)

Por fim, é importante pontuar que a relação constitutiva expressa pela Equação (2.87) não foi utilizada nesta subseção, pois as deformações transversais de cisalhamento são admitidas como nulas pela teoria clássica de placas. Consequentemente, as tensões transversais de cisalhamento não podem ser computadas pelas relações constitutivas, uma vez que elas não podem ser nulas, a fim de não violar as condições de equilíbrio da placa.

2.3.1.4 Equações diferenciais de equilíbrio em termos dos deslocamentos do plano médio de referência para a teoria clássica

Reddy (2004) desenvolve as equações diferenciais de equilíbrio para vários casos de placas laminadas. No presente trabalho, são apresentadas tão somente aquelas relativas às placas laminadas especialmente ortotrópicas, ou seja, placas laminadas dotadas de simetria, em relação ao plano médio, em termos de geometria e de material.

Como os painéis de MLCC mais usuais são confeccionados com um número ímpar de camadas de lamelas, podendo as lamelas transversais ser de material com propriedades mecânicas de qualidade inferior, então apenas a dedução das expressões relativas às placas especialmente ortotrópicas é suficiente, pois a simetria, em termos de geometria e de material, é garantida.

Para o caso particular das placas especialmente ortotrópicas, Reddy (2004) afirma que os coeficientes B_{ij} são nulos, pois não há interação entre as deformações extensionais e flexionais. Igualmente, o referido autor também pontua que $A_{16} = A_{26} = 0$ e $D_{16} = D_{26} = 0$, uma vez que também não há interação entre as deformações extensionais e transversais e as deformações flexionais e torcionais, respectivamente. Sendo assim, ao considerar $B_{ij} = A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$, nas Equações (2.105) e (2.107), bem como as deformações de von Kármán dadas em (2.68) a (2.73), é possível escrever os esforços solicitantes internos em função dos deslocamentos do plano médio de referência da placa nas formas:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.114)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.115)$$

A obtenção das Equações (2.114) e (2.115) permite chegar às equações diferenciais de equilíbrio também em termos dos deslocamentos do plano de referência. Para tal, basta substituir essas equações em (2.83), (2.84) e (2.85). Por meio do procedimento descrito, vem:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.116)$$

$$\begin{aligned} & A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.117)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q + N \quad (2.118)$$

As equações diferenciais de equilíbrio (2.116), (2.117) e (2.118) podem ser ainda mais simplificadas quando análises estáticas lineares são de interesse. Para essas análises, Reddy (2007) afirma que é possível desprezar os produtos das derivadas parciais de ordem 1 pelas derivadas parciais de ordem 2 do deslocamento w_0 . Essa simplificação implica no subsequente sistema de equações diferenciais de equilíbrio:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) = 0 \quad (2.119)$$

$$A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0 \quad (2.120)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w_0}{\partial y^4} = q \quad (2.121)$$

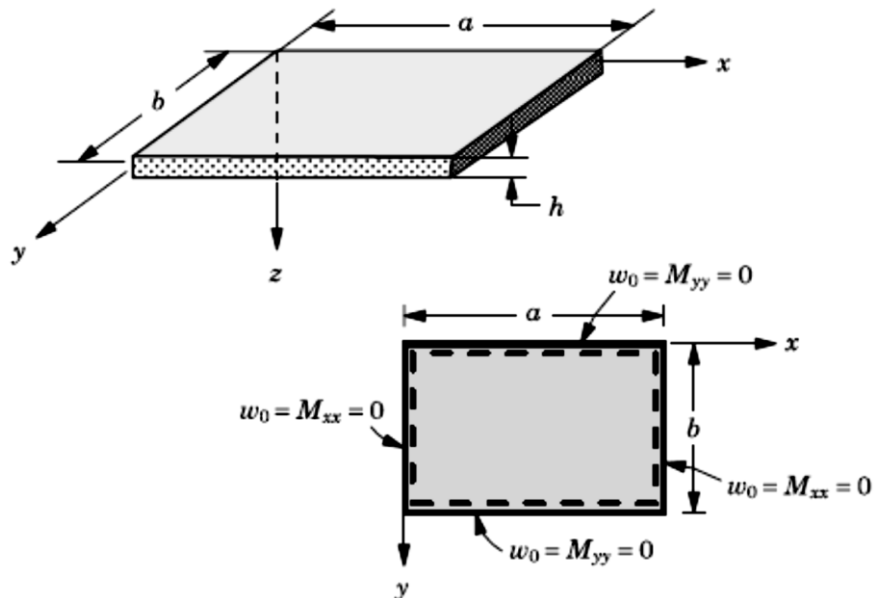
2.3.1.5 Solução de Navier para a teoria clássica de placas

A princípio, é importante enfatizar uma ponderação feita por Reddy (2007) a respeito do sistema de equações diferenciais de equilíbrio relativo às análises estáticas lineares. Segundo esse autor, nota-se, para esse sistema de equações, uma independência entre os deslocamentos do plano da placa u_0 e v_0 e o deslocamento vertical w_0 . Essa independência permite que a Equação (2.121) seja resolvida de forma individual.

Timoshenko (1959) prescreve duas soluções analíticas para resolver a equação diferencial da teoria clássica de placas, nomeadamente a solução de Navier e a solução de Lévy. A primeira solução é aplicada às placas com todos os seus bordos simplesmente apoiados e a segunda às placas que possuem dois bordos opostos simplesmente apoiados e os demais bordos com vinculações quaisquer.

Como é usual o emprego dos painéis de MLCC com bordos simplesmente apoiados, então, no presente trabalho, optou-se pela adoção da solução de Navier para resolver a Equação (2.121). Para tal, deve-se, *a priori*, estabelecer as condições de contorno do problema, estando as mesmas indicadas na Figura 2.23.

Figura 2.23 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos para a teoria clássica



Fonte: Reddy (2007)

Os momentos fletores nas direções x e y (M_{xx} e M_{yy}), indicados na Figura 2.23, correspondem àqueles constantes na Equação (2.115), ou seja:

$$M_{xx} = - \left(D_{11} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.122)$$

$$M_{yy} = - \left(D_{12} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (2.123)$$

O momento M_{xy} , também presente na Equação (2.115), é um momento de torção, por vezes denominado momento volvente, e que é responsável por “levantar” os cantos da placa. Em conformidade com as condições de contorno, esse momento não é nulo e, caso desejado, pode ser calculado pela expressão:

$$M_{xy} = - 2 D_{66} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \quad (2.124)$$

A próxima etapa para a obtenção da solução de Navier consiste em assumir expressões para os deslocamentos verticais $w_0(x,y)$ e para o carregamento $q(x,y)$ que satisfaçam à Equação (2.121) e às condições de contorno da Figura 2.23. De acordo com Reddy (2007), a solução de Navier considera a seguinte expansão em série de Fourier para o deslocamento vertical $w_0(x,y)$ de uma placa de dimensões a e b segundo as direções x e y , respectivamente:

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.125)$$

Em conformidade com Timoshenko (1959), a expressão para o carregamento $q(x,y)$ pode ser deduzida a partir da substituição da Equação (2.125) em (2.121), o que conduz a:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D_{11} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 + 2 \hat{D}_{12} \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + D_{22} \left(\frac{n\pi}{b}\right)^4 \right] W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) = q \quad (2.126)$$

Da análise da Equação (2.126), pode-se concluir que a expansão em série de Fourier a ser assumida para $q(x,y)$ é:

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.127)$$

Timoshenko (1959) afirma que q_{mn} e W_{mn} são coeficientes a serem determinados. O referido autor prescreve, para a determinação de q_{mn} , a multiplicação de ambos os membros da Equação (2.127) por $\sin(m\pi x/a)$ dx e $\sin(n\pi y/b)$ dy, com posteriores integrações entre $x = 0$ e $x = a$ e entre $y = 0$ e $y = b$. Por meio desse procedimento, é possível obter a integral dupla a seguir.

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.128)$$

Para um carregamento $q(x,y) = q_0$ uniformemente distribuído por unidade de área, o coeficiente q_{mn} assume a expressão:

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (\text{para } m \text{ e } n \text{ ímpares}) \quad (2.129)$$

Com a determinação do coeficiente q_{mn} , torna-se possível encontrar a expressão relativa ao coeficiente W_{mn} , por meio de uma substituição das Equações (2.127) e (2.128) na Equação (2.126). Com esse procedimento, Reddy (2007) escreve o coeficiente W_{mn} da seguinte maneira:

$$W_{mn} = \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \quad (2.130)$$

Sendo:

$$d_{mn} = \frac{\pi^4}{b^4} [D_{11} m^4 s^4 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) m^2 s^2 + D_{22} n^4] \quad (2.131)$$

$$s = \frac{b}{a} \quad (2.132)$$

Portanto, a expansão em série de Fourier (2.125), relativa ao deslocamento vertical w_0 , fica definida por:

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.133)$$

Especificamente para o caso de um carregamento q_0 uniformemente distribuído por unidade de área, basta levar a Equação (2.129) à Equação (2.133), obtendo-se:

$$w_0(x,y) = \frac{16 q_0}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m n d_{mn}} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.134)$$

2.3.1.6 Expressões das tensões normais e de cisalhamento para a teoria clássica de placas

Reddy (2004) deduz as tensões no plano da placa (σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy}) a partir das relações constitutivas (2.86), porém considerando apenas as parcelas de deformações referentes à flexão, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ z \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ 2z \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.135)$$

Substituindo-se a Equação (2.133) nas relações constitutivas de (2.135), Reddy (2004) obtém as seguintes fórmulas finais para as tensões no plano da placa.

$$\sigma_{xx} = z \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (s^2 m^2 \bar{Q}_{11} + n^2 \bar{Q}_{12}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.136)$$

$$\sigma_{yy} = z \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (s^2 m^2 \bar{Q}_{12} + n^2 \bar{Q}_{22}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.137)$$

$$\tau_{xy} = z \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} -2mn \bar{Q}_{66} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.138)$$

Por razão da hipótese de deformações transversais nulas, as tensões transversais de cisalhamento (τ_{xz} e τ_{yz}) não podem ser determinadas pelas relações constitutivas, devendo-se

fazer uso das equações diferenciais de equilíbrio tridimensionais (REDDY, 2004). Destarte, ao retomar as Equações (2.43) e (2.44), com forças de massa nulas e as tensões de cisalhamento transversais explicitadas, é possível escrever que:

$$\tau_{yz} = - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) dz \quad (2.139)$$

$$\tau_{xz} = - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (2.140)$$

Com a substituição das Equações (2.136) a (2.138) nas integrais (2.139) e (2.140), Reddy (2004) determina as fórmulas finais para as tensões transversais de cisalhamento.

$$\tau_{yz} = - Y(z) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{13} W_{mn} \operatorname{sen} \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \cos \left(\frac{n\pi y}{b} \right) + \tau_{yz}(x,y,z_k) \quad (2.141)$$

$$\tau_{xz} = - \chi(z) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{12} W_{mn} \cos \left(\frac{m\pi x}{a} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi y}{b} \right) + \tau_{xz}(x,y,z_k) \quad (2.142)$$

Em que:

$$Y(z) = \chi(z) = \frac{z^2 - z_k^2}{2} \quad (2.143)$$

$$T_{12} = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^3 \bar{Q}_{11} + \left(\frac{m\pi}{a} \right) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 (\bar{Q}_{12} + 2 \bar{Q}_{66}) \quad (2.144)$$

$$T_{13} = \left(\frac{n\pi}{b} \right)^3 \bar{Q}_{22} + \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \left(\frac{n\pi}{b} \right) (\bar{Q}_{12} + 2 \bar{Q}_{66}) \quad (2.145)$$

As tensões de cisalhamento $\tau_{xz}(x,y,z_k)$ e $\tau_{yz}(x,y,z_k)$ correspondem àquelas calculadas para a cota z_k , a qual é anterior à cota z de interesse. Além disso, a tensão normal transversal σ_{zz} não foi incluída, pois, segundo Reddy (2004), a mesma assume valores passíveis de serem desprezados.

2.3.2 Teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem

2.3.2.1 Campo de deslocamentos e deformações para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem

A teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (ou *first order shear deformation theory – FSDT*) expande o campo de deslocamentos da teoria clássica de placas por meio da consideração de deformações de cisalhamento constantes ao longo da espessura da placa, de maneira que as retas normais ao plano médio da placa não necessitam de permanecer normais após a sua deformação (REDDY, 2007).

Neste caso, Reddy (2007) define o campo de deslocamentos da seguinte forma:

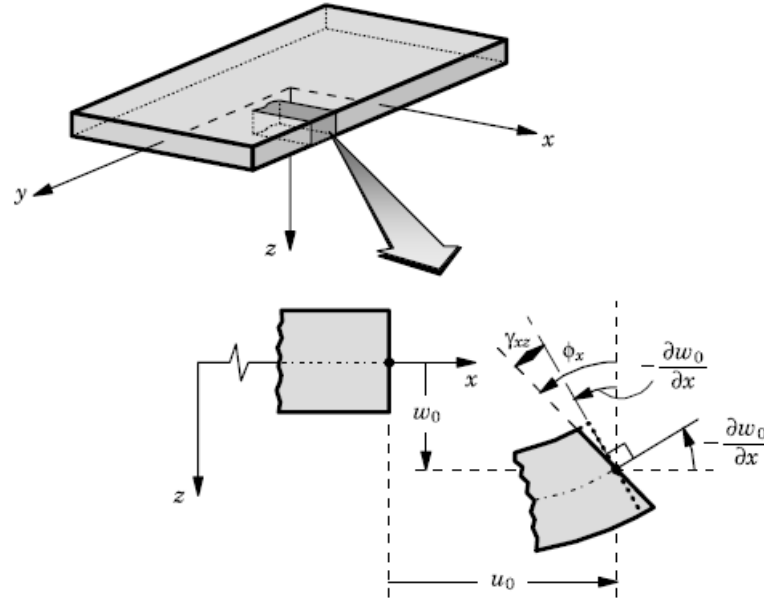
$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z \phi_x(x,y) \quad (2.146)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + z \phi_y(x,y) \quad (2.147)$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \quad (2.148)$$

As incógnitas ϕ_x e ϕ_y são as rotações das retas normais transversais ao plano médio da placa em torno dos eixos y e x , respectivamente. De maneira a melhor elucidar o problema, a Figura 2.24 ilustra o campo de deslocamentos assumido para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem.

Figura 2.24 – Cinemática de deslocamentos de uma placa segundo a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem



Fonte: Reddy (2007)

Matematicamente, as rotações ϕ_x e ϕ_y podem ser escritas por meio das seguintes derivadas:

$$\phi_x = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.149)$$

$$\phi_y = \frac{\partial v}{\partial z} \quad (2.150)$$

Definido o campo de deslocamentos, uma dedução similar àquela apresentada para a teoria clássica de placas pode ser desenvolvida. Desta forma, para um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, Reddy (2007), ao retomar as relações deformação-deslocamento (2.7) a (2.12), com o campo de deslocamentos assumido e não desprezando os termos de ordem superior $(\partial w/\partial x)^2$, $(\partial w/\partial y)^2$ e $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)$, obtém:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (2.151)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad (2.152)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad (2.153)$$

$$\gamma_{xy} = \left(\frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (2.154)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \quad (2.155)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \quad (2.156)$$

Ademais, Reddy (2007) sugere escrever as equações de deformação de forma a separar os termos que são multiplicados por z , o que será útil mais adiante quando da definição das resultantes das tensões. Dessa forma, tem-se:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \varepsilon_{xx}^{(1)} \quad (2.157)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \varepsilon_{yy}^{(1)} \quad (2.158)$$

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}^{(0)} + z \gamma_{xy}^{(1)} \quad (2.159)$$

$$\gamma_{yz} = 2 \varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}^{(0)} + z \gamma_{yz}^{(1)} \quad (2.160)$$

$$\gamma_{xz} = 2 \varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} + z \gamma_{xz}^{(1)} \quad (2.161)$$

Sendo:

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \quad (2.162)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (2.163)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \quad (2.164)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (2.165)$$

$$\gamma_{xy}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.166)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (2.167)$$

$$\gamma_{yz}^{(0)} = \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \quad (2.168)$$

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \quad (2.169)$$

$$\gamma_{yz}^{(1)} = \gamma_{xz}^{(1)} = 0 \quad (2.170)$$

2.3.2.2 Equações diferenciais de equilíbrio para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem

As equações diferenciais de equilíbrio para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem serão deduzidas de forma análoga àquela realizada para a teoria clássica de placas, ou seja, será feito o uso do Princípio dos Trabalhos Virtuais apenas com a consideração dos trabalhos virtuais realizados pelos esforços solicitantes internos e por um carregamento q distribuído por unidade de área. Portanto, a dedução apresentada nesta subseção também constitui uma versão simplificada daquela apresentada por Reddy (2007), porém o processo de dedução é análogo ao apresentado pelo referido autor.

Como a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem considera as tensões de cisalhamento transversais, então, para os trabalhos virtuais interno e externo, é possível escrever que:

$$\delta W_I = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \right) dz dx dy \quad (2.171)$$

Ou:

$$\begin{aligned} \delta W_I = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} & \left[\sigma_{xx} \left(\delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} \right) + \sigma_{yy} \left(\delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} \right) \right. \\ & \left. + \tau_{xy} \left(\delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)} \right) + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}^{(0)} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz}^{(0)} \right] dz dx dy \end{aligned} \quad (2.172)$$

E:

$$\delta W_E = - \int_A [q \delta w(x,y,0)] dx dy = - \int_A q \delta w_0 dx dy \quad (2.173)$$

Novamente, é de interesse recorrer às resultantes dadas em (2.78) e (2.79) e, neste caso, também às seguintes resultantes:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.174)$$

Com o auxílio das resultantes (2.78), (2.79) e (2.174), é possível substituir as integrais (2.172) e (2.173) na Equação (2.74), referente ao Princípio dos Trabalhos Virtuais, com o intuito de reformulá-la em termos dos esforços solicitantes internos e das deformações virtuais. Por meio desse procedimento, é possível obter:

$$\begin{aligned} \int_A \left(N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^0 + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^1 + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^0 + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^1 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 \right. \\ \left. + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^1 + Q_x \delta \gamma_{xz}^0 + Q_y \delta \gamma_{yz}^0 - q \delta w_0 \right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.175)$$

Na integral (2.175), torna-se possível então substituir as deformações dadas em (2.162) a (2.169), de maneira que a mesma possa ser escrita em função dos deslocamentos virtuais do plano de referência da placa (δu_0 , δv_0 e δw_0) e das rotações virtuais das normais transversais

$(\delta\phi_x$ e $\delta\phi_y$). Após as substituições, a integral (2.175) necessita de ser resolvida por partes, a fim de permitir uma fatoração dos termos que multiplicam os deslocamentos virtuais δu_0 , δv_0 e δw_0 e as rotações virtuais $\delta\phi_x$ e $\delta\phi_y$. O resultado do procedimento descrito é a expressão:

$$\int_A \left[- \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 - \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \right) \delta v_0 - \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \eta + q \right) \delta w_0 - \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \delta\phi_x - \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y \right) \delta\phi_y \right] dx dy = 0 \quad (2.176)$$

Em que:

$$\eta = \frac{\partial}{\partial x} \left(N_{xx} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w_0}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.177)$$

Para deslocamentos virtuais $(\delta u_0, \delta v_0$ e $\delta w_0)$ e rotações virtuais $(\delta\phi_x$ e $\delta\phi_y)$ não nulos, extrai-se da integral (2.176) o sistema de equações diferenciais de equilíbrio da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. Esse sistema fica então constituído pelas subseqüentes equações diferenciais:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.178)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.179)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + \eta + q = 0 \quad (2.180)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.181)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.182)$$

2.3.2.3 Relações constitutivas para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem

As Equações (2.86) a (2.103), apresentadas anteriormente para a teoria clássica de placas, permanecem válidas para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. No entanto, para o caso específico das placas especialmente ortotrópicas, as resultantes das tensões, por razão de um novo campo de deslocamentos assumido, sofrem algumas alterações e passam a assumir as seguintes formas:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (2.183)$$

E:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.184)$$

Além disso, Reddy (2007) enfatiza que a Equação (2.174) deve ser multiplicada por um fator de correção de cisalhamento K_s , o qual é introduzido com a função de buscar corrigir as inconsistências entre o estado real e o estado assumido para as tensões de cisalhamento transversais. O estado de tensões assumido apresenta, por razão das relações constitutivas, tensões de cisalhamento transversais constantes ao invés de distribuições quadráticas, haja vista que a cinemática de deslocamentos adotada presume rotações constantes para as normais transversais. Dessa forma, a Equação (2.174) fica corrigida da seguinte maneira:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} dz = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} dz \quad (2.185)$$

Reddy (2004) aponta como principal inconveniente à aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem justamente a necessidade de determinação do fator de correção de cisalhamento K_s , o qual é de difícil obtenção quando da análise de placas laminadas de configuração arbitrária. Como forma de contornar os empecilhos associados à determinação do fator de correção de cisalhamento K_s , Stürzenbecher, Hofstetter e Eberhardsteiner (2010) afirmam que, em geral, esse fator assume valores compreendidos em um intervalo de 5/6 a 1. Em complemento, os referidos autores também pontuam que constitui prática comum a atribuição dos seguintes valores, sem qualquer outro estudo adicional: 2/3, $\pi^2/12$, 5/6 e 1.

Para o caso particular de placas especialmente ortotrópicas, Reddy (2007), ao considerar $\bar{Q}_{45} = 0$ e as equações de deformações (2.160), (2.161), (2.168), (2.169) e (2.170), deduz que:

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = K_s \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \end{Bmatrix} dz \quad (2.186)$$

A consideração de $\bar{Q}_{45} = 0$ implica que as tensões de cisalhamento transversais em um determinado plano estão relacionadas apenas com as distorções presentes naquele plano. Em outras palavras, τ_{yz} não se relaciona com γ_{xz} e τ_{xz} não se relaciona com γ_{yz} .

2.3.2.4 Equações diferenciais de equilíbrio em termos dos deslocamentos do plano médio de referência para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem

Para que as equações diferenciais de equilíbrio da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem sejam escritas em termos dos deslocamentos do plano médio da placa e das rotações das normais transversais, é necessário substituir as relações dadas em (2.183), (2.184) e (2.185) nas Equações (2.178) a (2.182). Dessa forma, é possível obter:

$$\begin{aligned} & A_{11} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\ & + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2.187)$$

$$\begin{aligned}
& A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \\
& + A_{12} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) + A_{22} \left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.188}$$

$$K_s A_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + K_s A_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + \eta + q = 0 \tag{2.189}$$

$$D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - K_s A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = 0 \tag{2.190}$$

$$D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} - K_s A_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0 \tag{2.191}$$

Desprezando os produtos das derivadas parciais de ordem 1 pelas derivadas parciais de ordem 2 do deslocamento vertical w_0 , são definidas as equações diferenciais de equilíbrio para análises estáticas lineares de placas especialmente ortotrópicas. Para essas análises, são então válidas as seguintes equações diferenciais:

$$A_{11} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + A_{12} \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} + A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x \partial y} \right) = 0 \tag{2.192}$$

$$A_{66} \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} \right) + A_{12} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2 v_0}{\partial y^2} = 0 \tag{2.193}$$

$$K_s A_{55} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \right) + K_s A_{44} \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) + q = 0 \tag{2.194}$$

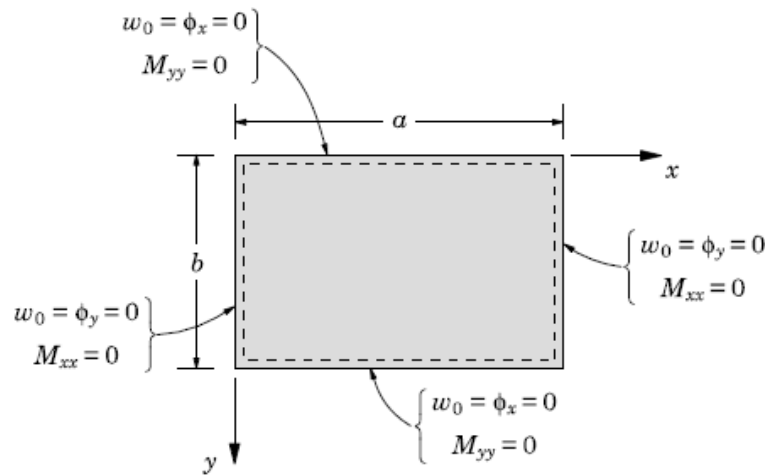
$$D_{11} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x^2} + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial x \partial y} \right) - K_s A_{55} \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + \phi_x \right) = 0 \tag{2.195}$$

$$D_{66} \left(\frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} \right) + D_{12} \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial y^2} + - K_s A_{44} \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} + \phi_y \right) = 0 \quad (2.196)$$

2.3.2.5 Solução de Navier para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem

Para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, as condições de contorno que servem para o estabelecimento da solução Navier para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos estão indicadas na Figura 2.25.

Figura 2.25 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem



Fonte: Reddy (2007)

Os momentos fletores nas direções x e y (M_{xx} e M_{yy}), indicados na Figura 2.25, correspondem àqueles apresentados na Equação (2.184), ou seja:

$$M_{xx} = \left(D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.197)$$

$$M_{yy} = \left(D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \right) = 0 \quad (2.198)$$

Por sua vez, o momento volvente M_{xy} , também constante na Equação (2.184) e responsável por “levantar” os cantos da placa, não é nulo e, quando desejado, tem seu cômputo feito pela expressão:

$$M_{xy} = D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (2.199)$$

Em seguida, Reddy (2007) afirma que a solução de Navier assume, para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, as seguintes expansões em séries de Fourier:

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.200)$$

$$\phi_x(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.201)$$

$$\phi_y(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.202)$$

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (2.203)$$

Sendo:

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x,y) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx dy \quad (2.204)$$

Igualmente ao que fora demonstrado para a teoria clássica de placas, quando se considera um carregamento uniformemente distribuído por unidade de área q_0 , o coeficiente q_{mn} assume a expressão:

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (\text{para } m \text{ e } n \text{ ímpares}) \quad (2.205)$$

Já os parâmetros W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} , foram deduzidos por Reddy (2007) por meio de uma substituição das expansões em séries de Fourier (2.200) a (2.203) nas equações diferenciais de equilíbrio (2.194) a (2.196). Com isso, o referido autor obteve o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} \\ \hat{s}_{12} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{13} & \hat{s}_{23} & \hat{s}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.206)$$

Em que:

$$\hat{s}_{11} = K_s (A_{55} \alpha_m^2 + A_{44} \beta_n^2) \quad (2.207)$$

$$\hat{s}_{12} = K_s A_{55} \alpha_m \quad (2.208)$$

$$\hat{s}_{13} = K_s A_{44} \beta_n \quad (2.209)$$

$$\hat{s}_{22} = (D_{11} \alpha_m^2 + D_{66} \beta_n^2 + K_s A_{55}) \quad (2.210)$$

$$\hat{s}_{23} = (D_{12} + D_{66}) \alpha_m \beta_n \quad (2.211)$$

$$\hat{s}_{33} = (D_{66} \alpha_m^2 + D_{22} \beta_n^2 + K_s A_{44}) \quad (2.212)$$

$$\alpha_m = \frac{m \pi}{a} \quad (2.213)$$

$$\beta_n = \frac{n \pi}{b} \quad (2.214)$$

Uma vez determinada a matriz de coeficientes $\hat{s}_{ij}$, é possível resolver o sistema da Equação (2.206). Uma solução genérica para esse sistema é dada pelo autor supracitado, sendo ela:

$$W_{mn} = \frac{b_0}{b_{mn}} q_{mn} \quad (2.215)$$

$$X_{mn} = \frac{b_1}{b_{mn}} q_{mn} \quad (2.216)$$

$$Y_{mn} = \frac{b_2}{b_{mn}} q_{mn} \quad (2.217)$$

Em que:

$$b_{mn} = \hat{s}_{11} b_0 + \hat{s}_{12} b_1 + \hat{s}_{13} b_2 \quad (2.218)$$

$$b_0 = \hat{s}_{22} \hat{s}_{33} - \hat{s}_{23} \hat{s}_{23} \quad (2.219)$$

$$b_1 = \hat{s}_{22} \hat{s}_{13} - \hat{s}_{12} \hat{s}_{33} \quad (2.220)$$

$$b_2 = \hat{s}_{12} \hat{s}_{23} - \hat{s}_{22} \hat{s}_{13} \quad (2.221)$$

2.3.2.6 Expressões das tensões normais e de cisalhamento para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem

A partir das expressões expostas anteriormente, é possível escrever as tensões no plano da placa (σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy}) e as tensões de cisalhamento transversais (τ_{xz} e τ_{yz}). Neste caso, todas as referidas tensões podem ser determinadas a partir da lei de Hooke, excetuando-se a tensão normal transversal σ_{zz} .

As tensões no plano da placa têm suas fórmulas finais determinadas por Reddy (2007), considerando as relações constitutivas (2.86) e as parcelas de deformações devidas à flexão, ou seja:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.222)$$

Substituindo as expansões em séries de Fourier (2.201) e (2.202) em (2.222), vem:

$$\sigma_{xx} = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{11} \alpha_m X_{mn} + \bar{Q}_{12} \beta_n Y_{mn}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2.223)$$

$$\sigma_{yy} = -z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\bar{Q}_{12} \alpha_m X_{mn} + \bar{Q}_{22} \beta_n Y_{mn}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2.224)$$

$$\tau_{xy} = z \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{66} (\beta_n X_{mn} + \alpha_m Y_{mn}) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (2.225)$$

Por sua vez, as fórmulas finais para as tensões de cisalhamento transversais são deduzidas por Reddy (2007) ao considerar as relações constitutivas (2.87) e as parcelas de deformações por flexão, isto é:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w_0}{\partial x} + \varphi_x \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} + \varphi_y \end{Bmatrix} \quad (2.226)$$

A substituição das expansões em séries de Fourier (2.200), (2.201) e (2.202) em (2.226), permite obter:

$$\tau_{yz} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{44} (Y_{mn} + \beta_n W_{mn}) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (2.227)$$

$$\tau_{xz} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Q}_{55} (X_{mn} + \alpha_m W_{mn}) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2.228)$$

Em complemento, as tensões de cisalhamento transversais (τ_{xz} e τ_{yz}) também podem ser avaliadas por meio da aplicação das equações diferenciais de equilíbrio tridimensionais. Retomando as expressões (2.43) e (2.44), com forças de massa nulas e as tensões de cisalhamento transversais explicitadas, tem-se:

$$\tau_{yz} = - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) dz \quad (2.229)$$

$$\tau_{xz} = - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (2.230)$$

Com a substituição das expressões (2.223) a (2.225) nas integrais (2.229) e (2.230), Reddy (2004) deduz que:

$$\tau_{yz} = Y(z) (T_{12} X_{mn} + T_{22} Y_{mn}) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) + \tau_{yz}(x, y, z_k) \quad (2.231)$$

$$\tau_{xz} = \chi(z) (T_{11} X_{mn} + T_{12} Y_{mn}) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) + \tau_{xz}(x, y, z_k) \quad (2.232)$$

Sendo:

$$Y(z) = \chi(z) = \frac{z^2 - z_k^2}{2} \quad (2.233)$$

$$T_{11} = \alpha_m^2 \bar{Q}_{11} + \beta_n^2 \bar{Q}_{66} \quad (2.234)$$

$$T_{12} = \alpha_m \beta_n (\bar{Q}_{12} + \bar{Q}_{66}) \quad (2.235)$$

$$T_{22} = \alpha_m^2 \bar{Q}_{66} + \beta_n^2 \bar{Q}_{22} \quad (2.236)$$

As tensões de cisalhamento $\tau_{xz}(x, y, z_k)$ e $\tau_{yz}(x, y, z_k)$ são aquelas calculadas para uma cota z_k anterior à cota z . De forma análoga à teoria clássica de placas, a tensão normal transversal σ_{zz} não foi incluída, pois, segundo Reddy (2004), a mesma assume valores passíveis de serem desprezados.

2.3.3 Teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem

2.3.3.1 Campo de deslocamentos e deformações para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem

As teorias de deformação de cisalhamento de segunda ordem e de ordem superior são aquelas que expandem o campo de deslocamentos da teoria clássica de placas fazendo-se uso de polinômios de grau superior a 1, mas que muitas vezes introduzem termos cujo significado físico é de difícil explanação (REDDY, 2004).

Dentre as teorias mencionadas no parágrafo precedente, no presente trabalho, será apresentada a denominada teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem (ou *third order shear deformation theory – TSDT*). Essa teoria, conforme Reddy (2004), possibilita a obtenção de variações quadráticas para as deformações e tensões de cisalhamento transversais por meio das relações constitutivas, além de sua ausência nas regiões de topo e de base das placas.

Para uma placa de espessura h , Reddy (2007) define o campo de deslocamentos da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem por meio das expressões:

$$u(x,y,z) = u_0(x,y) + z \varphi_x(x,y) + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (2.237)$$

$$v(x,y,z) = v_0(x,y) + z \varphi_y(x,y) + z^3 \left(-\frac{4}{3h^2} \right) \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.238)$$

$$w(x,y,z) = w_0(x,y) \quad (2.239)$$

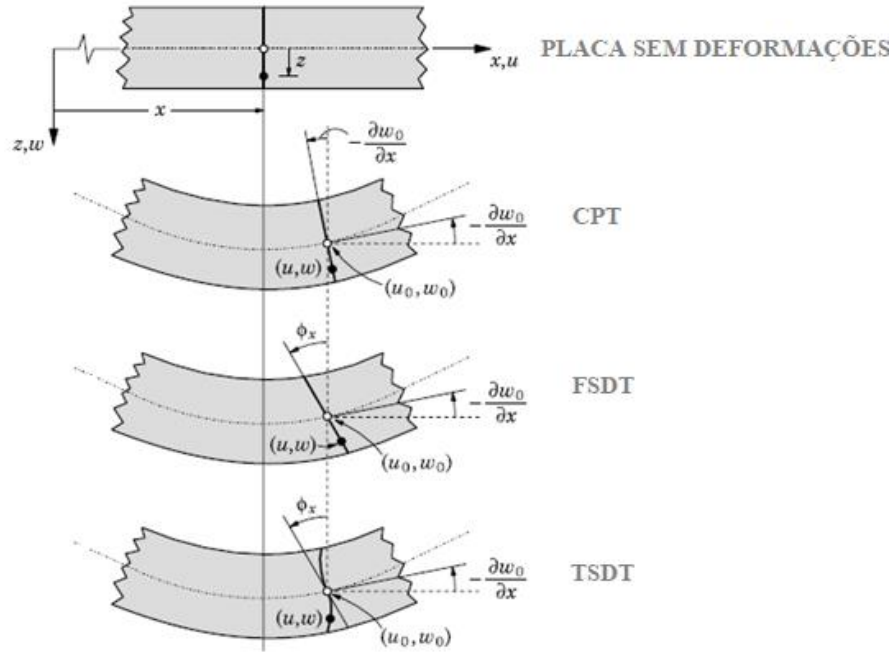
Sendo:

$$\varphi_x = \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.240)$$

$$\varphi_y = \left. \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=0} \quad (2.241)$$

A Figura 2.26 traz, além da cinemática de deslocamentos da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem, uma comparação com as cinemáticas de deslocamentos das teorias de placas anteriormente apresentadas.

Figura 2.26 – Comparação entre as cinemáticas de deslocamentos de uma placa segundo as teorias de placas apresentadas



Fonte: Adaptado de Reddy (2007)

Para um sistema de coordenadas cartesianas retangulares, Reddy (2007), ao retomar as relações deformação-deslocamento (2.7) a (2.12), com o campo de deslocamentos assumido e não desprezando os termos de ordem superior $(\partial w/\partial x)^2$, $(\partial w/\partial y)^2$ e $(\partial w/\partial x)(\partial w/\partial y)$, define as seguintes deformações:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + z^3 \left[-c_1 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \right] \quad (2.242)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + z^3 \left[-c_1 \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \right] \quad (2.243)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + z^3 \left[-c_1 \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad (2.244)$$

$$\gamma_{yz} = \phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} + z^2 \left[-c_2 \left(\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \right] \quad (2.245)$$

$$\gamma_{xz} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} + z^2 \left[-c_2 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \right] \quad (2.246)$$

Em que:

$$c_1 = \frac{4}{3 h^2} \quad (2.247)$$

$$c_2 = 3 c_1 = \frac{4}{h^2} \quad (2.248)$$

As equações de deformação apresentadas podem ser reescritas de maneira simplificada e de modo a permitir a faturação dos termos que multiplicam z , z^2 e z^3 . Novamente, esse procedimento sugerido por Reddy (2007) permite que, mais adiante, sejam definidas as resultantes para as tensões. Neste caso, pode-se escrever:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \varepsilon_{xx}^{(1)} + z^3 \varepsilon_{xx}^{(3)} \quad (2.249)$$

$$\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \varepsilon_{yy}^{(1)} + z^3 \varepsilon_{yy}^{(3)} \quad (2.250)$$

$$\gamma_{xy} = 2 \varepsilon_{xy} = \gamma_{xy}^{(0)} + z \gamma_{xy}^{(1)} + z^3 \gamma_{xy}^{(3)} \quad (2.251)$$

$$\gamma_{yz} = 2 \varepsilon_{yz} = \gamma_{yz}^{(0)} + z^2 \gamma_{yz}^{(2)} \quad (2.252)$$

$$\gamma_{xz} = 2 \varepsilon_{xz} = \gamma_{xz}^{(0)} + z^2 \gamma_{xz}^{(2)} \quad (2.253)$$

Em que:

$$\varepsilon_{xx}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad (2.254)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} \quad (2.255)$$

$$\varepsilon_{xx}^{(3)} = -c_1 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \right) \quad (2.256)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(0)} = \frac{\partial v_0}{\partial y} \quad (2.257)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(1)} = \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} \quad (2.258)$$

$$\varepsilon_{yy}^{(3)} = -c_1 \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right) \quad (2.259)$$

$$\gamma_{xy}^{(0)} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \quad (2.260)$$

$$\gamma_{xy}^{(1)} = \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) \quad (2.261)$$

$$\gamma_{xy}^{(3)} = -c_1 \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + 2 \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right) \quad (2.262)$$

$$\gamma_{yz}^{(0)} = \varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (2.263)$$

$$\gamma_{yz}^{(2)} = -c_2 \left(\varphi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \right) \quad (2.264)$$

$$\gamma_{xz}^{(0)} = \varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (2.265)$$

$$\gamma_{xz}^{(2)} = -c_2 \left(\varphi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \right) \quad (2.266)$$

2.3.3.2 Equações diferenciais de equilíbrio para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem

As equações diferenciais de equilíbrio para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem têm dedução análoga às apresentadas para as duas teorias de placas precedentes. Neste caso, os trabalhos virtuais, interno e externo, são calculados fazendo-se:

$$\delta W_I = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \left(\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} \right) dz dx dy \quad (2.267)$$

Ou:

$$\begin{aligned} \delta W_I = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} & \left[\sigma_{xx} \left(\delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} - z^3 \delta \varepsilon_{xx}^{(3)} \right) + \sigma_{yy} \left(\delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + z \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} - z^3 \delta \varepsilon_{yy}^{(3)} \right) \right. \\ & + \tau_{xy} \left(\delta \gamma_{xy}^{(0)} + z \delta \gamma_{xy}^{(1)} - z^3 \delta \gamma_{xy}^{(3)} \right) + \tau_{xz} \left(\delta \gamma_{xz}^{(0)} + z^2 \delta \gamma_{xz}^{(2)} \right) \\ & \left. + \tau_{yz} \left(\delta \gamma_{yz}^{(0)} + z^2 \delta \gamma_{yz}^{(2)} \right) \right] dz dx dy \end{aligned} \quad (2.268)$$

E:

$$\delta W_E = - \int_A \left[q \delta w \left(x, y, \frac{h}{2} \right) \right] dx dy = - \int_A q \delta w_0 dx dy \quad (2.269)$$

Para que a Equação (2.74), relativa ao Princípio dos Trabalhos Virtuais, seja escrita em termos dos esforços solicitantes internos e das deformações virtuais, Reddy (2007) considera, além das resultantes (2.78), (2.79) e (2.174), as seguintes resultantes de ordem superior:

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z^3 dz \quad (2.270)$$

E:

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} z^2 dz \quad (2.271)$$

Portanto, de posse das resultantes (2.78), (2.79), (2.174), (2.270) e (2.271) e dos trabalhos virtuais (2.268) e (2.269), o Princípio dos Trabalhos Virtuais da Equação (2.74) se torna:

$$\begin{aligned} \int_A & \left(N_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(0)} + M_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(1)} - c_1 P_{xx} \delta \varepsilon_{xx}^{(3)} + N_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(0)} + M_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(1)} - c_1 P_{yy} \delta \varepsilon_{yy}^{(3)} \right. \\ & + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(0)} + M_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(1)} - c_1 P_{xy} \delta \gamma_{xy}^{(3)} + Q_x \delta \gamma_{xz}^{(0)} - c_2 R_x \delta \gamma_{xz}^{(2)} \\ & \left. + Q_y \delta \gamma_{yz}^{(0)} - c_2 R_y \delta \gamma_{yz}^{(2)} - q \delta w_0 \right) dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.272)$$

Para que a integral (2.272) seja escrita em função dos deslocamentos virtuais do plano de referência da placa (δu_0 , δv_0 e δw_0) e das rotações virtuais das normais transversais ($\delta \varphi_x$ e $\delta \varphi_y$), faz-se necessário substituir nessa equação as deformações dadas em (2.254) a (2.266). Posteriormente às substituições, a integral (2.272) precisa ser resolvida por partes, permitindo assim uma fatoração dos termos que multiplicam os deslocamentos virtuais δu_0 , δv_0 ou δw_0 e as rotações virtuais $\delta \varphi_x$ e $\delta \varphi_y$. A realização do procedimento aludido permite obter a expressão:

$$\begin{aligned} \int_A & \left\{ - \left(\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \right) \delta u_0 - \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} \right) \delta v_0 \right. \\ & - \left[\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + c_1 \left(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} \right) + q \right] \delta w_0 \\ & \left. - \left(\frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x \right) \delta \varphi_x - \left(\frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} - \bar{Q}_y \right) \delta \varphi_y \right\} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (2.273)$$

Para deslocamentos virtuais (δu_0 , δv_0 e δw_0) e rotações virtuais ($\delta \varphi_x$ e $\delta \varphi_y$) não nulos, tem-se, a partir da integral (2.273), o seguinte sistema de equações diferenciais de equilíbrio:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2.274)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.275)$$

$$\frac{\partial \bar{Q}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{Q}_y}{\partial y} + c_1 \left(\frac{\partial^2 P_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 P_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 P_{yy}}{\partial y^2} \right) + q = 0 \quad (2.276)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial y} - \bar{Q}_x = 0 \quad (2.277)$$

$$\frac{\partial \bar{M}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{M}_{yy}}{\partial y} - \bar{Q}_y = 0 \quad (2.278)$$

Em que:

$$\bar{M}_{xx} = M_{xx} - c_1 P_{xx} \quad (2.279)$$

$$\bar{M}_{xy} = M_{xy} - c_1 P_{xy} \quad (2.280)$$

$$\bar{M}_{yy} = M_{yy} - c_1 P_{yy} \quad (2.281)$$

$$\bar{Q}_x = Q_x - c_2 R_x \quad (2.282)$$

$$\bar{Q}_y = Q_y - c_2 R_y \quad (2.283)$$

2.3.3.3 Relações constitutivas para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem

Reddy (2007) deduz, para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem, as resultantes das tensões relativas às placas especialmente ortotrópicas como sendo:

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \end{Bmatrix} \quad (2.284)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.285)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{xx} \\ P_{yy} \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} & F_{12} & 0 \\ F_{12} & F_{22} & 0 \\ 0 & 0 & F_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & 0 \\ H_{12} & H_{22} & 0 \\ 0 & 0 & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \end{Bmatrix} \quad (2.286)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_y \\ Q_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{44} & 0 \\ 0 & A_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.287)$$

$$\begin{Bmatrix} R_y \\ R_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{44} & 0 \\ 0 & D_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(0)} \\ \gamma_{xz}^{(0)} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{44} & 0 \\ 0 & F_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz}^{(2)} \\ \gamma_{xz}^{(2)} \end{Bmatrix} \quad (2.288)$$

Em que:

$$A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \, dz \quad (2.289)$$

$$D_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \, z^2 \, dz \quad (2.290)$$

$$F_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \, z^4 \, dz \quad (2.291)$$

$$H_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \bar{Q}_{ij} \, z^6 \, dz \quad (2.292)$$

Para o caso particular de placas laminadas especialmente ortotrópicas, Reddy (2007) resolve as integrais (2.289) a (2.292) entre os limites inferior z_k e superior z_{k+1} , obtendo assim as expressões:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(z_{k+1} - z_k) \quad (2.293)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(z_{k+1}^3 - z_k^3) \quad (2.294)$$

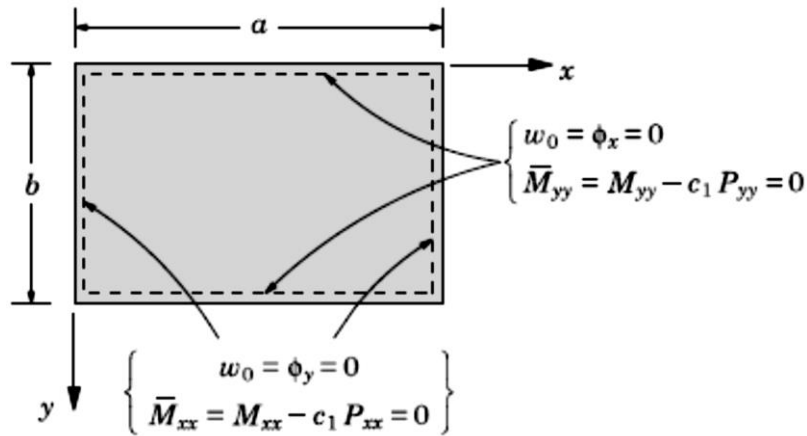
$$F_{ij} = \frac{1}{5} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(z_{k+1}^5 - z_k^5) \quad (2.295)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{7} \sum_{k=1}^N \bar{Q}_{ij}(z_{k+1}^7 - z_k^7) \quad (2.296)$$

2.3.3.4 Solução de Navier para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem

Para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem, as condições de contorno necessárias à solução de Navier para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos estão resumidas na Figura 2.27.

Figura 2.27 – Condições de contorno para uma placa simplesmente apoiada ao longo dos quatro bordos para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem



Fonte: Reddy (2007)

As expansões em séries de Fourier, segundo Reddy (2007), são as mesmas consideradas para a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, ou seja:

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2.297)$$

$$\varphi_x(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2.298)$$

$$\varphi_y(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (2.299)$$

$$q(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2.300)$$

Sendo:

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad (2.301)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad (2.302)$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a q(x,y) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) dx dy \quad (2.303)$$

Especificamente para um carregamento uniformemente distribuído por unidade de área q_0 , o parâmetro q_{mn} assume a expressão:

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (\text{para } m \text{ e } n \text{ ímpares}) \quad (2.304)$$

Por sua vez, os parâmetros W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} foram deduzidos por Reddy (2007) substituindo-se as expansões em séries de Fourier (2.297) a (2.300) nas equações diferenciais de equilíbrio (2.276) a (2.278). Dessa forma, o referido autor obteve, para o caso de análises estáticas lineares, o seguinte sistema de equações:

$$\begin{bmatrix} \hat{s}_{11} & \hat{s}_{12} & \hat{s}_{13} \\ \hat{s}_{12} & \hat{s}_{22} & \hat{s}_{23} \\ \hat{s}_{13} & \hat{s}_{23} & \hat{s}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.305)$$

Em que:

$$\hat{s}_{11} = \overline{A}_{55} \alpha_m^2 + \overline{A}_{44} \beta_n^2 + c_1^2 [H_{11} \alpha_m^4 + 2 (H_{12} + 2 H_{66}) \alpha_m^2 \beta_n^2 + H_{22} \beta_n^4] \quad (2.306)$$

$$\hat{s}_{12} = \overline{A}_{55} \alpha_m - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha_m^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha_m \beta_n^2] \quad (2.307)$$

$$\hat{s}_{13} = \overline{A}_{44} \beta_n - c_1 [\hat{F}_{22} \beta_n^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha_m^2 \beta_n] \quad (2.308)$$

$$\hat{s}_{22} = \overline{A}_{55} + \overline{D}_{11} \alpha_m^2 + \overline{D}_{66} \beta_n^2 \quad (2.309)$$

$$\hat{s}_{23} = (\overline{D}_{12} + \overline{D}_{66}) \alpha_m \beta_n \quad (2.310)$$

$$\hat{s}_{33} = \overline{A}_{44} + \overline{D}_{66} \alpha_m^2 + \overline{D}_{22} \beta_n^2 \quad (2.311)$$

$$\hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_1 F_{ij} \quad (2.312)$$

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - c_1 H_{ij} \quad (2.313)$$

$$\overline{D}_{ij} = \hat{D}_{ij} - c_1 \hat{F}_{ij} \quad (2.314)$$

As Equações (2.312) a (2.314) são calculadas para $i, j = 1, 2$ e 6 . Para $i, j = 4$ e 5 , há outras expressões, sendo elas:

$$\hat{A}_{ij} = A_{ij} - c_2 D_{ij} \quad (2.315)$$

$$\hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_2 F_{ij} \quad (2.316)$$

$$\overline{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_2 \hat{D}_{ij} \quad (2.317)$$

Neste ponto, é importante observar que o sistema da Equação (2.305) tem a mesma forma do sistema da Equação (2.206), relativo à teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. Com isso, a resolução do sistema da Equação (2.305) também pode ser

alcançada por meio da aplicação das Equações (2.215) a (2.221), utilizando, porém, os parâmetros $\hat{s}_{ij}$ que lhe são próprios.

2.3.2.5 Expressões das tensões normais e de cisalhamento para a teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem

As fórmulas finais para as tensões no plano da placa (σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy}) foram determinadas por Reddy (2007), por meio das relações constitutivas, como sendo:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} = \bar{Q}_{11} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (z S_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] + \\ \bar{Q}_{12} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (z S_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \end{aligned} \quad (2.318)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{yy} = \bar{Q}_{12} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (z S_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] + \\ \bar{Q}_{22} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (z S_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \end{aligned} \quad (2.319)$$

$$\tau_{xy} = \bar{Q}_{66} \left[\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (z S_{mn}^{xy} + c_1 z^3 T_{mn}^{xy}) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right] \quad (2.320)$$

Em que:

$$S_{mn}^{xx} = -\alpha_m X_{mn} \quad (2.321)$$

$$S_{mn}^{yy} = -\beta_n Y_{mn} \quad (2.322)$$

$$S_{mn}^{xy} = \beta_n X_{mn} + \alpha_m Y_{mn} \quad (2.323)$$

$$T_{mn}^{xx} = \alpha_m X_{mn} + \alpha_m^2 W_{mn} \quad (2.324)$$

$$T_{mn}^{yy} = \beta_n Y_{mn} + \beta_n^2 W_{mn} \quad (2.325)$$

$$T_{mn}^{xy} = - (\beta_n X_{mn} + \alpha_m Y_{mn} + 2 \alpha_m \beta_n W_{mn}) \quad (2.326)$$

Também por meio das relações constitutivas, Reddy (2007) definiu as fórmulas finais para as tensões de cisalhamento transversais (τ_{xz} e τ_{yz}), as quais são:

$$\tau_{yz} = (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [Q_{44} (Y_{mn} + \beta_n W_{mn})] \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (2.327)$$

$$\tau_{xz} = (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [Q_{55} (X_{mn} + \alpha_m W_{mn})] \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (2.328)$$

Em complemento, Reddy (2004) também deduz as tensões de cisalhamento transversais (τ_{xz} e τ_{yz}) a partir das equações diferenciais de equilíbrio tridimensionais. Por esse procedimento, o referido autor escreve:

$$\tau_{yz} = - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} \right) dz \quad (2.329)$$

$$\tau_{xz} = - \int_{z_k}^z \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) dz \quad (2.330)$$

Substituindo as expressões (2.318) a (2.320) nas integrais (2.329) e (2.330), vem:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (z^2 - z_k^2) D_{mn} + \frac{c_1}{4} (z^4 - z_k^4) F_{mn} \right] \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \\ + \tau_{yz}(x, y, z_k) \end{aligned} \quad (2.331)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xz} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (z^2 - z_k^2) B_{mn} + \frac{c_1}{4} (z^4 - z_k^4) E_{mn} \right] \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \\ + \tau_{xz}(x, y, z_k) \end{aligned} \quad (2.332)$$

Em que:

$$B_{mn} = [(\alpha_m^2 Q_{11} + \beta_n^2 Q_{66}) X_{mn} + \alpha_m \beta_n (Q_{12} + Q_{66}) Y_{mn}] \quad (2.333)$$

$$E_{mn} = - [\alpha_m^3 Q_{22} + \alpha_m \beta_n^2 (Q_{12} + 2 Q_{66})] W_{mn} - B_{mn} \quad (2.334)$$

$$D_{mn} = [\alpha_m \beta_n (Q_{12} + Q_{66}) X_{mn} + (\alpha_m^2 Q_{66} + \beta_n^2 Q_{22}) Y_{mn}] \quad (2.335)$$

$$F_{mn} = - [\beta_n^3 Q_{22} + \alpha_m^2 \beta_n (Q_{12} + 2 Q_{66})] W_{mn} - D_{mn} \quad (2.336)$$

As tensões de cisalhamento $\tau_{xz}(x,y,z_k)$ e $\tau_{yz}(x,y,z_k)$ são aquelas calculadas para uma cota z_k anterior à cota z . Novamente, a tensão normal transversal σ_{zz} não foi considerada, pois, segundo Reddy (2004), a mesma assume valores de pequena monta.

2.4 MÉTODOS ANALÍTICOS UNIDIMENSIONAIS

Nesta subseção, são apresentados os métodos analíticos unidimensionais mais empregados para o cálculo das tensões normais e de cisalhamento em painéis de MLCC, sendo eles: o Método Gama (ou *Mechanically Jointed Beams Theory*), o Método κ (ou *Composite Theory*) e o Método de Analogia ao Cisalhamento (ou *Shear Analogy Method*).

2.4.1 Método Gama

O Anexo B da norma CEN EN 1995-1-1:2004 apresenta, para o dimensionamento de vigas formadas pela união de peças de madeira por intermédio de conectores mecânicos, o denominado Método Gama ou *Mechanically Jointed Beams Theory*. É importante mencionar que esse método já se encontra incorporado ao projeto de revisão da norma brasileira de estruturas de madeira, a ABNT NBR 7190:2020.

Mais precisamente, em 1955, o professor Karl Möhler foi o responsável pelo desenvolvimento do Método Gama, segundo o qual as propriedades de rigidez das vigas formadas ficam definidas por meio de uma rigidez efetiva à flexão $(EI)_{ef}$, a qual, por sua vez, é determinada com base nas propriedades da seção transversal da viga analisada e do fator de eficiência γ dos conectores mecânicos empregados (KARACABEYLI; GAGNON, 2019).

As hipóteses assumidas na elaboração do Método Gama constam no Anexo B da norma CEN EN 1995-1-1:2004, sendo elas:

- a) Emprego da Teoria da Elasticidade em regime linear;

- b) As vigas simplesmente apoiadas, contínuas e em balanço devem ser calculadas considerando, respectivamente: o comprimento do vão, 80% do comprimento do vão mais significativo e duas vezes o comprimento do balanço;
- c) As partes individuais constituintes das vigas podem ser de comprimento único ou dotadas de juntas de extremidades coladas;
- d) As partes individuais constituintes das vigas são conectadas entre si mediante o uso de conectores mecânicos dotados de um módulo de deslizamento K ;
- e) O espaçamento entre os conectores mecânicos pode, em conformidade com o esforço cortante atuante, ser constante ou variar de forma uniforme entre $s_{\min}$ e $s_{\max}$, devendo-se respeitar a desigualdade: $s_{\max} \leq 4 s_{\min}$;
- f) O carregamento atuante é tomado segundo a direção do eixo vertical z fornecendo um momento fletor $M = M(x)$ de variação senoidal ou parabólica e um esforço cortante $V = V(x)$, sendo o eixo x coincidente com o eixo da peça.

Entretanto, Karacabeyli e Gagnon (2019) chamam atenção para o fato de o Método Gama ter sido originalmente desenvolvido para aplicações em vigas com conectores mecânicos, necessitando assim de algumas adaptações que permitam-no ser empregado na análise estrutural de painéis de MLCC, haja vista que, nesses painéis, a união entre as partes individuais (lamelas) é usualmente realizada mediante a aplicação de adesivo. Dentre as referidas adaptações, estão:

- a) As camadas dos painéis de MLCC orientadas no sentido longitudinal são as únicas que têm a função de resistir às cargas atuantes e comportam-se como “vigas”;
- b) As “vigas” dos painéis são unidas por meio de conectores mecânicos virtuais, cuja rigidez é considerada igual ao módulo de elasticidade transversal *rolling shear* G_R ($= G_{23}$) das camadas orientadas no sentido transversal. O módulo de elasticidade transversal *rolling shear* G_R , por sua vez, pode ser estimado como sendo igual a um décimo do módulo de elasticidade transversal G_0 ($= G_{12}$) ou ser obtido com o fabricante do painel;
- c) A aplicação do Método Gama é recomendada para painéis de MLCC com razão vão/espessura elevada (igual ou superior a 30), uma vez que o desenvolvimento

desse método provém da teoria de vigas sem a consideração das deformações geradas pelos esforços de cisalhamento.

2.4.1.1 Rigidez à flexão efetiva e tensão normal de flexão máxima

A rigidez à flexão efetiva, segundo a norma CEN EN 1995-1-1:2004, deve ser tomada como sendo:

$$(EI)_{ef} = \sum_{i=1}^n (E_i I_i + \gamma_i E_i A_i a_i^2) \quad (2.337)$$

Em que:

- E_i – Módulo de elasticidade longitudinal da i-ésima camada de lamela de madeira (será igual a $E_0 = E_1$ ou $E_{90} = E_2$);
- a_i – Distância entre o centroide da i-ésima camada e a linha neutra da peça como um todo;
- A_i – Área da seção transversal da i-ésima camada de lamela de madeira;

$$A_i = b_x h_i \quad (2.338)$$

- I_i – Momento de inércia da seção transversal da i-ésima camada de lamela de madeira;

$$I_i = \frac{b_x h_i^3}{12} \quad (2.339)$$

- γ_i – Fator de eficiência da conexão na i-ésima camada de lamela de madeira;

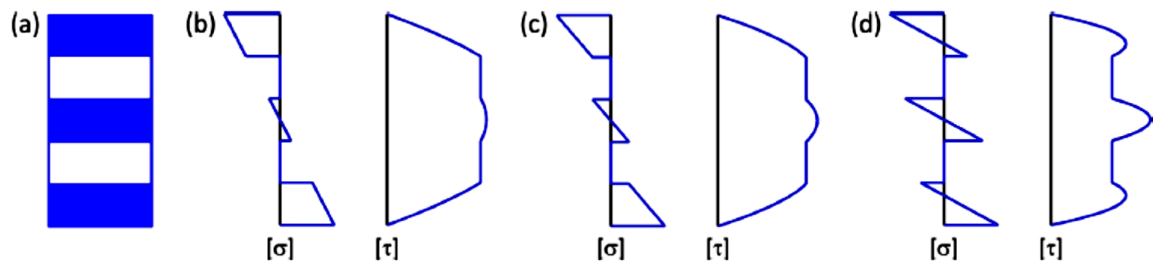
$$\gamma_i = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E_i A_i}{a^2} \frac{h_i}{G_R b_x}} \quad (2.340)$$

- a – Vão do painel de MLCC segundo a menor dimensão;

- h_i – Espessura da i -ésima camada de lamela de madeira;
- b_x – Largura da i -ésima camada de lamela de madeira na direção do menor vão (geralmente considerada igual a 1 metro);
- $G_R = G_{23}$ – Módulo de elasticidade transversal *rolling shear*.

De acordo com Karacabeyli e Gagnon (2019), o fator de eficiência γ se encontra em um intervalo entre 0 e 1, sendo $\gamma = 0$ e $\gamma = 1$ os valores correspondentes à ausência de conexões e à presença de conexões totalmente rígidas, respectivamente. A Figura 2.28 reúne alguns diagramas de tensões normais e de cisalhamento de um painel de MLCC genérico, evidenciando a influência do fator de eficiência γ , sendo $\gamma = 1$ em (b), $\gamma = 0,5$ em (c) e $\gamma = 0,1$ em (d).

Figura 2.28 – Influência do fator de eficiência γ das ligações entre as lamelas de madeira



Fonte: Christovasilis et al. (2016)

É possível notar na Figura 2.28 que, quanto maior o fator de eficiência da ligação, maior é a propensão das lamelas de madeira longitudinais se comportarem como parte integrante do painel como um todo e, quanto menor o referido fator, maior a tendência dessas lamelas a resistirem à flexão de forma individual (AMORIM, MANTILLA; CARRASCO, 2017).

De posse dos fatores de eficiência γ e da rigidez à flexão efetiva do painel de MLCC, é possível proceder com os cálculos relativos às tensões normais e cisalhantes. A norma CEN EN 1995-1-1:2004 prescreve as seguintes expressões para o cálculo das tensões normais provocadas por momento fletor:

$$(\sigma_{xx})_{g,i} = \frac{\gamma_i E_i a_i M_{xx}}{(EI)_{ef}} \quad (2.341)$$

$$(\sigma_{xx})_{l,i} = \frac{0,5 E_i h_i M_{xx}}{(EI)_{ef}} \quad (2.342)$$

Em que: M_{xx} é o máximo momento fletor calculado segundo a direção x , ou seja, segundo a direção do menor vão do painel de MLCC, conforme convenção de eixos adotada no presente trabalho.

Ademais, com base nas expressões da norma CEN EN 1995-1-1:2004, Karacabeyli e Gagnon (2019) fazem as seguintes elucidações:

- a) $(\sigma_{xx})_{l,i}$ é a tensão normal local devida à flexão, isto é, a tensão oriunda da flexão individual da camada i ;
- b) $(\sigma_{xx})_{g,i}$ é a tensão normal global devida à flexão, isto é, a tensão que advém da flexão do painel de MLCC como um todo;
- c) A tensão normal total $(\sigma_{xx})_i$, na i -ésima camada, é dada pela soma das tensões normais local $(\sigma_{xx})_{l,i}$ e global $(\sigma_{xx})_{g,i}$, ou seja:

$$(\sigma_{xx})_i = \frac{\gamma_i E_i a_i M_{xx}}{(EI)_{ef}} + \frac{0,5 E_i h_i M_{xx}}{(EI)_{ef}} \quad (2.343)$$

2.4.1.2 Tensão de cisalhamento máxima

Da Resistência dos Materiais, sabe-se que a máxima tensão de cisalhamento ocorre à altura da linha neutra de uma peça submetida à flexão simples, posição na qual se verifica, concomitantemente, tensão normal nula. Segundo Karacabeyli e Gagnon (2019), para os painéis de MLCC, a expressão clássica da Resistência dos Materiais pode ser escrita da seguinte forma:

$$\tau = \frac{V_{xz} (EQ)}{(EI)_{ef} b_x} \quad (2.344)$$

Em que:

- V_{xz} – Máximo esforço cortante atuante em uma face do painel de MLCC contida no plano coordenado x - z . Esse esforço cortante é obtido tomando-se uma faixa de largura unitária segundo a direção do menor vão do painel de MLCC (vão segundo a direção x);

- Q – Momento estático da área da seção transversal do painel de MLCC contida no plano coordenado x-z.

2.4.2 Método κ

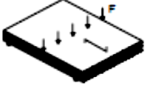
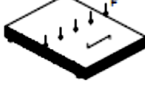
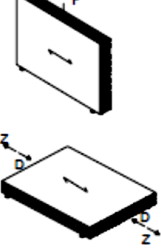
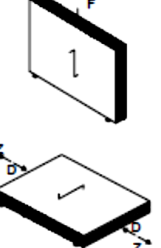
O Método κ ou *Composite Theory* é um método oriundo da teoria dos materiais compósitos e que considera, no dimensionamento dos painéis de MLCC, os parâmetros de resistência e de rigidez das lamelas de madeira por meio de um fator de composição k_i . Mais precisamente, este fator de composição k_i é calculado em função do carregamento atuante no painel de MLCC e da orientação das suas lamelas de madeira (AMORIM, MANTILLA; CARRASCO, 2017).

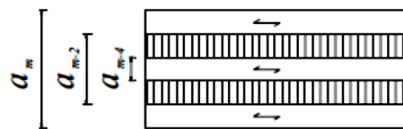
Segundo Karacabeyli e Gagnon (2019), o método κ havia sido desenvolvido inicialmente para o dimensionamento de painéis de madeira compensada, entretanto ele foi modificado para que pudesse ser empregado em painéis de MLCC, assumindo assim as seguintes hipóteses:

- a) O método utiliza os fatores de composição k_i dados na Figura 2.29;
- b) A relação tensão-deformação é linear, sendo também considerada a hipótese das seções planas de Bernoulli;
- c) As deformações por cisalhamento não são computadas, sendo então recomendado o uso do método em questão para painéis com razão vão/espessura superior a 30;
- d) O método baseia-se nas propriedades de resistência e de rigidez de todas as camadas do painel, podendo-se ser utilizada a seguinte razão para os módulos de elasticidade:

$$E_{90} = E_0/30.$$

Figura 2.29 – Fatores de composição para painéis de MLCC segundo o Método κ

	k_i
	$k_1 = 1 - \left(1 - \frac{E_{90}}{E_0} \right) \cdot \frac{a_{m-2}^3 - a_{m-4}^3 + \dots \pm a_1^3}{a_m^3}$
	$k_2 = \frac{E_{90}}{E_0} + \left(1 - \frac{E_{90}}{E_0} \right) \cdot \frac{a_{m-2}^3 - a_{m-4}^3 + \dots \pm a_1^3}{a_m^3}$
	$k_3 = 1 - \left(1 - \frac{E_{90}}{E_0} \right) \cdot \frac{a_{m-2} - a_{m-4} + \dots \pm a_1}{a_m}$
	$k_4 = \frac{E_{90}}{E_0} + \left(1 - \frac{E_{90}}{E_0} \right) \cdot \frac{a_{m-2} - a_{m-4} + \dots \pm a_1}{a_m}$



Fonte: Blass e Fellmoser (2004)

Na Figura 2.29, encontra-se ilustrado um painel de MLCC com 5 camadas e, portanto, verifica-se $m = 5$. Dessa forma, $a_m = a_5$, $a_{m-2} = a_3$ e $a_{m-4} = a_1$ representam a espessura total do painel, a soma das espessuras das três camadas ao centro do painel e a espessura da camada central, respectivamente.

De acordo com Blass e Fellmoser (2004), uma vez calculado o fator de composição k_i , pode-se determinar a rigidez à flexão efetiva e a tensão normal máxima para painéis de MLCC utilizados como placas e sujeitos a um carregamento transversal por meio das expressões:

$$(EI)_{ef} = E_0 \frac{b_x a_m^3}{12} k_{1(2)} \quad (2.345)$$

$$(\sigma_{xx})_{\max} = \frac{M_{xx}}{(EI)_{ef}} E_0 \frac{a_m}{2} \quad (2.346)$$

2.4.3 Método de Analogia ao Cisalhamento

O Método de Analogia ao Cisalhamento (ou *Shear Analogy Method*), desenvolvido por Kreuzinger, em 1999, é baseado na associação de duas vigas virtuais, por meio de elementos de rigidez axial infinita, de modo que as vigas tenham deslocamentos verticais iguais ao longo de seus comprimentos (CHRISTOVASILIS et al., 2016).

Além disso, no Método de Analogia ao Cisalhamento, as deformações por cisalhamento das lamelas longitudinais não são desprezadas e, para isso, assume-se que as características do painel de MLCC sejam separadas nas duas vigas virtuais, com uma viga A apresentando a rigidez à flexão das lamelas individuais e a viga B possuindo a “parcela de Steiner” da rigidez à flexão, bem como a rigidez ao cisalhamento (KARACABEYLI; GAGNON, 2019).

A Figura 2.30 apresenta um esboço da associação das vigas virtuais A e B, bem como a indicação dos parâmetros a serem considerados para cada uma delas.

Figura 2.30 – Vigas virtuais do Método de Analogia ao Cisalhamento



Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Gagnon (2019)

Karacabeyli e Gagnon (2019) afirmam que a rigidez à flexão das vigas virtuais A e B, bem como a rigidez ao cisalhamento da viga virtual B são dadas pelas seguintes expressões:

$$B_A = (EI)_A = \sum_{i=1}^n E_i I_i = \sum_{i=1}^n E_i b_x \frac{h_i^3}{12} \quad (2.347)$$

$$B_B = (EI)_B = \sum_{i=1}^n E_i A_i z_i^2 \quad (2.348)$$

$$S_B = (GA)_B = \frac{\left(h - \frac{h_i}{2} - \frac{h_n}{2}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k_i}\right) + \frac{h_1}{2 G_1 b_x} + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{h_i}{G_i b_x}\right) + \frac{h_n}{2 G_n b_x}} \quad (2.349)$$

Em que:

- k_i – Parâmetro que mede o deslizamento dos “conectores” entre as lamelas de madeira;
- h_i – Altura de cada camada individual i do painel de MLCC;
- h_n – Altura da n -ésima camada do painel de MLCC;
- z_i – Distância do centroide de cada camada individual ao eixo neutro do painel.

Entretanto, Karacabeyli e Douglas (2013) apresentam a Equação (2.349) com a ausência das razões $1/k_i$, haja vista que, no caso de painéis de MLCC formados por colagem adequada das lamelas de madeira, não há deslizamento de “conectores”. Dessa forma, a referida equação fica escrita da seguinte forma:

$$S_B = (GA)_B = \frac{\left(h - \frac{t_i}{2} - \frac{t_n}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_1 b_x} + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{h_i}{G_i b_x}\right) + \frac{h_n}{2 G_n b_x}} \quad (2.350)$$

Os Quadros 2.3 e 2.4 reúnem as expressões dadas em Karacabeyli e Gagnon (2019) para a determinação das tensões normais e de cisalhamento em cada uma das vigas virtuais da Figura 2.30.

Quadro 2.3 – Esforços solicitantes e tensões para a viga virtual A

Esforço solicitantes ou tensão na viga virtual A	Expressão
Momento fletor em cada lamela de madeira	$M_{A,i} = \frac{E_i I_i}{B_A} M_A$
Esforço cortante em cada lamela de madeira	$V_{A,i} = \frac{E_i I_i}{B_A} V_A$
Tensão normal em cada lamela de madeira	$\sigma_{A,i} = \pm \frac{M_{A,i}}{I_i} \frac{h_i}{2}$
Tensão de cisalhamento em cada lamela de madeira	$\tau_{A,i} = \frac{E_i I_i}{B_A} 1,5 \frac{V_A}{b h_i}$
Em que: M_A e V_A correspondem ao momento fletor e ao esforço cortante na viga virtual A	

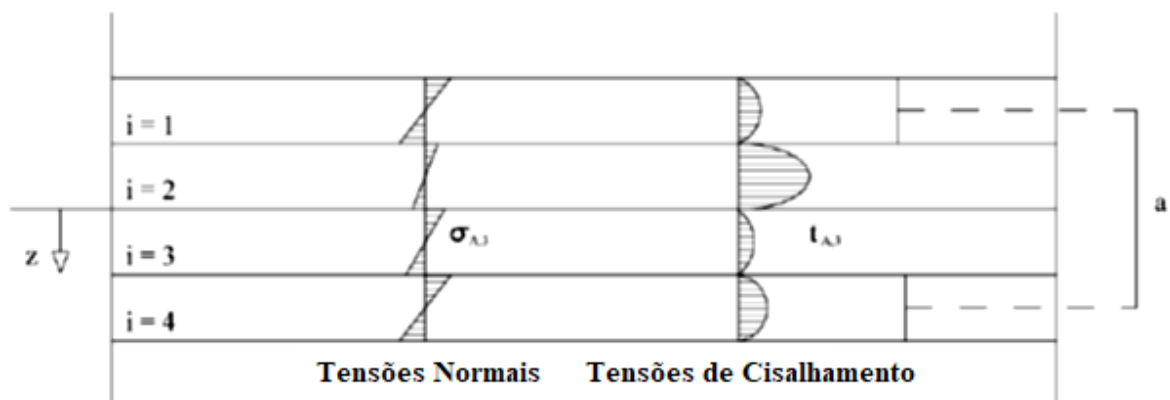
Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Gagnon (2019)

Quadro 2.4 – Esforços solicitantes e tensões para a viga virtual B

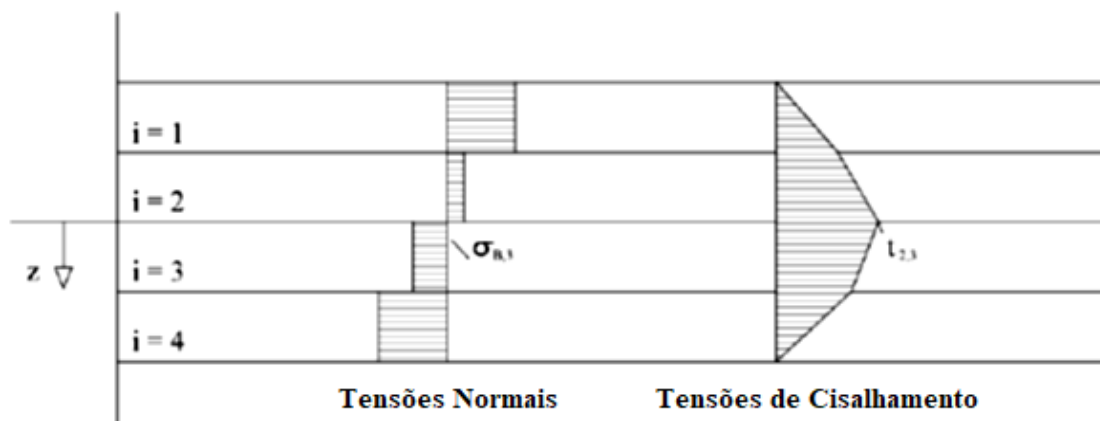
Esforço solicitantes ou tensão na viga virtual B	Expressão
Tensão normal em cada lamela de madeira	$\sigma_{B,i} = \frac{E_i z_i}{B_B} M_B$
Tensão de cisalhamento na interface entre lamelas de madeira	$\tau_{B,i+1} = \frac{V_B}{B_B} \sum_{j=i+1}^n E_j A_j z_j$
Em que: M_B e V_B correspondem ao momento fletor e ao esforço cortante na viga virtual B	

Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Gagnon (2019)

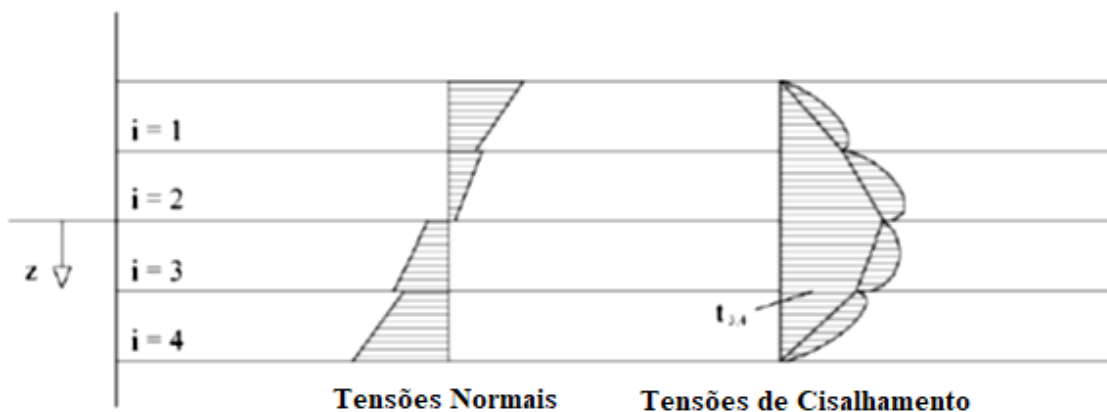
Em complemento, as Figuras 2.31, 2.32 e 2.33 ilustram, respectivamente, as tensões normais e de cisalhamento nas vigas virtuais A e B e a superposição das mesmas, a qual fornece as tensões finais a serem consideradas no dimensionamento dos painéis de MLCC.

Figura 2.31 – Tensões normais e de cisalhamento na viga virtual A

Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Gagnon (2019)

Figura 2.32 – Tensões normais e de cisalhamento na viga virtual B

Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Gagnon (2019)

Figura 2.33 – Tensões finais segundo o Método de Analogia ao Cisalhamento

Fonte: Adaptado de Karacabeyli e Gagnon (2019)

Embora não constem em nenhuma das referências consultadas, apresenta-se no presente trabalho as deduções das expressões referentes aos esforços solicitantes internos de momentos fletores e de esforços cortantes atuantes em cada uma das vigas virtuais A e B da Figura 2.30.

Para a referida dedução, parte-se da definição inicial de Christovasilis et al. (2016), segundo a qual as vigas virtuais A e B possuem deslocamentos verticais iguais ao longo de seus comprimentos, ou seja, $w_A = w_B$. Ademais, para o cômputo desses deslocamentos, considerar-se-ão vigas simplesmente apoiadas de vão a (menor vão do painel de MLCC), submetidas a um carregamento transversal $q_{0,x}$ uniformemente distribuído e as contribuições dos esforços solicitantes internos de momentos fletores e de esforços cortantes. A partir dessas considerações, escreve-se, com base nas expressões de flechas da Resistência dos Materiais dadas por Timoshenko e Gere (1994), a seguinte igualdade:

$$\frac{5}{384} \frac{q_{0x,A} a^4}{(EI)_A} + \frac{1}{8} \frac{q_{0x,A} a^2 \kappa}{(GA)_A} = \frac{5}{384} \frac{q_{0x,B} a^4}{(EI)_B} + \frac{1}{8} \frac{q_{0x,B} a^2 \kappa}{(GA)_B} \quad (2.351)$$

Em que:

- q_{0x} – Quinhão de carregamento utilizado para o dimensionamento do painel de MLCC. Esse quinhão de carregamento é definido tomando-se uma faixa de largura unitária segundo a direção do menor vão do painel de MLCC;
- $q_{0x,A}$ – Parcela do quinhão de carregamento q_{0x} absorvida pela viga virtual A;
- $q_{0x,B}$ – Parcela do quinhão de carregamento q_{0x} absorvida pela viga virtual B;
- κ – Fator de forma no cisalhamento, o qual deve ser adotado igual a 1,0 de acordo com Karacabeyli e Gagnon (2019).

E:

$$q_{0,A} + q_{0,B} = q_0 \quad (2.352)$$

Além disso, pelo Método de Analogia ao Cisalhamento, considera-se que $(GA)_A \rightarrow \infty$ (Figura 2.30). De posse dessa consideração e das expressões (2.351) e (2.352), pode-se deduzir uma expressão para a parcela do quinhão de carregamento q_{0x} absorvida pela viga virtual B, a qual resulta em:

$$q_{0x,B} = \frac{\frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_A}}{\frac{5}{384} \frac{a^4}{(EI)_A} + \frac{5}{384} \frac{a^4}{(EI)_B} + \frac{1}{8} \frac{a^2 \kappa}{(GA)_B}} \quad (2.353)$$

Com o cômputo de $q_{0x,B}$, pode-se facilmente proceder com o cálculo de $q_{0x,A}$, fazendo-se:

$$q_{0x,A} = q_{0x} - q_{0x,B} \quad (2.354)$$

De posse das parcelas do quinhão de carregamento q_{0x} que são absorvidas por cada uma das vigas virtuais, determinam-se os esforços solicitantes internos nas vigas mediante a aplicação das equações da Estática Elementar. Soriano (2013), para vigas simplesmente apoiadas e sujeitas a um carregamento transversal uniformemente distribuído, traz as seguintes equações para os esforços solicitantes de momento fletor e de esforço cortante:

$$M_A = \frac{q_{0x,A} a^2}{8} \quad (2.355)$$

$$V_A = \frac{q_{0x,A} a}{2} \quad (2.356)$$

$$M_B = \frac{q_{0x,B} a^2}{8} \quad (2.357)$$

$$V_B = \frac{q_{0x,B} a}{2} \quad (2.358)$$

Além dos esforços solicitantes internos, faz-se importante avaliar o deslocamento vertical máximo no centro do painel de MLCC. A expressão para esse cálculo em um painel simplesmente apoiado e carregado transversalmente com um carregamento uniformemente distribuído é dada por Karacabeyli e Douglas (2013) como sendo:

$$w_{\max} = \frac{5}{384} \frac{q_0 L^4}{(EI)_{ef}} + \frac{1}{8} \frac{q_0 L^2 \kappa}{(GA)_{ef}} \quad (2.359)$$

Em que:

$$(EI)_{ef} = (EI)_A + (EI)_B \quad (2.360)$$

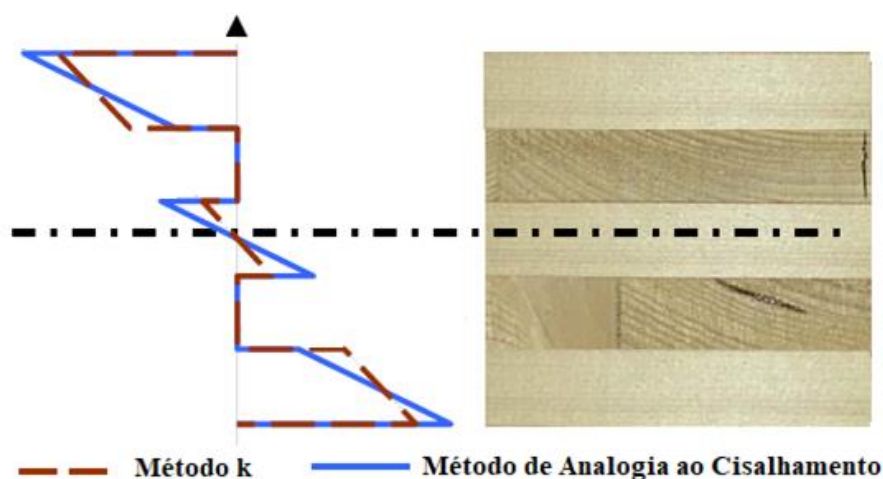
$$(GA)_{ef} = (GA)_B \quad (2.361)$$

Para os métodos unidimensionais anteriormente apresentados (Método Gama e Método κ), o cálculo do máximo deslocamento vertical também pode ser efetuado pela expressão

(2.359), bastando-se anular o segundo termo do seu membro direito, haja vista que este é referente à parcela do deslocamento gerada pelas deformações de cisalhamento.

Por fim, é interessante pontuar uma consideração feita por Mestek, Kreuzinger e Winter (2008) a respeito da diferença de distribuição das tensões normais quando da análise dos painéis de MLCC pelo Método de Analogia ao Cisalhamento e pelo Método κ . A Figura 2.34 mostra como as tensões normais nas bordas mais extremas, as quais são de interesse para o dimensionamento dos painéis de MLCC, são de maior magnitude quando computadas a partir do Método de Analogia ao Cisalhamento. Também é possível notar que as tensões nas lamelas transversais resultam inferiores quando esse método é aplicado, embora essas tensões não sejam de grande interesse à prática de projetos.

Figura 2.34 – Distribuição das tensões normais em um painel de MLCC segundo o Método de Analogia ao Cisalhamento e o Método κ



Fonte: Adaptado de Mestek, Kreuzinger e Winter (2008)

Apesar da diferença exposta, Mestek, Kreuzinger e Winter (2008) afirmam que, caso desejada, a aplicação do Método κ pode ser feita, com suficiente acurácia no cálculo das tensões normais, em painéis de MLCC com razão vão/espessura superior a 20, pois, para esses painéis, a influência do cisalhamento pode ser desprezada.

2.5 ESTADOS LIMITES ÚLTIMO E DE SERVIÇO SEGUNDO O PROJETO DE REVISÃO DA ABNT NBR 7190:2020

Após o levantamento das ações incidentes em uma estrutura e a realização da análise estrutural para o cômputo dos deslocamentos verticais e das tensões – normais e de

cisalhamento – faz-se necessário aferir se a madeira empregada apresenta resistências e rigidezes adequadas para satisfazerem os Estados Limites Último e de Serviço.

Mais precisamente, no caso das estruturas de madeira sujeitas à flexão simples, há a necessidade de se averiguar se a madeira escolhida sofrerá ruptura sob tração, compressão ou cisalhamento (Estado Limite Último). Em complemento, também deve-se verificar se os deslocamentos verticais experimentados pelas referidas estruturas encontram-se dentro de limites que garantam adequada aceitabilidade sensorial e durabilidade da edificação (Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas).

No presente trabalho, as verificações supramencionadas são realizadas a partir das disposições do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020.

2.5.1 Verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas

2.5.1.1 Combinação de ações para verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas

Conforme posto anteriormente, o Estado Limite de Serviço a ser verificado nas estruturas de madeira submetidas à flexão simples corresponde ao Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas.

Em conformidade com o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, a verificação em questão deve ser feita com o uso da combinação quase-permanente – denominada combinação de longa duração, pela norma referida. Essa combinação é definida pela seguinte equação:

$$F_{d,serv} = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \sum_{j=1}^n \psi_{2j} F_{Qj,k} \quad (2.362)$$

Em que:

- $F_{Gi,k}$ - Valor característico das ações permanentes;
- $F_{Qi,k}$ - Valor característico das ações variáveis;
- ψ_{2j} - Fator de redução de cada uma das ações variáveis para definir os seus valores quase-permanentes $\psi_{2j} F_{Qj,k}$.

Os valores para ψ_2 são prescritos pela ABNT NBR 8681:2004 e estão elencados na Tabela 2.1, juntamente com os valores para o fator de combinação ψ_0 e para o fator de redução ψ_1 , os quais são abordados na subseção adiante relativa à verificação do Estado Limite Último.

Tabela 2.1 – Valores dos fatores de combinação ψ_0 e dos fatores de redução ψ_1 e ψ_2

Ações	ψ_0	ψ_1	$\psi_2^{3), 4)}$
Cargas acidentais de edifícios			
Locais em que não há predominância de pesos e de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, nem de elevadas concentrações de pessoas ¹⁾	0,5	0,4	0,3
Locais em que há predominância de pesos de equipamentos que permanecem fixos por longos períodos de tempo, ou de elevadas concentrações de pessoas ²⁾	0,7	0,6	0,4
Bibliotecas, arquivos, depósitos, oficinas e garagens	0,8	0,7	0,6
Vento			
Pressão dinâmica do vento nas estruturas em geral	0,6	0,3	0
Temperatura			
Variações uniformes de temperatura em relação à média anual local	0,6	0,5	0,3
Cargas móveis e seus efeitos dinâmicos			
Passarelas de pedestres	0,6	0,4	0,3
Pontes rodoviárias	0,7	0,5	0,3
Pontes ferroviárias não especializadas	0,8	0,7	0,5
Pontes ferroviárias especializadas	1,0	1,0	0,6
Vigas de rolamentos de pontes rolantes	1,0	0,8	0,5
¹⁾ Edificações residenciais, de acesso restrito. ²⁾ Edificações comerciais, de escritórios e de acesso público. ³⁾ Para combinações excepcionais onde a ação principal for sismo, admite-se adotar para ψ_2 o valor zero. ⁴⁾ Para combinações excepcionais onde a ação principal for o fogo, o fator de redução ψ_2 pode ser reduzido, multiplicando-o por 0,7.			

Fonte: ABNT NBR 8681:2004

2.5.1.2 Valores efetivos do módulo de elasticidade, módulo de elasticidade transversal e coeficientes de modificação da madeira

Ainda conforme o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, quando da verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas, também se faz necessário especificar os módulos de elasticidade e elasticidade transversal em valores efetivos, os quais são dados por:

$$E_{c0,ef} = k_{mod} E_{c0,m} \quad (2.363)$$

$$G_{ef} = \frac{E_{c0,ef}}{15} \quad (2.364)$$

Em que:

- $E_{c0,m}$ - Valor médio do módulo de elasticidade na direção paralela às fibras da madeira;
- k_{mod} - Coeficiente de modificação.

A Equação (2.364) é útil quando não se conhece o valor do módulo de elasticidade transversal médio das lamelas de madeira que comporão a estrutura de madeira analisada.

O coeficiente de modificação k_{mod} , segundo o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, é dado pelo produto de três coeficientes de modificação:

$$k_{mod} = k_{mod1} k_{mod2} k_{mod3} \quad (2.365)$$

Primeiramente, é importante pontuar que o coeficiente de modificação k_{mod1} leva em conta a classe de carregamento da principal ação variável e o tipo de madeira empregada. Os valores para esse coeficiente estão elencados na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 – Valores dos coeficientes de modificação k_{mod1}

Classes de carregamento	Ação variável principal da combinação		Tipos de madeira	
	Duração acumulada	Ordem de grandeza da duração acumulada da ação característica	Madeira serrada Madeira roliça Madeira laminada colada Madeira compensada	Madeira recomposta
Permanente	Permanente	Vida útil da construção	0,60	0,30
Longa duração	Longa duração	Mais de seis meses	0,70	0,45
Média duração	Média duração	Uma semana a seis meses	0,80	0,65
Curta duração	Curta duração	Menos de uma semana	0,90	0,90
Instantânea	Instantânea	Muito curta	1,10	1,10

Fonte: Projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

O coeficiente de modificação k_{mod2} , por sua vez, leva em consideração a classe de umidade do local onde a madeira será empregada e o tipo de madeira empregada. Para k_{mod2} , devem ser utilizados os valores dispostos na Tabela 2.3.

Tabela 2.3 – Valores dos coeficientes de modificação k_{mod2}

Classes de umidade	Madeira serrada Madeira roliça Madeira laminada colada Madeira compensada	Madeira recomposta
(1)	1,00	1,00
(2)	0,90	0,95
(3)	0,80	0,93
(4)	0,70	0,90

Fonte: Projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

A classe de umidade do local onde a madeira será empregada é definida, segundo a norma em questão, a partir da umidade relativa do ambiente, devendo ser observados os valores da Tabela 2.4.

Tabela 2.4 – Classes de umidade da madeira

Classes de umidade	Umidade relativa do ambiente U_{amb}	Umidade de equilíbrio da madeira U_{eq}
1	$U_{amb} \leq 65 \%$	12 %
2	$65 \% < U_{amb} \leq 75 \%$	15 %
3	$75 \% < U_{amb} \leq 85 \%$	18 %
4	$U_{amb} > 85 \%$ durante longos períodos	$\geq 25 \%$

Fonte: Projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

Por fim, o coeficiente de modificação k_{mod3} leva em conta a qualidade da madeira. Para a madeira serrada, esse coeficiente depende das classificações visuais e mecânicas, ao passo que, para a madeira lamelada colada, o coeficiente em questão é uma função da presença de emendas *fingerjoints*, da curvatura da peça e das condições ambientais – em termos da

temperatura ambiente e do teor de umidade – do local onde a madeira será empregada. Para o último caso, tem-se a equação:

$$k_{\text{mod}3} = C_e C_c C_t \quad (2.366)$$

Em que:

- C_e - Coeficiente de modificação das emendas *fingerjoints* (emendas de entalhes múltiplos). O coeficiente de modificação C_e assume valor igual a 1,00 para peças sem emendas longitudinais e igual a 0,95 para peças com emendas;
- C_c - Coeficiente de modificação devido à curvatura da peça. Esse coeficiente assume valor igual a 1,00 para peças retas, enquanto que, para peças curvas, deve-se fazer uso da equação a seguir, que é função da razão entre a espessura das lamelas (t) e o menor raio de curvatura peça (r);

$$C_e = 1 - 2000 \left(\frac{t}{r} \right)^2 \quad (2.367)$$

- C_t - Coeficiente de modificação de temperatura. Para estabelecer esse coeficiente, deve-se levar em conta a temperatura ambiente e o teor de umidade do local onde a madeira será empregada. O projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020 especifica os valores dispostos na Tabela 2.5.

Tabela 2.5 – Valores dos coeficientes de modificação C_t

Tipo de propriedade	Teor de umidade da madeira em serviço	Temperatura ambiente °C		
		°C ≤ 38	38 < °C ≤ 52	52 < °C ≤ 66
tração paralela e módulo de elasticidade	seca ou úmida	1,0	0,9	0,9
demais propriedades e ligações	seca < 16 %	1,0	0,8	0,7
	úmida ≥ 16 %	1,0	0,7	0,5

Fonte: Projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

2.5.1.3 Flechas imediata, devida à fluência e efetiva e contraflechas

Para fazer a determinação das flechas nas estruturas de madeira sujeitas à flexão simples, o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020 prescreve a seguinte expressão:

$$w_{ef} = w_{ime} + w_c = w_{ime} + \varphi w_{ime} = (1 + \varphi) w_{ime} \quad (2.368)$$

$$w_{ef} = (1 + \varphi) (w_g + \varphi_2 w_q) \quad (2.369)$$

Em que:

- w_{ef} - Flecha efetiva (valor final da flecha);
- w_{ime} - Flecha imediata (obtida da análise estrutural);
- w_c - Flecha devida à fluência da madeira;
- φ - Coeficiente de fluência;
- w_g - Flecha devida às ações permanentes;
- w_q - Flecha devida às ações variáveis.

Em outras palavras, para calcular a flecha efetiva, basta conhecer a flecha imediata e o coeficiente de fluência, cujo valor é relacionado na Tabela 2.6.

Tabela 2.6 – Valores dos coeficientes de fluência φ

Classes de carregamento	Classes de umidade	
	(1) e (2)	(3) e (4)
Permanente ou de longa duração	0,8	2,0
Média duração	0,3	1,0
Curta duração	0,1	0,5

Fonte: Projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

Após o cálculo da flecha efetiva, é necessário verificar se ela encontra-se dentro de limites aceitáveis que são especificados pela norma brasileira. Para as construções correntes, as flechas efetivas não devem superar 1/300, ou seja:

$$w_{\text{lim}} = \frac{L}{300} \quad (2.370)$$

Na Equação (2.370), o parâmetro L deve ser tomado como sendo o menor dos vãos dos painéis de MLCC. Para painéis de MLCC projetados em balanço, o valor de L deve ser tomado igual ao dobro do vão em balanço.

Com base nas exposições anteriores, tem-se então que o Estado Limite de Deformações Excessivas fica satisfeito quando é obedecida a subsequente desigualdade:

$$w_{\text{ef}} = (1 + \varphi) (w_g + \varphi_2 w_q) \leq w_{\text{lim}} = \frac{L}{300} \quad (2.371)$$

Caso a desigualdade precedente não seja atendida, o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020 permite recorrer ao uso de contraflecha para atendê-la, reduzindo as flechas geradas pelas ações permanentes. Os valores de contraflechas, segundo a norma mencionada, devem ser escolhidos com base na desigualdade:

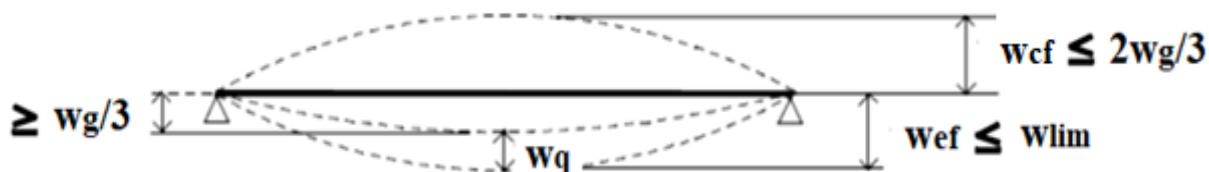
$$w_{\text{cf}} \leq \frac{2}{3} w_g \quad (2.372)$$

Destarte, quando do uso de contraflecha, a verificação do Estado Limite de Deformações Excessivas passa então a ser feita pela desigualdade:

$$w_{\text{ef}}^* = (1 + \varphi) [(w_g - w_{\text{cf}}) + \varphi_2 w_q] \leq w_{\text{lim}} = \frac{L}{300} \quad (2.373)$$

Para fins de melhor visualização do efeito da contraflecha, tem-se uma representação esquemática da desigualdade (2.373) na Figura 2.35.

Figura 2.35 – Efeito da contraflecha nas estruturas de madeira sujeitas à flexão simples



Fonte: Adaptada do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

2.5.2 Verificação das resistências

Para peças submetidas à flexão simples, o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020 especifica, para o Estado Limite Último, quatro verificações: compressão paralela às fibras, tração paralela às fibras, cisalhamento longitudinal e compressão perpendicular às fibras, sendo esta feita nas regiões de apoio das peças. No caso específico de vigas, há ainda a necessidade de verificação da estabilidade lateral, verificação esta que pode ser dispensada para os painéis de MLCC.

2.5.2.1 Verificação da resistência à compressão paralela às fibras

Em conformidade com o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, a verificação da resistência à compressão paralela às fibras da madeira é feita por meio da seguinte inequação:

$$\sigma_{c0,d} = \gamma_f \sigma_{c0,k} \leq f_{c0,d} = k_{mod} \frac{f_{c0,k}}{\gamma_{wc}} \quad (2.374)$$

Em que:

- $\sigma_{c0,d}$ - Valor de cálculo da tensão normal de compressão solicitante na direção paralela às fibras da madeira;
- $\sigma_{c0,k}$ - Valor característico da tensão normal de compressão solicitante na direção paralela às fibras da madeira;
- $f_{c0,d}$ - Valor de cálculo da resistência à compressão na direção paralela às fibras da madeira;

- $f_{c0,k}$ - Valor característico da resistência à compressão na direção paralela às fibras da madeira;
- γ_f - Coeficiente de ponderação das ações para combinações últimas. No presente trabalho, são de interesse apenas as combinações últimas normais (ver subseção 2.5.2.5 adiante), para as quais se emprega $\gamma_f = 1,4$;
- γ_{wc} - Coeficiente de ponderação da resistência à compressão paralela às fibras. A norma aludida anteriormente especifica $\gamma_{wc} = 1,4$.

É importante pontuar que o projeto de revisão da NBR 7190:2020 permitir a adoção de valores menores para o coeficiente de ponderação das ações permanentes γ_g . Entretanto, as ações incidentes sobre a estrutura – permanentes e variáveis – devem ser ponderadas separadamente, considerando a ABNT NBR 8681:2004 e os valores de $\gamma_g = 1,3$ e $\gamma_g = 1,2$ para os elementos estruturais de madeira em geral e para os elementos de madeira industrializados, respectivamente. Dessa maneira, o coeficiente $\gamma_f = 1,4$ é empregado quando todas as ações são ponderadas conjuntamente e é útil quando se deseja um cálculo mais prático.

2.5.2.2 Verificação da resistência à tração paralela às fibras

A resistência à tração paralela às fibras da madeira tem sua verificação feita de forma similar àquela posta para a resistência à compressão paralela às fibras. Dessa forma, tem-se então a desigualdade:

$$\sigma_{t0,d} = \gamma_f \sigma_{t0,k} \leq f_{t0,d} = k_{mod} \frac{f_{t0,k}}{\gamma_{wt}} \quad (2.375)$$

Em que:

- $\sigma_{t0,d}$ - Valor de cálculo da tensão normal de tração solicitante na direção paralela às fibras da madeira;
- $\sigma_{t0,k}$ - Valor característico da tensão normal de tração solicitante na direção paralela às fibras da madeira;
- $f_{t0,d}$ - Valor de cálculo da resistência à tração na direção paralela às fibras da madeira;

- $f_{t0,k}$ - Valor característico da resistência à tração na direção paralela às fibras da madeira;
- γ_{wt} - Coeficiente de ponderação da resistência à tração paralela às fibras, para o qual deve-se adotar $\gamma_{wt} = 1,8$ quando da consideração de combinações últimas normais.

O projeto de revisão da NBR 7190:2020 permite, na ausência de valor específico para a resistência de cálculo da madeira à tração paralela às fibras, adotar $f_{t0,d} = f_{c0,d}$, haja vista que a madeira normalmente apresenta resistência à tração superior a sua resistência à compressão, resultando, portanto, em uma verificação favorável à segurança da peça estrutural avaliada. Se essa abordagem for escolhida, nos elementos estruturais fletidos com eixo neutro na altura do centro de gravidade da seção transversal, basta realizar a verificação da resistência à compressão paralela às fibras, pois $\sigma_{t0,d} = \sigma_{c0,d}$.

2.5.2.3 Verificação do cisalhamento longitudinal

A verificação da resistência ao cisalhamento longitudinal em peças sujeitas à flexão simples, segundo o projeto de revisão da NBR 7190:2020, é feita com base na inequação:

$$\tau_d = \gamma_f \tau_k \leq f_{v0,d} = k_{mod} \frac{f_{v0,k}}{\gamma_{wv}} \quad (2.376)$$

Em que:

- τ_d - Valor de cálculo da tensão de cisalhamento longitudinal solicitante;
- τ_k - Valor característico da tensão de cisalhamento longitudinal solicitante;
- $f_{v0,d}$ - Valor de cálculo da resistência ao cisalhamento longitudinal;
- $f_{v0,k}$ - Valor característico da resistência ao cisalhamento longitudinal;
- γ_{wv} - Coeficiente de ponderação da resistência ao cisalhamento longitudinal, para o qual deve-se tomar $\gamma_{wv} = 1,8$, quando da consideração de combinações últimas normais.

Alternativamente, quando não se dispõe do valor da resistência característica ao cisalhamento, pode-se fazer uso de uma das relações abaixo:

$$f_{v0,d} = 0,12 f_{c0,d} \text{ (para coníferas)} \quad (2.377)$$

$$f_{v0,d} = 0,10 f_{c0,d} \text{ (para folhosas)} \quad (2.378)$$

2.5.2.4 Verificação da resistência à compressão perpendicular às fibras

Em conformidade com o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, a verificação da resistência à compressão paralela às fibras da madeira é feita por meio da seguinte inequação:

$$\sigma_{c90,d} = \gamma_f \sigma_{c90,k} \leq f_{c90,d} = 0,25 f_{c0,d} \alpha_n \quad (2.379)$$

Em que:

- $\sigma_{c90,d}$ - Valor de cálculo da tensão normal de compressão solicitante na direção perpendicular às fibras da madeira;
- $\sigma_{c90,k}$ - Valor característico da tensão normal de compressão solicitante na direção perpendicular às fibras da madeira;
- α_n - Coeficiente que leva em conta a extensão do carregamento normal às fibras e que é medida paralelamente às fibras da madeira. Os valores a serem considerados para α_n estão elencados na Tabela 2.7

Tabela 2.7 – Valores do coeficiente α_n

Extensão (a') do carregamento normal às fibras, medida paralelamente a estas (cm)	Coeficiente α_n
1	2,00
2	1,70
3	1,55
4	1,40
5	1,30
7,5	1,15
10	1,10
15	1,00

Fonte: Projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020

2.5.2.5 Combinação Última Normal

O projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020 determina que os valores de cálculo das tensões normais e de cisalhamento que solicitam as estruturas devem ser aferidos pelas denominadas combinações últimas normais. Tais combinações são definidas como sendo:

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{Gi} F_{Gi,k} + \gamma_Q \left(F_{Q1,k} + \sum_{j=1}^n \psi_{0j} F_{Qj,k} \right) \quad (2.380)$$

Em que:

- $F_{Gi,k}$ - Valor característico das ações permanentes;
- $F_{Q1,k}$ - Valor característico da ação variável tomada como principal;
- $F_{Qj,k}$ - Valor característico das demais ações variáveis;
- ψ_{0j} - Fator de combinação de cada uma das ações variáveis – excluindo a principal – para definir os seus valores reduzidos de cálculo $\psi_{0j} F_{Qj,k}$. Os valores para o fator de combinação ψ_{0j} estão apresentados na Tabela 2.1.

2.6 TRABALHOS CORRELATOS A RESPEITO DA AVALIAÇÃO MECÂNICA DE PAINÉIS DE MLCC

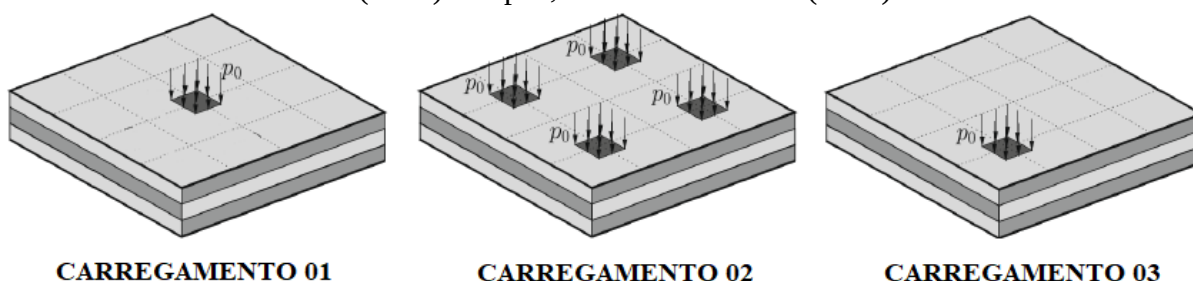
Nesta subseção, são apresentados alguns trabalhos semelhantes que foram desenvolvidos acerca do tema avaliação mecânica de painéis de MLCC, os quais procuraram estudar e avaliar matematicamente as grandezas de interesse à presente pesquisa, nomeadamente: deslocamentos verticais, tensões normais e tensões de cisalhamento.

2.6.1 Czardeski et al. (2007) e Erpen, Benincá e Morsch (2021): análise estrutural de painéis de MLCC sujeitos à flexão simples por carregamento concentrado

2.6.1.1 Estudo de Czardeski et al. (2007)

Czardeski et al. (2007) realizaram um estudo acerca do comportamento estrutural, em regime elástico linear, de painéis de MLCC – em termos de deslocamentos verticais e tensões normais – submetidos à flexão simples por carregamento concentrado. Para esse estudo, os autores se valeram de métodos experimental, analíticos e numéricos. As condições de carregamento consideradas estão ilustradas na Figura 2.36. Nesta figura, notam-se três casos distintos nos quais o carregamento concentrado encontra-se distribuído em pequenas áreas de dimensões de 150 mm x 150 mm: carregamento centrado, carregamento centrado nos quartos dos painéis e carregamento centrado em apenas um quarto dos painéis.

Figura 2.36 – Painéis de MLCC com carregamentos concentrados estudados por Czardeski et al. (2007) e Erpen, Benincá e Morsch (2021)



CARREGAMENTO 01

CARREGAMENTO 02

CARREGAMENTO 03

Fonte: Adaptado de Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) e Czardeski et al. (2007)

A Figura 2.37, por sua vez, ilustra o aparato adotado por Czardeski et al. (2007) para realizar os experimentos, que, posteriormente, foram comparados com resultados analíticos (teoria de vigas de Bernoulli, teoria de vigas de Timoshenko e teoria de placas FSDT) e provenientes da aplicação do Método dos Elementos Finitos com os *softwares* Cedrus (com elementos finitos do tipo *shell*) e Marc-Mentat (com elementos finitos sólidos tridimensionais).

Figura 2.37 – Ensaio dos painéis de MLCC estudados por Czardeski et al. (2007)



Fonte: Czardeski et al. (2007)

Cada um dos métodos anteriormente pontuados, foi aplicado aos painéis de MLCC sintetizados na Tabela 2.8, considerando as condições de carregamento ilustradas na Figura 2.36. Todos os painéis analisados por Czardeski et al. (2007) possuíam dimensões em planta de 2,50m x 2,50m, sendo os seus quatro bordos simplesmente apoiados.

Tabela 2.8 – Características dos painéis de MLCC estudados por Czardeski et al. (2007)

Nº	Carregamento	Espessuras	E ₀	E ₉₀	G _R	Carregamento
		(mm)	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	kN
1	02	10/50/10	11.500	575	70	30
2	02	10/50/10	11.500	575	70	30
3	02	10/50/10	11.500	575	70	30
13	02	10/50/10	12.500	625	80	30
14	02	10/50/10	12.500	625	80	30
15	02	10/50/10	12.500	625	80	30
4	02	25/20/25	10.500	525	65	30
5	02	25/20/25	10.500	525	65	30
6	02	25/20/25	10.500	525	65	30
16	02	25/20/25	12.500	625	80	30
17	02	25/20/25	12.500	625	80	30
18	02	25/20/25	12.500	625	80	30
7	01	10/50/10	11.500	575	70	30
8	01	10/50/10	11.500	575	70	30
9	01	10/50/10	11.500	575	70	30
19	01	10/50/10	12.500	625	80	30
20	01	10/50/10	12.500	625	80	30
21	01	10/50/10	12.500	625	80	30
10	03	10/50/10	10.000	500	60	45
11	03	10/50/10	10.000	500	60	45
12	03	10/50/10	10.000	500	60	45
22	03	10/50/10	12.000	600	75	45
23	03	10/50/10	12.000	600	75	45
24	03	10/50/10	12.000	600	75	45

Fonte: Adaptado de Czardeski et al. (2007)

Para os 24 painéis listados na Tabela 2.8, Czardeski et al. (2007) obtiveram os valores dos máximos deslocamentos verticais e das máximas tensões normais dispostas nas Tabelas 2.9 e 2.10, respectivamente. Os autores consideraram nas análises os seguintes coeficientes de Poisson: $\nu_{12} = 0,02$, $\nu_{23} = 0,3$ e $\nu_{13} = 0,001$.

Tabela 2.9 – Máximos deslocamentos verticais obtidos por Czardeski et al. (2007)

Máximos deslocamentos verticais (mm)							
Nº	Método experimental		Métodos analíticos			Método dos Elementos Finitos	
	Valores individuais	Valores médios	Teoria de vigas de Bernoulli	Teoria de vigas de Timoshenko	Teoria FSDT	Software Cedrus	Software Marc-Mentat
1	33,9	33,8	49,4	50,9	34,1	33,7	33,8
2	33,6						
3	33,8						
13	30,1	30,2	45,4	46,7	31,4	31,1	31,1
14	30,6						
15	29,9						
4	35,2	33,1	35,2	37,2	34,4	33,9	33,6
5	31,2						
6	32,9						
16	28,9	28,6	29,6	31,2	28,9	28,0	28,3
17	28,7						
18	28,1						
7	21,2	20,9	18,0	18,8	20,8	19,5	19,9
8	20,6						
9	20,9						
19	18,3	18,2	16,5	17,3	19,1	17,9	18,3
20	18,3						
21	17,9						
10	16,8	17,2	21,6	22,6	18,7	17,5	17,7
11	16,6						
12	18,1						
22	14,9	15,0	18,0	18,8	15,5	14,6	14,7
23	15,3						
24	14,9						

Fonte: Adaptado de Czardeski et al. (2007)

Tabela 2.10 – Máximas tensões normais obtidas por Czardeski et al. (2007)

Máximas tensões normais (MPa)							
Nº	Método experimental		Métodos analíticos			Método dos Elementos Finitos	
	Valores individuais	Valores médios	Teoria de vigas de Bernoulli	Teoria de vigas de Timoshenko	Teoria FSDT	Software Cedrus	Software Marc-Mentat
1	18,7	27,7	28,9	29,0	20,1	24,2	23,2
2	30,7						
3	24,3						
13	27,5	27,2	28,9	29,0	20,3	24,1	23,2
14	26,9						
15	27,1						
4	27,3	26,8	18,8	19,4	21,3	24,9	26,1
5	24,5						
6	28,5						
16	27,3	28,2	18,8	19,4	21,4	25,1	26,1
17	26,8						
18	30,5						
7	31,1	28,1	14,4	13,1	19,8	24,0	22,8
8	28,6						
9	24,6						
19	24,7	23,4	14,4	13,1	20,0	24,0	22,8
20	24,6						
21	21,1						
10	25,3	25,0	16,3	14,7	23,8	30,2	18,9
11	25,0						
12	24,8						
22	32,8	32,3	16,3	14,7	23,9	30,2	18,9
23	30,5						
24	33,6						

Fonte: Adaptado de Czardeski et al. (2007)

Com base nos resultados elencados nas Tabelas 2.9 e 2.10, Czardeski et al. (2007) não aconselham a utilização das teorias de vigas para realizar a avaliação mecânica dos painéis de MLCC sujeitos à carregamentos concentrados fora do plano, sobretudo para a aferição das tensões normais. Para esses autores, o mais recomendável, para esta situação, é recorrer às teorias de placas ou ao Métodos dos Elementos Finitos.

2.6.1.2 Estudo de Erpen, Benincá e Morsch (2021)

Erpen, Benincá e Morsch (2021) aproveitaram os painéis de MLCC de Czardeski et al. (2007) com espessuras de 10 mm/50 mm/10 mm para avaliar, em regime elástico linear, os resultados fornecidos pelo *software* Ansys Mechanical APDL R19.3, quando da utilização de elementos finitos do tipo *shell* (casca) e do tipo sólidos hexaédricos. Para realizar as modelagens dos painéis, Erpen, Benincá e Morsch (2021) recorreram aos seguintes elementos finitos:

- Elementos finitos (EF) do tipo *shell* (casca) quadriláteros de 4 nós;
- Elementos finitos (EF) do tipo sólidos hexaédricos de 20 nós.

O Quadro 2.15 traz os resultados encontrados pelos autores supracitados para os máximos deslocamentos verticais e para as máximas tensões normais a partir do *software* Ansys Mechanical APDL R19.3 e dos elementos finitos especificados.

Com base nos resultados da Tabela 2.11, Erpen, Benincá e Morsch (2021) concluíram que ambas as modelagens em elementos finitos apresentaram erros relativos similares, em comparação com os resultados experimentais de Czardeski et al. (2007), quando da avaliação dos máximos deslocamentos verticais e, portanto, para fins práticos, ambos podem ser adotados. Todavia, os autores chamam a atenção para a avaliação das tensões normais - geradas por carregamento concentrado - por meio dos elementos finitos do tipo *shell*, pois a sua utilização conduz a subestimativas superiores a 20%.

Tabela 2.11 – Máximas tensões normais obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021)

Nº	Valores experimentais médios obtidos por Czardeski et al. (2007)	Máximo deslocamento vertical (mm)		Máxima tensão normal (MPa)	
		EF do tipo <i>shell</i>	EF do tipo sólidos hexaédricos	EF do tipo <i>shell</i>	EF do tipo sólidos hexaédricos
1	27,7	35,05	34,97	20,94	26,10
2					
3					
13	27,2	32,19	32,13	21,06	26,02
14					
15					
7	26,8	21,27	21,26	20,43	26,10
8					
9					
19	28,2	19,50	19,49	20,56	26,02
20					
21					
10	28,1	19,06	19,03	24,41	32,59
11					
12					
22	23,4	15,81	15,79	24,55	32,47
23					
24					

Fonte: Adaptado de Czardeski et al. (2007)

2.6.2 Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) e Erpen, Benincá e Morsch (2021): análise estrutural de painéis de MLCC sujeitos à flexão simples por carregamento distribuído

2.6.2.1 Estudo de Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)

Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) propuseram realizar – por meio da aplicação de diferentes teorias de placas e da solução exata de Pagano (1970) - uma comparação entre as magnitudes das tensões normais, tensões de cisalhamento e deslocamentos de painéis de MLCC quadrados, em flexão simples, gerados por carregamento distribuído. As teorias de placas escolhidas pelos referidos autores foram as seguintes:

- Teoria clássica de placas (CPT);
- Teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (FSDT);
- Teoria de placas zig-zag de Murakami (*Murakami's Zig-Zag Plate Theory - MZZT*);
- Teoria de placas de Ren (*Ren Plate Theory - RPT*).

De forma geral, as teorias MZZT e RPT consideram para as placas um campo de deslocamentos na forma de zig-zag ao longo de sua altura. A primeira teoria impõe inclinações iguais para todos os trechos em zig-zag, ao passo que a segunda – por ser uma melhoria da primeira – não necessita de tal restrição.

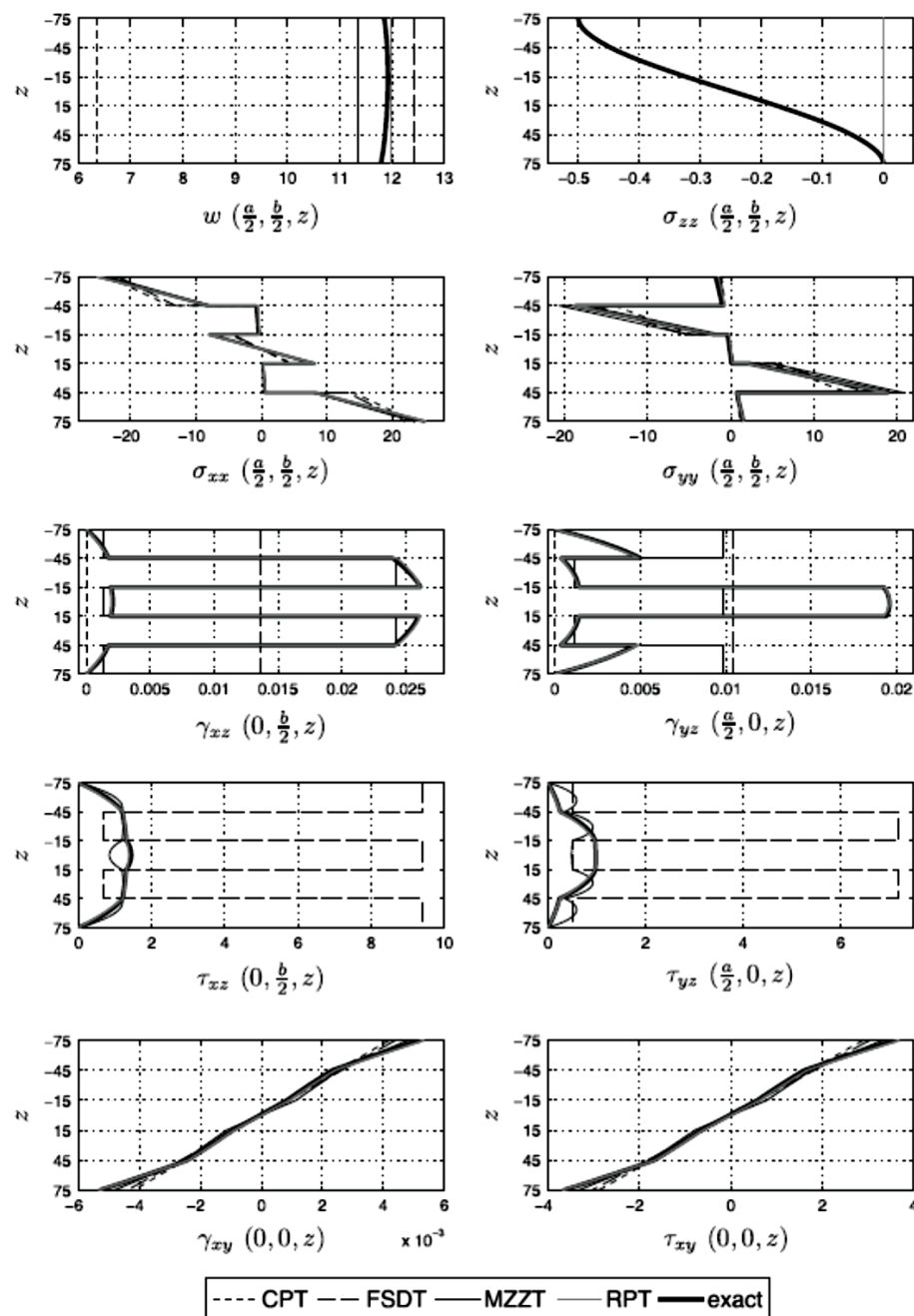
A partir dos cinco métodos elencados, Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) calcularam, em regime elástico-linear, além dos deslocamentos verticais, tensões normais e tensões de cisalhamento, os deslocamentos no plano do painel de MLCC escolhido. Contudo, esses deslocamentos não serão aqui abordados. O painel de MLCC arbitrado pelos autores foi um painel com cinco camadas de lamelas de 30 mm cada, ortogonais entre si e que apresentam as propriedades mecânicas constantes na Tabela 3.1. Em adição, Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) também consideraram as seguintes características para os painéis de MLCC:

- Relação entre espessura e vão igual a 1/10;
- Carregamento bisinusoidal de valor máximo igual a 0,5 N/mm²;

- Painéis com os quatros bordos simplesmente apoiados.

A Figura 2.38 ilustra os resultados obtidos pelos autores para os deslocamentos verticais, tensões normais, deformações de cisalhamento e tensões de cisalhamento. Cada uma dessas grandezas encontra-se apresentada por meio de suas respectivas distribuições ao longo da espessura do painel.

Figura 2.38 – Resultados de Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) para painel de MLCC com carregamento distribuído



Fonte: Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)

A partir das distribuições das grandezas constantes na Figura 2.38, Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) teceram as seguintes conclusões acerca do emprego das teorias de placas, considerando como referencial a solução exata de Pagano (1970):

- Os deslocamentos verticais de todas as teorias de placas resultaram constantes e pouco diferiram entre si, excetuando-se aqueles obtidos com a teoria clássica de placas, sendo esta ocorrência justificada pelo fato da teoria CPT desprezar as deformações devidas ao cisalhamento;
- As tensões normais também diferiram pouco entre si quando da aplicação das diferentes teorias de placas, sendo as maiores diferenças visualizadas nas tensões e deformações de cisalhamento;
- As tensões de cisalhamento não são consideradas pela teoria clássica de placas (mas podem ser computadas pelas equações diferenciais de equilíbrio), são mal avaliadas pela teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem e são bem avaliadas pelas teorias avançadas de placas MZZT e RPT.

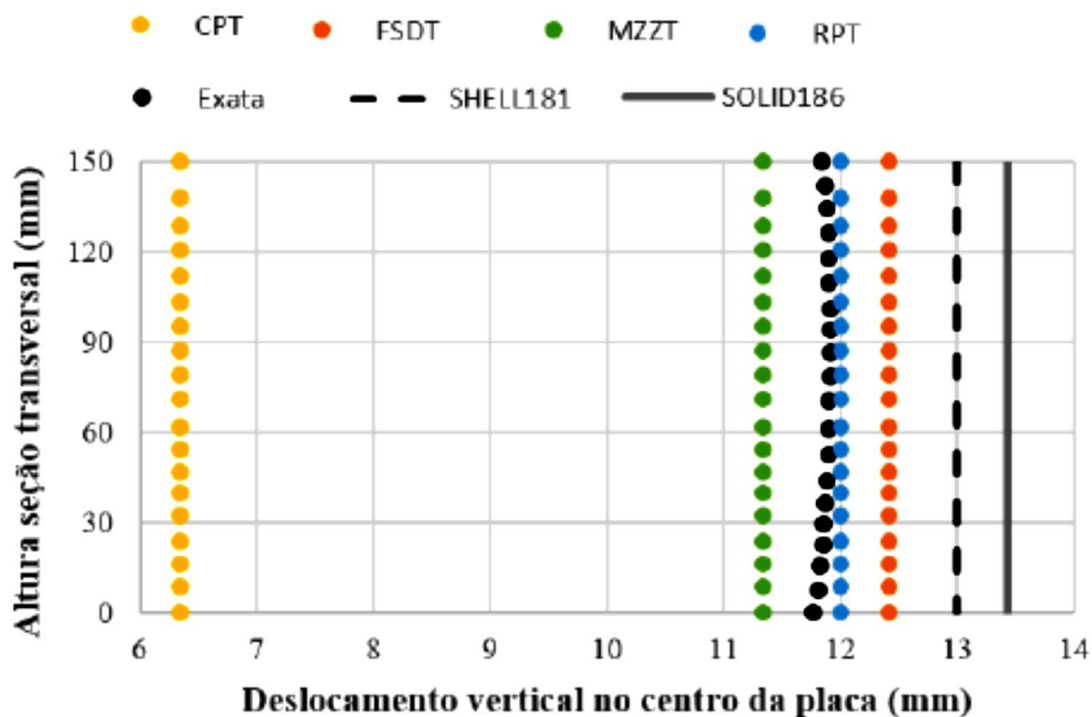
2.6.2.2 Estudo de Erpen, Benincá e Morsch (2021)

Para complementar o estudo de Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010), Erpen, Benincá e Morsch (2021) avaliaram as tensões normais e os deslocamentos verticais nos painéis de MLCC por meio do Método dos Elementos Finitos. O *software* escolhido pelos autores foi o Ansys Mechanical APDL R19.3, no qual foram realizados dois tipos de modelagens:

- Modelagem com elementos finitos (EF) do tipo *shell* (casca) quadriláteros de 4 nós;
- Modelagem com elementos finitos (EF) do tipo sólidos hexaédricos de 20 nós.

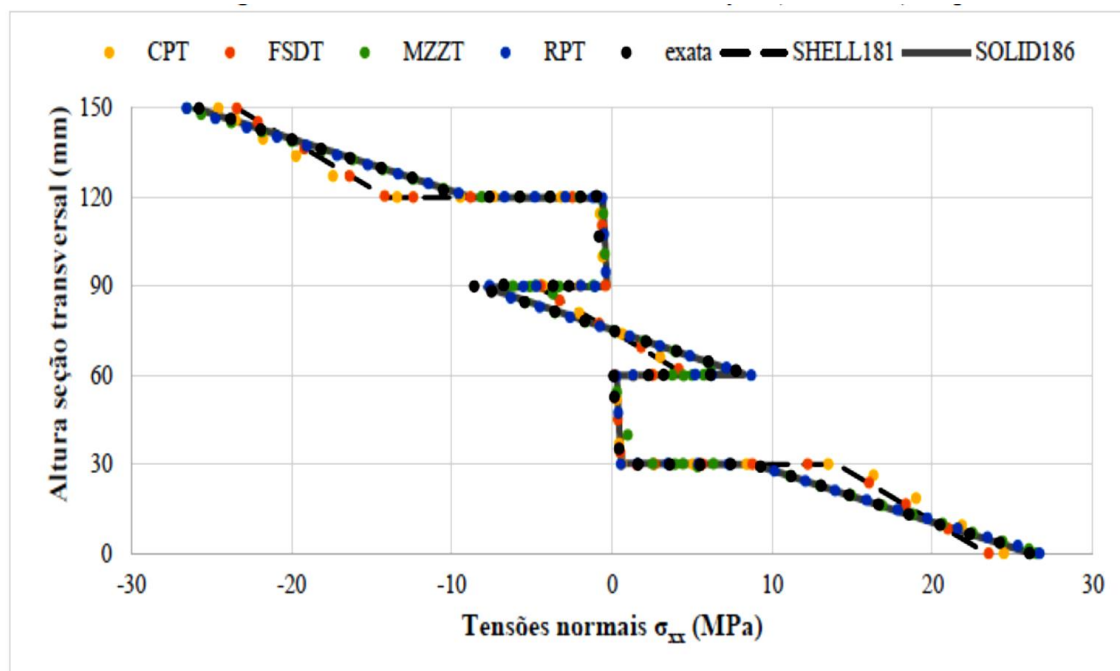
As Figuras 2.39 a 2.42 trazem os resultados alcançados por Erpen, Benincá e Morsch (2021), juntamente com aqueles de Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010) para fins de comparação.

Figura 2.39 – Comparação dos deslocamentos verticais obtidos por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)



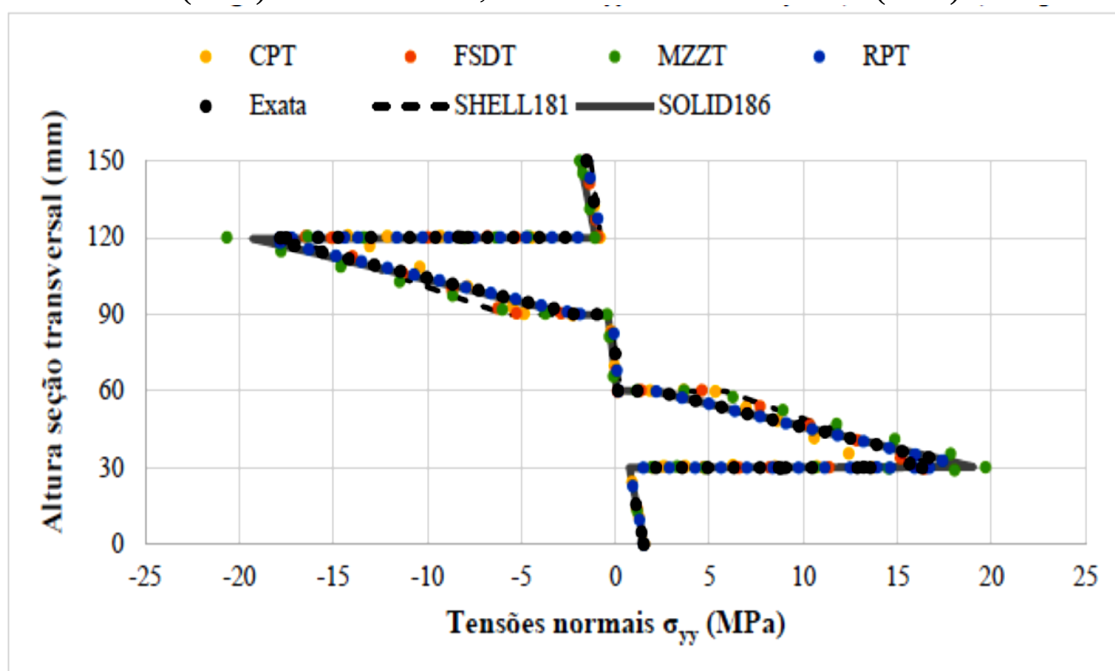
Fonte: Erpen, Benincá e Morsch (2021)

Figura 2.40 – Comparação das tensões normais σ_{xx} obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)



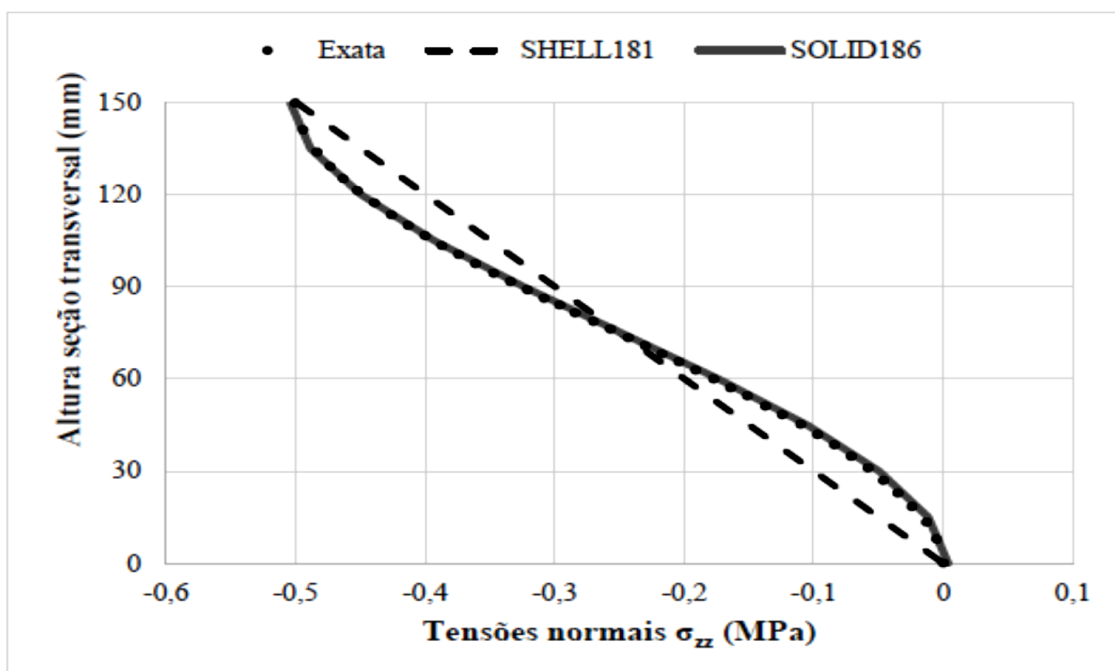
Fonte: Erpen, Benincá e Morsch (2021)

Figura 2.41 – Comparação das tensões normais σ_{yy} obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)



Fonte: Erpen, Benincá e Morsch (2021)

Figura 2.42 – Comparação das tensões normais σ_{zz} obtidas por Erpen, Benincá e Morsch (2021) e Stürzenbecher, Hoffstetter e Eberhardsteiner (2010)



Fonte: Erpen, Benincá e Morsch (2021)

As distribuições das grandezas das Figuras 2.39 a 2.42 permitiram a Erpen, Benincá e Morsch (2021) estabelecer as seguintes conclusões:

- Os deslocamentos verticais, para ambas as modelagens, resultaram levemente superiores àqueles da solução exata de Pagano (1970), sendo a modelagem com elementos finitos sólidos aquela que mais superestimou os referidos deslocamentos;
- As tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} obtidas com os elementos finitos sólidos apresentaram boa correlação com aquelas calculadas pela solução exata, enquanto que as tensões normais obtidas com elementos finitos do tipo *shell* resultaram em torno de 9% inferiores;
- Já para as tensões normais σ_{zz} , ambas as modelagens forneceram valores máximos próximos àqueles da solução exata, porém apenas a modelagem com elementos finitos sólidos foi capaz de fornecer uma distribuição mais realista para essas tensões.

2.6.3 Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015): comparação entre Método Gama, Método Experimental e Método dos Elementos Finitos para painéis de MLCC com carregamento uniformemente distribuído

Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015) realizaram um estudo visando a comparação de três diferentes métodos de análise de painéis de MLCC, sendo eles: Método Gama, Método Experimental e Método dos Elementos Finitos por meio dos *softwares* ANSYSv14 e REFM 5.0. Para tal, os autores ensaiaram dois painéis de MLCC, simplesmente apoiados em dois bordos, com as seguintes características:

- Dimensões: 2,0 m de comprimento, 1,0 m de largura e 1,9 m de vão livre;
- Espessura: 95 mm. Essa dimensão foi obtida por meio de duas camadas externas de lamelas de 25 mm e uma camada central de lamelas de 45 mm;
- Carregamento externo: carregamento uniforme com intensidade de 7,5 kN/m²;
- Adesivo estrutural: poliuretano monocomponente;
- Pressão para conformação dos painéis: 400 kgf/m² ($\approx 0,004$ MPa).

Para os painéis de MLCC descritos, Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015) procuraram determinar três grandezas: a máxima tensão normal, o máximo deslocamento vertical e o

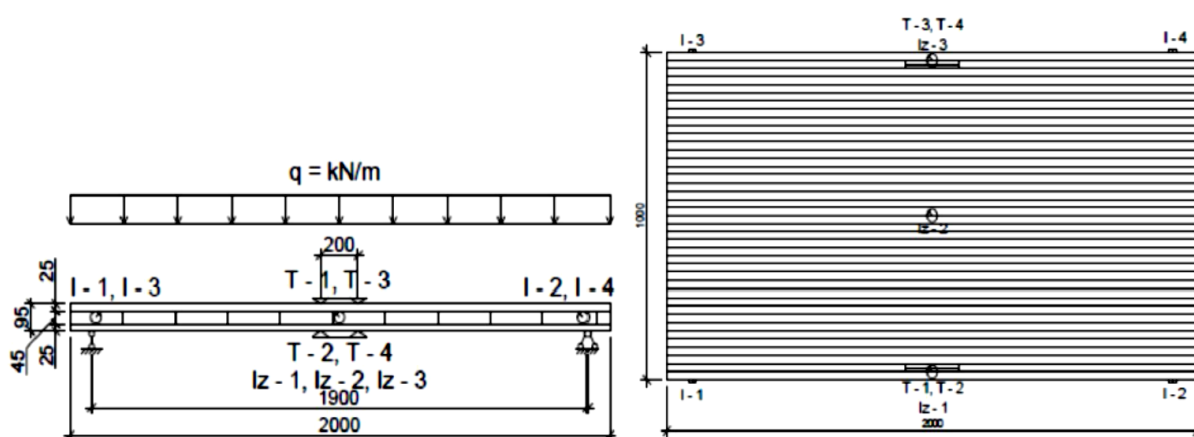
deslocamento horizontal relativo entre as camadas externas e central. Esta última grandeza não será aqui pontuada, haja vista que seu estudo não faz parte do escopo do presente trabalho.

2.6.3.1 Considerações acerca do método experimental de Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)

A Figura 2.43 traz um esquema representativo do aparato experimental empregado por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015). Nesta representação, é possível observar três tipos de dispositivos:

- Extensômetros (*strain gauges*) T-1, T-2, T-3 e T-4: são sensores com capacidade de efetuar a medição das deformações específicas longitudinais dos painéis de MLCC. De posse dessas deformações, determina-se, com o auxílio da Lei de Hooke, a máxima tensão normal;
- Deflectômetros IZ-1, IZ-2 e IZ-3: dispositivos que permitem aferir os deslocamentos verticais apresentados pelos painéis de MLCC;
- Indicadores I-1, I-2, I-3 e I-4: dispositivos empregados para a avaliação dos deslocamentos relativos horizontais entre as camadas externas e interna dos painéis de MLCC.

Figura 2.43 – Representação esquemática do aparato de ensaio de painéis de MLCC empregado por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)



Fonte: Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)

Outro ponto a ser elucidado referente ao método experimental é a forma de aplicação do carregamento uniformemente distribuído. Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015) recorreram

ao emprego de pesos de aço com massa individual de 20 kg. A Figura 2.44 ilustra como foi realizada a disposição desses pesos sobre os painéis de MLCC.

Figura 2.44 – Representação esquemática do aparato de ensaio de painéis de MLCC empregado por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)



Fonte: Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)

2.6.3.2 Resultados obtidos por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)

Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015) apresentaram os resultados obtidos em termos de diferenças percentuais entre os métodos empregados. A Tabela 2.12 reúne os resultados alcançados pelos autores:

Tabela 2.12 – Resultados obtidos por Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)

Métodos comparados	Máximas diferenças percentuais	
	Máxima tensão normal	Máximo deslocamento vertical
Método Gama e Método Experimental	22%	31%
Método Gama e Método dos Elementos Finitos	10%	3%

Fonte: Adaptado de Vilguts, Serdjuks e Pakrastins (2015)

Por fim, os referidos autores pontuaram que a maior discrepância notada entre o Método Gama e o Método Experimental pode ser explicada por deficiências associadas ao processo de

confecção dos painéis de MLCC, sendo elas: pressão de conformação com intensidade baixa e quantidade de adesivo estrutural insuficiente.

2.7 CONCLUSÕES ACERCA DA REVISÃO DE LITERATURA

Da exposição teórica realizada nesta seção, é imediata a conclusão de que a análise estrutural dos painéis de MLCC, para a determinação das tensões normais e de cisalhamento, bem como dos deslocamentos verticais, pode ser realizada por diferentes métodos. Dentre os métodos abordados com maior ênfase, estão as teorias de placas e os métodos unidimensionais simplificados. Também foram pontuados alguns outros trabalhos, semelhantes à presente pesquisa, e que, além das teorias de placas e dos métodos unidimensionais simplificados, fizeram uso do Método dos Elementos Finitos e do Método Experimental.

Acerca da análise estrutural dos painéis de MLCC por meio das teorias de placas, é possível definir um aspecto bastante específico que as difere entre si, sendo esse aspecto o campo de deslocamentos assumido. Dentre as teorias de placas apresentadas, têm-se que os campos de deslocamento atribuídos a elas acabam se diferenciando quanto à forma de se considerar a contribuição das deformações transversais de cisalhamento. De forma geral, pode-se dizer que a teoria clássica de placas despreza a contribuição das deformações transversais de cisalhamento, enquanto que as teorias de deformação de cisalhamento de primeira e de terceira ordem as consideram, sendo que a primeira assume-as com distribuição constante ao longo da altura do painel e a última com variação quadrática. É justamente com base no campo de deslocamentos arbitrado que uma determinada teoria de placas apresenta-se mais ou menos realista, haja vista que as expressões matemáticas empregadas para a descrição desses campos podem descrever de forma mais ou menos rigorosa o comportamento real dos painéis de MLCC sujeitos à flexão simples.

Por sua vez, os métodos unidimensionais, os quais reduzem um problema originalmente tridimensional a um problema unidimensional, também diferem entre si quanto à consideração ou não das deformações transversais por cisalhamento. Em linhas gerais, pode-se pontuar que o Método Gama, tanto quanto o Método κ , desprezam as deformações transversais devidas ao cisalhamento, porém o primeiro leva em conta, no cálculo das tensões, o módulo de elasticidade transversal *rolling shear*, enquanto que o último apenas se vale dos módulos de elasticidade. Dentre os métodos unidimensionais, aquele que melhor modela o problema dos painéis de MLCC, ainda que de forma unidimensional, é o Método de Analogia ao

Cisalhamento, haja vista que o mesmo considera a contribuição do cisalhamento no cálculo das tensões e dos deslocamentos verticais.

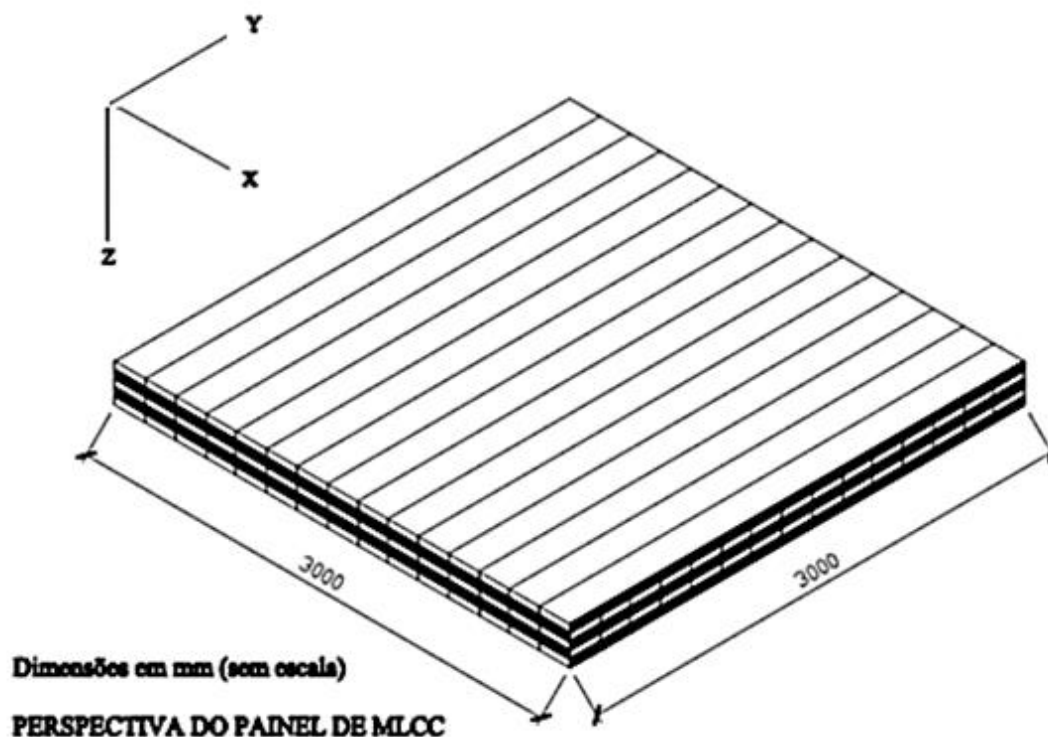
Por fim, foram abordados também os critérios prescritos pelo projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020 para a verificação dos Estados Limites Último e de Serviço em peças de madeira sujeitas à flexão simples. Todos os critérios pontuados servem para atestar a viabilidade de emprego dos painéis de MLCC que foram submetidos à análise estrutural, completando assim o seu estudo.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

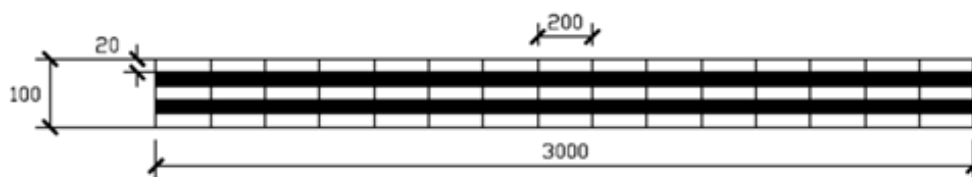
O presente trabalho constitui uma pesquisa de caráter descritivo e, para a sua realização, algumas etapas foram necessárias, sendo elas:

- Elaboração de revisão bibliográfica a respeito do produto madeira lamelada colada cruzada (MLCC) e das teorias de placas e métodos analíticos unidimensionais que podem ser aplicados para a determinação dos deslocamentos verticais e das tensões, normais e de cisalhamento, em painéis do referido produto, a qual foi apresentada na seção 2;
- Definição do painel de MLCC que foi utilizado como referência para análises paramétricas e comparações, especificando para o elemento: propriedades do material, geometria, condições de contorno e carregamento atuante. As Figuras 3.1 e 3.2 ilustram a geometria do referido painel de MLCC, o qual foi considerado como simplesmente apoiado ao longo dos seus quatro bordos e submetido a um carregamento transversal uniformemente distribuído q_0 ;

Figura 3.1 – Painel de MLCC de referência – perspectiva

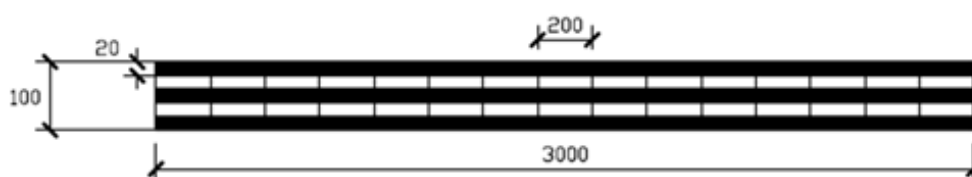


Fonte: O Autor

Figura 3.2 – Painel de MLCC de referência – seções transversais

Dimensões em mm (sem escala)

SEÇÃO PARALELA AO EIXO X



Dimensões em mm (sem escala)

SEÇÃO PERPENDICULAR AO EIXO X

Fonte: O Autor

A Tabela 3.1, por sua vez, reúne as propriedades mecânicas que foram consideradas para os painéis de MLCC. Essas propriedades foram extraídas de Albostami, Wu e Cunningham (2017), os quais tomaram por referência os valores da norma BS EN 338:2003 referentes a uma madeira *softwood* de classe C24 e massa específica aparente de 420 kg/m³.

Tabela 3.1 – Propriedades mecânicas consideradas para as lamelas dos painéis de MLCC

Propriedade mecânica	Magnitude
Módulo de elasticidade E_1	11.000 N/mm ²
Módulo de elasticidade E_2	370 N/mm ²
Módulo de elasticidade E_3	370 N/mm ²
Módulo de elasticidade transversal G_{12}	690 N/mm ²
Módulo de elasticidade transversal G_{13}	690 N/mm ²
Módulo de elasticidade transversal G_{23}	50 N/mm ²
Coeficiente de Poisson ν_{12}	0,44
Coeficiente de Poisson ν_{13}	0,44
Coeficiente de Poisson ν_{23}	0,64

Fonte: O Autor

- c) Definição do carregamento transversal uniformemente distribuído q_0 aplicado ao painel de MLCC proposto. Para o painel ilustrado nas Figuras 3.1 e 3.2, foi considerado, para o peso específico das lamelas de madeira, um valor de $4,20 \text{ kN/m}^3$, por razão da massa específica aparente dessas lamelas ser de 420 kg/m^3 . Ademais, foram consideradas uma ação proveniente de um revestimento no valor $1,20 \text{ kN/m}^2$ e uma ação accidental devido ao uso da edificação de $3,00 \text{ kN/m}^2$, sendo este valor retirado da ABNT NBR 6120:2019 e que corresponde a áreas de uso comum de edificações residenciais. Dessa forma, o carregamento transversal uniformemente distribuído q_0 , em valor característico, resulta em: $q_0 = (4,20 \text{ kN/m}^3)(0,10 \text{ m}) + 1,20 \text{ kN/m}^2 + 3,00 \text{ kN/m}^2 \approx 5,00 \text{ kN/m}^2$;
- d) Definição das teorias de placas que foram utilizadas para avaliar o comportamento estrutural dos painéis de MLCC. Para a avaliação dos deslocamentos verticais e das tensões, normais e de cisalhamento, foram utilizadas as seguintes teorias de placas: teoria clássica de placas (ou *classical plate theory – CPT*), teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (ou *first order shear deformation theory - FSDT*) e teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem (ou *third order shear deformation theory - TSDT*). A escolha pelas referidas foi, sobretudo, motivada pelo fato de as mesmas serem as mais abordadas pelas referências de Mecânica Aplicada.
- e) Definição dos métodos analíticos unidimensionais que serão utilizados para realizar comparações com os resultados obtidos pelas teorias de placas. Para efetuar essas comparações, recorreu-se aos seguintes métodos unidimensionais: Método Gama (ou *Mechanically Jointed Beams Theory*), Método κ (ou *Composite Theory*) e Método de Analogia ao Cisalhamento (ou *Shear Analogy Method*). Todos os métodos unidimensionais escolhidos são aqueles mais comumente indicados pelas referências de MLCC para seu dimensionamento.
- f) Análise do painel de MLCC de referência por meio das teorias de placas escolhidas. Com a definição das propriedades geométricas e mecânicas do painel de MLCC de referência, bem como das teorias de placas, procedeu-se com os cálculos, por meio de planilhas eletrônicas desenvolvidas no *software* Excel, dos deslocamentos verticais e das tensões, normais e de cisalhamento, no referido painel. As planilhas estão reproduzidas na seção relativa aos Apêndices, com destaque aos campos que devem ser preenchidos para a obtenção das grandezas de interesse;

- g) Análise do painel de MLCC de referência por meio dos métodos analíticos unidimensionais. Nesta etapa, foram realizados os cálculos dos deslocamentos verticais e das tensões, normais e de cisalhamento, produzidos no painel sob análise por meio dos métodos unidimensionais definidos no item d;
- h) Investigação da hipótese de adaptação da Teoria de Rankine-Grasshoff (ou Teoria de Grelhas) ao cálculo das tensões em painéis de MLCC, incluindo o equacionamento, cálculo das tensões e cálculo de flechas;
- i) Análise numérica do painel de MLCC de referência por meio do *software* de Elementos Finitos ADINA. As modelagens foram realizadas utilizando-se elementos finitos do tipo *shell* (casca) quadriláteros e de 4 nós. A escolha por esses elementos foi motivada pelo trabalho de Erpen, Benincá e Morsch (2021), o qual fez uso de tais elementos e forneceu bons resultados, conforme fora pontuado na subseção 2.6.2.2;
- j) Realização de estudos paramétricos para avaliar a sensibilidade do painel de MLCC de referência frente à variação de dois parâmetros, sendo eles: a razão entre a maior dimensão em planta (b) e a menor dimensão em planta (a) e a razão entre a espessura total (h) do painel e seu lado (b). Para a avaliação paramétrica da razão b/a, optou-se pela consideração de três valores distintos, sendo eles: $b/a = 3.000 \text{ mm} / 3.000 \text{ mm} = 1$, $b/a = 4.500 \text{ mm} / 3.000 \text{ mm} = 1,5$ e $b/a = 6.000 \text{ mm} / 3.000 \text{ mm} = 2$. Já para a avaliação paramétrica da razão h/b, os seguintes valores foram propostos: $h/b = 100 \text{ mm} / 3.000 \text{ mm} = 1/30$, $h/b = 150 \text{ mm} / 3.000 \text{ mm} = 1/20$ e $h/b = 200 \text{ mm} / 3.000 \text{ mm} = 1/15$;
- k) Análise e comparação dos deslocamentos verticais máximos e das tensões, normais e cisalhantes, obtidos pelas teorias de placas com aquelas calculadas pelos métodos analíticos unidimensionais, pelo método analítico proposto, bem como com os resultados fornecidos pelo *software* de Elementos Finitos ADINA;
- l) Verificação dos Estados Limites Último e de Serviço considerando os critérios do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020. Para a aplicação dos critérios desta norma, foi necessário definir o local onde a estrutura de madeira será empregada e, para fins de cálculo, foi considerado um local com temperaturas médias inferiores a 38°C e umidade relativa média entre 65% e 75%.

Por fim, faz-se necessária uma consideração acerca da escassez de artigos científicos publicados a respeito da temática sob investigação neste trabalho. Para fins de ilustração de tal carência, são expostos os resultados de algumas pesquisas realizadas em uma das principais bibliotecas virtuais nacional, o Portal de Periódicos CAPES/MEC.

A princípio, ao se realizar uma busca de caráter mais geral por meio da introdução do termo *cross laminated timber*, uma número considerável de publicações foi apresentado, tal como ilustra a Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Publicações para o termo de busca *cross laminated timber*

Periódico	Número de publicações
Scopus (Elsevier)	2.015
Science Citation Index Expanded (Web of Science)	1.865
Materials Science & Engineering Database	1.672
OneFile (GALE)	1.539
Technology Research Database	1.213
Engineering Research Database	919
Civil Engineering Abstracts	777
Materials Research Database	592
Engineering Materials Abstracts	544
Springer Link	526
ScienceDirect (Elsevier)	466
Directory of Open Access Journal (DOAJ)	390
METADEX	271
AGRIS (United Nations, Food and Agriculture Organization)	238
Advanced Technology & Aerospace Database	232
ANTE: Abstracts in New Technology & Engineering	181
Taylor & Francis Online - Journals	170
ASCE Library (American Society of Civil Engineers)	90
American Society of Civil Engineers (CroosRef)	73
Wiley Online Library	47

Fonte: O Autor

Contudo, ao se analisar com cautela os trabalhos disponibilizados, nota-se que a maioria deles aborda problemas de caráter experimental e cujo objetivo é a determinação de propriedades mecânicas de painéis de MLCC, tema que não é de interesse ao presente trabalho. Há ainda várias outras pesquisas que visam o estudo de tópicos como: desempenho de painéis de MLCC em condições de incêndio, em condições de sismos, problemas de vibração, problemas de desempenho acústico e também problemas de instabilidade.

Quando uma busca mais específica é realizada no mesmo portal de periódicos, utilizando-se o termo *plate theories for cross laminated timber* uma menor quantidade de resultados foi relacionada, conforme ilustra a Tabela 3.3.

Tabela 3.3 – Publicações para o termo de busca *plate theories for cross laminated timber*

Periódico	Número de publicações
Scopus (Elsevier)	292
Science Citation Index Expanded (Web of Science)	270
Materials Science & Engineering Database	209
OneFile (GALE)	199
Technology Research Database	159
Engineering Research Database	112
Civil Engineering Abstracts	98
Materials Research Database	75
Engineered Materials Abstracts	70
Springer Link	82
ScienceDirect (Elsevier)	72
Directory of Open Access Journal (DOAJ)	61
METADEX	25
AGRIS (United Nations, Food and Agriculture Organization)	26
Advanced Technology & Aerospace Database	34
ANTE: Abstracts in New Technology & Engineering	13
Taylor & Francis Online - Journals	16
ASFA: Aquatic Science and Fisheries Abstracts	16
PMC (PubMed Central)	12
Computer and Information Systems Abstracts	11

Fonte: O Autor

Alguns artigos sobre o tema pesquisado foram de fato encontrados. Todavia, por ser o artigo um gênero textual de caráter mais enxuto, aqueles que abordam o tema em questão acabam por fazê-lo de forma a não apresentar de forma suficiente as formulações envolvidas nas teorias de placas utilizadas, criando assim um empecilho ao seu emprego como referência.

Em complemento, é importante pontuar que pesquisas realizadas com termos de busca em português, tais como madeira laminada colocada cruzada, madeira laminada cruzada e madeira lamelada colocada cruzada, praticamente não conduzem a resultados. Embora sejam encontrados trabalhos com os termos “laminada” e “lamelada”, tem-se dado preferência ao uso da última grafia.

Em consequência da falta de publicações dedicadas ao estudo de teorias de placas aplicadas aos painéis de MLCC ou de publicações que abordem este tema de forma suficientemente compreensível, optou-se, no presente trabalho, por utilizar, como fontes principais, referências mais consolidadas acerca do tema, sobretudo livros de Mecânica Aplicada.

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, estão reunidos os resultados obtidos para os deslocamentos verticais e para as tensões, normais e de cisalhamento, do painel de MLCC ilustrado nas Figuras 3.1 e 3.2, bem como os resultados referentes aos estudos de variações paramétricas propostos. Mais precisamente, os resultados alcançados com a aplicação das teorias de placas e dos métodos analíticos unidimensionais encontram-se nas subseções 4.1 e 4.2, respectivamente. Na subseção 4.3, foi feita a apresentação da proposta de cálculo dos painéis de MLCC por meio da adaptação da Teoria de Rankine-Grasshoff. A subseção 4.4, por sua vez, reúne os cálculos e os resultados obtidos com a aplicação da proposta abordada na seção anterior. Na subseção 4.5, estão dispostas as modelagens dos painéis de MLCC, em elementos finitos, feitas com o auxílio do *software* ADINA. Por fim, as subseções 4.6 e 4.7 se ocupam de fazer comparações simultâneas de todos os valores críticos das grandezas de interesse à análise estrutural dos painéis de MLCC e avaliações dos Estados Limites Último e de Serviço para esses painéis, respectivamente.

4.1 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DA APLICAÇÃO DAS TEORIAS DE PLACAS

Apresentam-se, nesta subseção, as análises estruturais do painel de MLCC proposto, bem como de suas variações paramétricas, por meio das teorias de placas expostas na Revisão de Literatura. As análises estruturais contemplam os deslocamentos verticais e as tensões, normais e de cisalhamento, desenvolvidas nos painéis de MLCC descritos na seção 3.

4.1.1 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação da teoria clássica de placas (CPT)

4.1.1.1 CPT: cálculo dos coeficientes Q_{ij} , $\bar{Q}_{ij}$ e D_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Para que seja possível efetuar a análise estrutural do painel de MLCC proposto por meio da teoria clássica de placas, é necessário, *a priori*, efetuar a determinação dos coeficientes Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} e Q_{66} , dos coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$ e das rigidezes flexionais do painel D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} .

Primeiramente, deve-se recorrer às Equações (2.103), (2.97), (2.98), (2.99) e (2.100) e às propriedades mecânicas das lamelas de madeira constantes na Tabela 3.1 para o cômputo dos coeficientes Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} e Q_{66} . Dessa forma, obtém-se:

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12} = \frac{370}{11.000} \cdot 0,44 = 0,0148 \quad (4.1)$$

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{11.000}{1 - 0,44 \cdot 0,0148} \cong 11.072,102 \text{ N/mm}^2 \quad (4.2)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{0,44 \cdot 370}{1 - 0,44 \cdot 0,0148} \cong 163,867 \text{ N/mm}^2 \quad (4.3)$$

$$Q_{22} = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \nu_{21}} = \frac{370}{1 - 0,44 \cdot 0,0148} \cong 372,425 \text{ N/mm}^2 \quad (4.4)$$

$$Q_{66} = G_{12} = 690 \text{ N/mm}^2 \quad (4.5)$$

De posse dos valores anteriores, é possível calcular os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$ pela aplicação das Equações (2.88) a (2.90) e (2.93). Os valores assumidos por esses coeficientes dependem da orientação θ das lamelas de madeira. Assim, para as lamelas com orientação $\theta = 0^\circ$, tem-se $\cos(\theta) = \cos(0^\circ) = 1$, $\sin(\theta) = \sin(0^\circ) = 0$ e, por conseguinte:

$$\bar{Q}_{11}(0^\circ) = Q_{11} \cong 11.072,102 \text{ N/mm}^2 \quad (4.6)$$

$$\bar{Q}_{12}(0^\circ) = Q_{12} \cong 163,867 \text{ N/mm}^2 \quad (4.7)$$

$$\bar{Q}_{22}(0^\circ) = Q_{22} \cong 372,425 \text{ N/mm}^2 \quad (4.8)$$

$$\bar{Q}_{66}(0^\circ) = Q_{66} = 690 \text{ N/mm}^2 \quad (4.9)$$

Já para as lamelas com orientação $\theta = 90^\circ$, tem-se $\cos(\theta) = \cos(90^\circ) = 0$, $\sin(\theta) = \sin(90^\circ) = 1$ e, portanto:

$$\bar{Q}_{11}(90^\circ) = Q_{22} \cong 372,425 \text{ N/mm}^2 \quad (4.10)$$

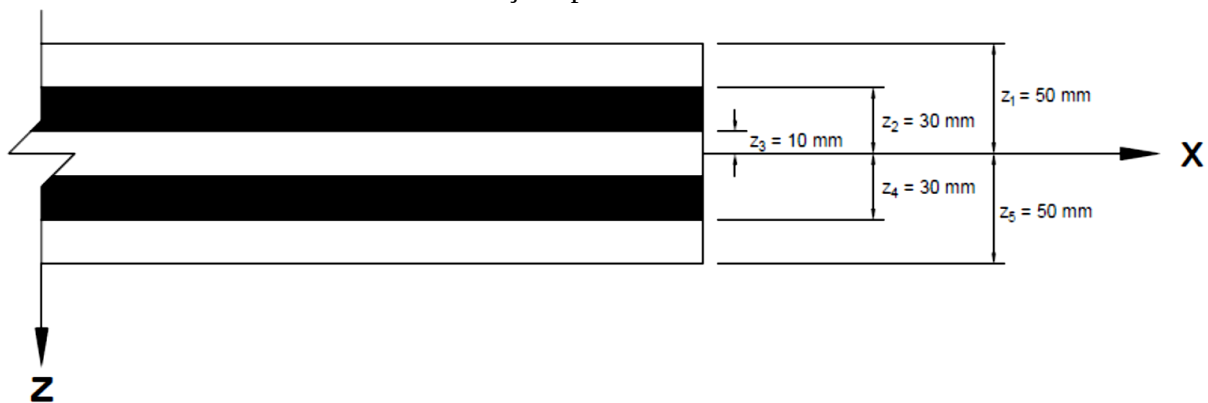
$$\bar{Q}_{12}(90^\circ) = Q_{12} \cong 163,867 \text{ N/mm}^2 \quad (4.11)$$

$$\bar{Q}_{22}(90^\circ) = Q_{11} \cong 11.072,102 \text{ N/mm}^2 \quad (4.12)$$

$$\bar{Q}_{66}(90^\circ) = Q_{66} = 690 \text{ N/mm}^2 \quad (4.13)$$

Finalmente, podem ser computadas as rigidezes flexionais do painel de MLCC de referência e de suas variações paramétricas b/a por meio do emprego da equação (2.113) e com o auxílio da Figura 4.1.

Figura 4.1 – Cotas z para o cômputo das rigidezes à flexão do painel de MLCC de referência e de suas variações paramétricas da razão b/a



Fonte: O Autor

Com base nas Figura 4.1, é possível reescrever a Equação (2.113) da seguinte forma:

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \left[2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) (z_1^3 - z_2^3) + 2 \bar{Q}_{ij}(90^\circ) (z_2^3 - z_3^3) + 2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) z_3^3 \right] \quad (4.14)$$

A Tabela 4.1 reúne as magnitudes das rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} , calculadas a partir da Equação (4.14), para os painéis de MLCC com razões b/a iguais a 1,0, 1,5 e 2,0.

Neste caso, faz-se importante enfatizar que as rigidezes flexionais de um dado painel de MLCC não se alteram quando da variação das suas dimensões em planta, uma vez que os coeficientes D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} são dependentes apenas das propriedades mecânicas das lamelas de madeira e das suas respectivas espessuras.

Tabela 4.1 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

i	j	$(z_1^3 - z_2^3)$	$(z_2^3 - z_3^3)$	z_3^3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	D_{ij}
		(mm ³)	(mm ³)	(mm ³)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N·mm)
1	1	98.000	26.000	1.000	11.072,102	372,425	$7,372 \cdot 10^8$
1	2	98.000	26.000	1.000	163,867	163,867	$1,366 \cdot 10^7$
2	2	98.000	26.000	1.000	372,425	11.072,102	$2,165 \cdot 10^8$
6	6	98.000	26.000	1.000	690	690	$5,750 \cdot 10^7$

Fonte: O Autor

4.1.1.2 CPT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} no plano do painel de MLCC de referência e de suas variações paramétricas da razão b/a

Antes do início dos cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} nos planos dos painéis de MLCC, faz-se necessário definir os pontos (x,y) onde as referidas grandezas assumem os seus valores críticos. Esses valores encontram-se reunidos, para cada razão b/a , na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Pontos (x,y) críticos para os cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} nos planos dos painéis de MLCC

Grandeza	Pontos críticos nos planos dos painéis de MLCC							
	x (mm)	Razão b/a			y (mm)	Razão b/a		
		1,0	1,5	2,0		1,0	1,5	2,0
Deslocamento vertical w_0	$x = a/2$	1.500	1.500	1.500	$y = b/2$	1.500	2.250	3.000
Tensão normal σ_{xx}	$x = a/2$	1.500	1.500	1.500	$y = b/2$	1.500	2.250	3.000
Tensão normal σ_{yy}	$x = a/2$	1.500	1.500	1.500	$y = b/2$	1.500	2.250	3.000
Tensão de cisalhamento τ_{xy}	$x = a$	3.000	3.000	3.000	$y = b$	3.000	4.500	6.000

Fonte: O Autor

Ademais, duas considerações precedentes aos cálculos fazem-se importantes, sendo elas:

- a) O cômputo dos deslocamentos verticais máximos, bem como das tensões normais e de cisalhamento, será feito considerando, nas equações dessas grandezas, os seguintes valores de m e n: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19, conforme recomendação de Reddy (2007). Portanto, a determinação das flechas e das tensões é conseguida por meio de duplos somatórios com 100 termos cada. É importante enfatizar que o cômputo das grandezas mencionadas é dependente da cota z avaliada do painel e, por conseguinte, para cada uma dessas cotas z, haverá 100 termos a serem considerados para cada duplo somatório. Torna-se então evidente que o processo de determinação dos deslocamentos verticais e das tensões, ao longo da altura dos painéis de MLCC, necessita de ser feito com auxílio computacional. No presente trabalho, optou-se pelo desenvolvimento de planilhas eletrônicas no *software* Excel, as quais encontram-se reproduzidas na seção referente aos Apêndices A, B e C;
- b) Especificamente para os cálculos das tensões, têm-se que os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$ devem ser escolhidos de forma coerente com a orientação θ da camada de lamelas de madeira cuja cota z está sendo avaliada. Dessa maneira, para as cotas z situadas em camadas de lamelas de madeira com orientação $\theta = 0^\circ$, utilizam-se os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$ dados em (4.6) a (4.9). Caso a cota z de interesse esteja em uma camada de lamelas com orientação $\theta = 90^\circ$, os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$ ficam definidos por (4.10) a (4.13).

De posse do carregamento transversal uniformemente distribuído q_0 , das rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} , dos coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$, dos pontos críticos (x,y) e das duas considerações anteriores, pode-se então proceder com os cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} nos planos dos painéis de MLCC.

Apenas para fins de praticidade, serão retomadas as equações a serem utilizadas na determinação das grandezas supracitadas, indicando agora os valores de m e n a serem considerados nos cálculos. Essas expressões são:

- a) Equação para o cômputo dos deslocamentos verticais w_0 :

$$w_0 = \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.15)$$

Em que:

$$W_{mn} = \frac{q_{mn}}{d_{mn}} \quad (4.16)$$

$$q_{mn} = \frac{16q_0}{mn\pi^2} \quad (4.17)$$

$$d_{mn} = \frac{\pi^4}{b^4} [D_{11} m^4 s^4 + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) m^2 s^2 + D_{22} n^4] \quad (4.18)$$

$$s = \frac{b}{a} \quad (4.19)$$

b) Equação para o cômputo das tensões normais σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = z \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (s^2 m^2 \bar{Q}_{11} + n^2 \bar{Q}_{12}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.20)$$

c) Equação para o cômputo das tensões normais σ_{yy} :

$$\sigma_{yy} = z \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (s^2 m^2 \bar{Q}_{12} + n^2 \bar{Q}_{22}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.21)$$

d) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = z \frac{\pi^2}{b^2} \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} -2mn \bar{Q}_{66} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \quad (4.22)$$

Por meio do procedimento de cálculo descrito anteriormente, pode-se chegar aos resultados sintetizados nas Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5. Para essas tabelas, é importante notar que, para as cotas $z = -30$ mm, $z = -10$ mm, $z = 10$ mm e $z = 30$ mm, os cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} e τ_{xy} foram realizados para as orientações $\theta = 0^\circ$ e $\theta = 90^\circ$. Esse procedimento é necessário, pois as cotas referidas estão situadas em interfaces de camadas de lamelas de madeira adjacentes.

Tabela 4.3 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	5,437	-3,223	-0,144	0,474
0	-30	5,437	-1,934	-0,087	0,284
90	-30	5,437	-0,090	-1,762	0,284
90	-10	5,437	-0,030	-0,587	0,095
0	-10	5,437	-0,645	-0,029	0,095
0	0	5,437	0,000	0,000	0,000
0	10	5,437	0,645	0,029	-0,095
90	10	5,437	0,030	0,587	-0,095
90	30	5,437	0,090	1,762	-0,284
0	30	5,437	1,934	0,087	-0,284
0	50	5,437	3,223	0,144	-0,474

Fonte: O Autor

Tabela 4.4 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	7,117	-4,220	-0,103	0,484
0	-30	7,117	-2,532	-0,062	0,291
90	-30	7,117	-0,096	-0,762	0,291
90	-10	7,117	-0,032	-0,254	0,097
0	-10	7,117	-0,844	-0,021	0,097
0	0	7,117	0,000	0,000	0,000
0	10	7,117	0,844	0,021	-0,097
90	10	7,117	0,032	0,254	-0,097
90	30	7,117	0,096	0,762	-0,291
0	30	7,117	2,532	0,062	-0,291
0	50	7,117	4,220	0,103	-0,484

Fonte: O Autor

Tabela 4.5 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$

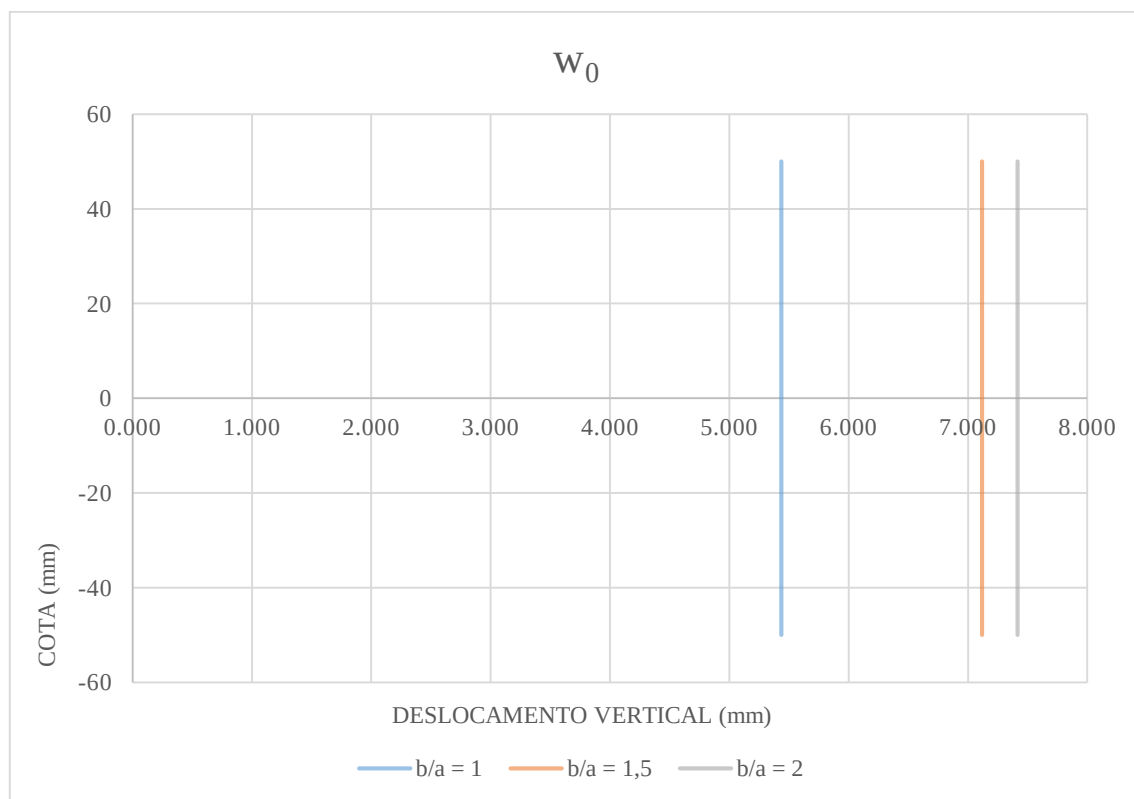
θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	7,415	-4,387	-0,076	0,476
0	-30	7,415	-2,632	-0,045	0,286
90	-30	7,415	-0,091	-0,230	0,286
90	-10	7,415	-0,030	-0,077	0,095
0	-10	7,415	-0,877	-0,015	0,095
0	0	7,415	0,000	0,000	0,000
0	10	7,415	0,877	0,015	-0,095
90	10	7,415	0,030	0,077	-0,095
90	30	7,415	0,091	0,230	-0,286
0	30	7,415	2,632	0,045	-0,286
0	50	7,415	4,387	0,076	-0,476

Fonte: O Autor

Com base nos valores reunidos nas Tabelas 4.3, 4.4 e 4.5, foram elaborados os diagramas de distribuição dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} , das tensões normais σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , os quais se encontram ilustrados nas Figuras 4.2, 4.3, 4.4 e 4.5, respectivamente.

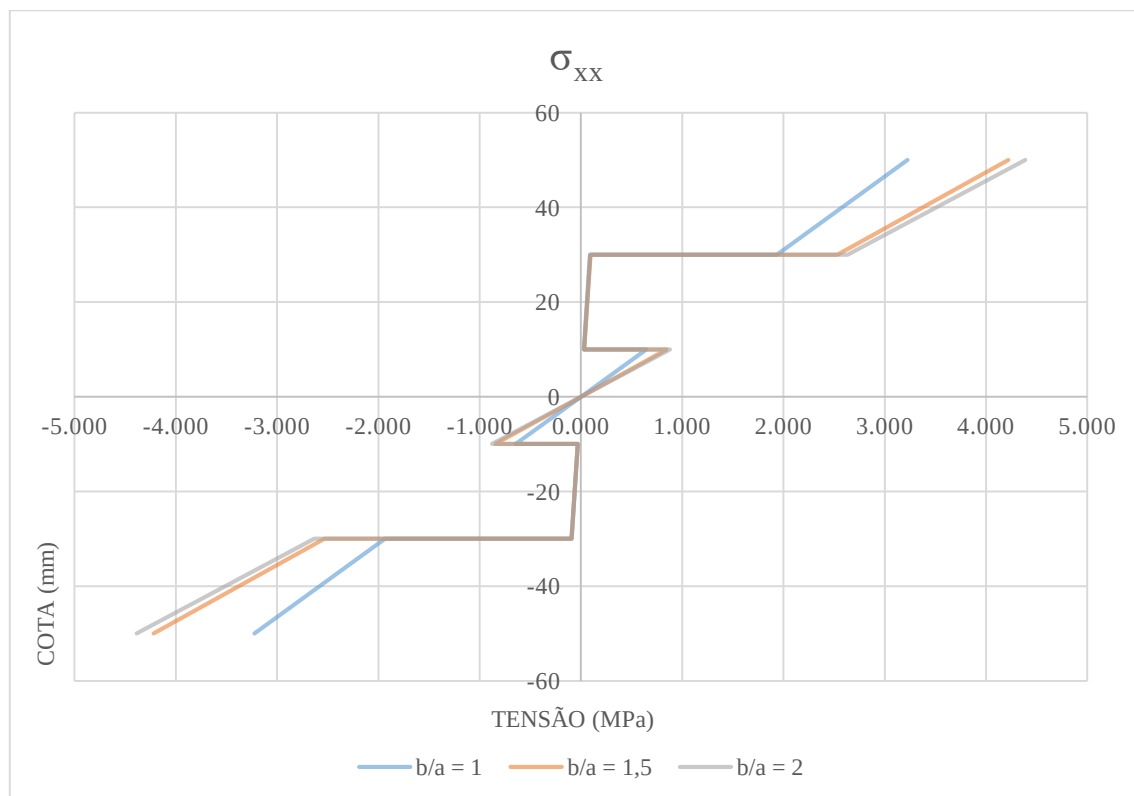
Em complemento, é importante pontuar que, nas figuras supracitadas, as cotas z negativas são aquelas relativas às fibras do painel situadas acima do eixo neutro e as cotas z positivas, por sua vez, são aquelas referentes às fibras localizadas abaixo desse eixo. Essa consideração está em conformidade com o sistema de eixos coordenados adotado para as teorias de placas, o qual considera o sentido positivo do eixo z como sendo orientado para baixo.

Figura 4.2 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para os deslocamentos verticais w_0



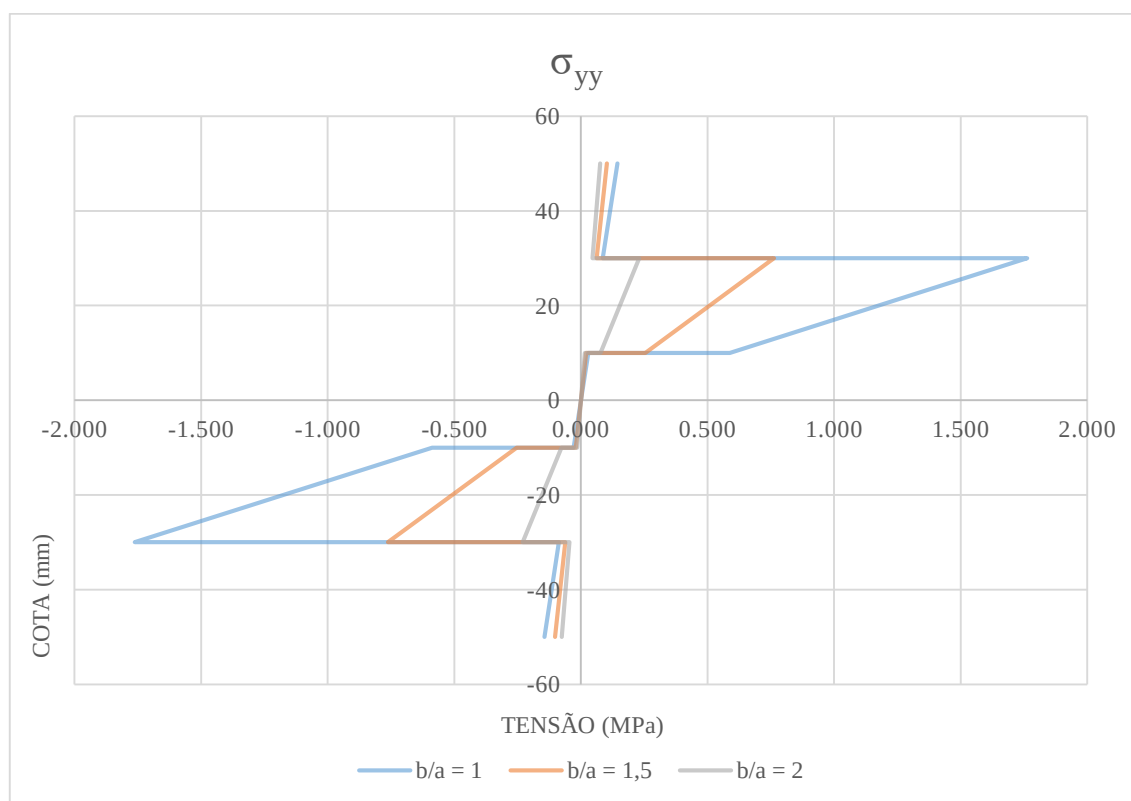
Fonte: O Autor

Figura 4.3 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{xx}



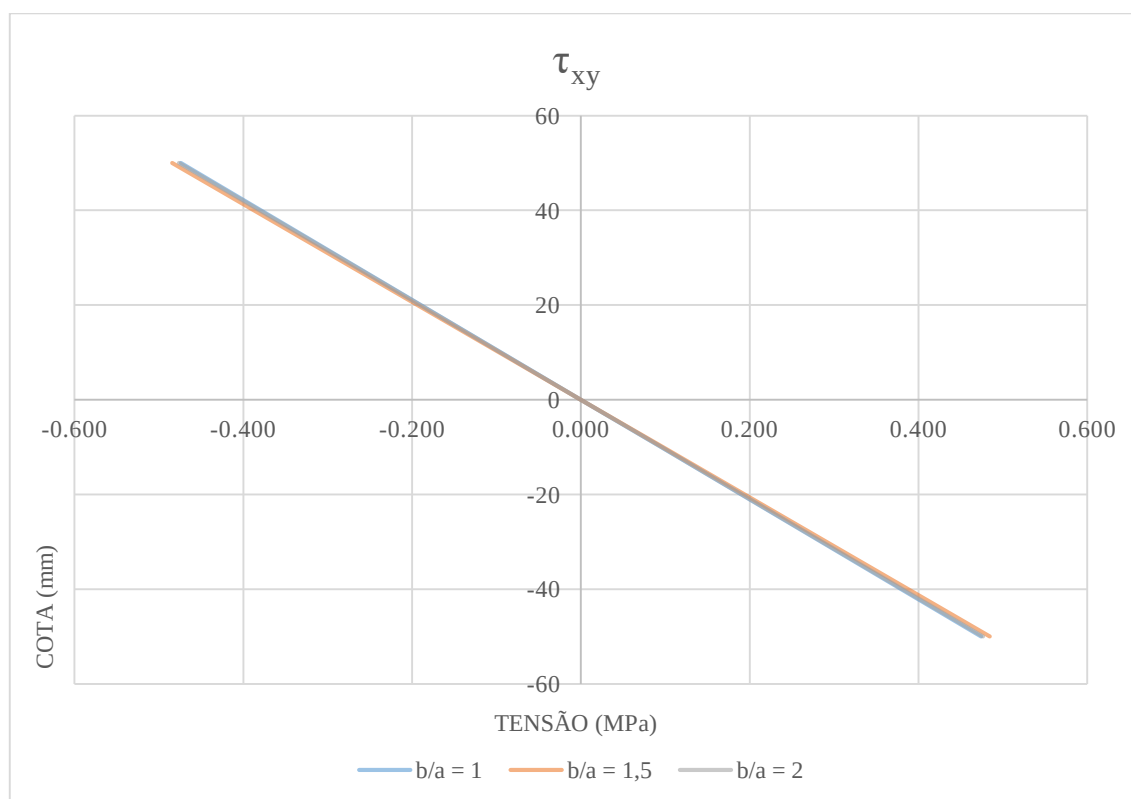
Fonte: O Autor

Figura 4.4 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{yy}



Fonte: O Autor

Figura 4.5 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xy}



Fonte: O Autor

4.1.1.3 CPT: cálculos das tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

De maneira análoga ao que fora feito na subseção anterior, deve-se, *a priori*, proceder com a definição dos pontos (x,y), nos quais as tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} assumem valores críticos. Esses valores, para cada razão b/a , estão reunidos na Tabela 4.6.

Tabela 4.6 – Pontos (x,y) críticos para os cálculos das tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} dos painéis de MLCC

Grandeza	Pontos críticos nos planos dos painéis de MLCC							
	x (mm)	Razão b/a			y (mm)	Razão b/a		
		1,0	1,5	2,0		1,0	1,5	2,0
Tensão de cisalhamento τ_{xz}	x = 0	0	0	0	y = b/2	1.500	2.250	3.000
Tensão de cisalhamento τ_{yz}	x = a/2	1.500	1.500	1.500	y = 0	0	0	0

Fonte: O Autor

Conforme foi exposto na Revisão de Literatura, para o caso específico da teoria clássica de placas, há uma inconsistência no campo de deslocamentos assumido, haja vista que, neste caso, as deformações transversais de cisalhamento γ_{xz} e γ_{yz} são assumidas iguais a zero. Como consequência, não é possível realizar os cálculos das tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} por intermédio das relações constitutivas do material. A sugestão apresentada para contornar tal problema foi proceder com integrações das equações diferenciais de equilíbrio. As equações deduzidas para as tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} , por esse método, são retomadas:

a) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{xz} :

$$\tau_{xz} = -\chi(z) \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} T_{12} W_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \tau_{xz}(x,y,z_k) \quad (4.23)$$

b) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{yz} :

$$\tau_{yz} = -Y(z) \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} T_{13} W_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) + \tau_{yz}(x,y,z_k) \quad (4.24)$$

Em que:

$$Y(z) = \chi(z) = \frac{z^2 - z_k^2}{2} \quad (4.25)$$

$$T_{12} = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^3 \bar{Q}_{11} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 (\bar{Q}_{12} + 2 \bar{Q}_{66}) \quad (4.26)$$

$$T_{13} = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^3 \bar{Q}_{22} + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{b}\right) (\bar{Q}_{12} + 2 \bar{Q}_{66}) \quad (4.27)$$

Com a definição dos pontos críticos (x,y), elencados na Tabela 4.6, é possível calcular as tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a. É relevante ressaltar que o carregamento transversal q_0 , os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$, $\bar{Q}_{66}$ e os valores a serem considerados para m e n já foram determinados anteriormente. Os resultados obtidos com as Equações (4.23) a (4.27) estão resumidos nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9.

Tabela 4.7 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão b/a = 1,0

θ	z	z_k	$-\chi(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{xz}(x,y,z_k)$	τ_{xz}	$-Y(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{yz}(x,y,z_k)$	τ_{yz}
(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0°	-50	-50	0,0000	-	0,0000	0,0000	-	0,0000
0°	-30	-50	0,0776	0,0000	0,0776	0,0094	0,0000	0,0094
90°	-10	-30	0,0046	0,0776	0,0822	0,0281	0,0094	0,0375
0°	0	-10	0,0049	0,0822	0,0870	0,0006	0,0375	0,0381
0°	10	0	-0,0049	0,0870	0,0822	-0,0006	0,0381	0,0375
90°	30	10	-0,0046	0,0822	0,0776	-0,0281	0,0375	0,0094
0°	50	30	-0,0776	0,0776	0,0000	-0,0094	0,0094	0,0000

Fonte: O Autor

Tabela 4.8 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$

θ	z	z_k	$-\chi(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{xz}(x,y,z_k)$	τ_{xz}	$-\Upsilon(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{yz}(x,y,z_k)$	τ_{yz}
(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0°	-50	-50	0,0000	-	0,0000	0,0000	-	0,0000
0°	-30	-50	0,0907	0,0000	0,0907	0,0086	0,0000	0,0086
90°	-10	-30	0,0029	0,0907	0,0935	0,0144	0,0086	0,0231
0°	0	-10	0,0057	0,0935	0,0992	0,0005	0,0231	0,0236
0°	10	0	-0,0057	0,0992	0,0935	-0,0005	0,0236	0,0231
90°	30	10	-0,0029	0,0935	0,0907	-0,0144	0,0231	0,0086
0°	50	30	-0,0907	0,0907	0,0000	-0,0086	0,0086	0,0000

Fonte: O Autor

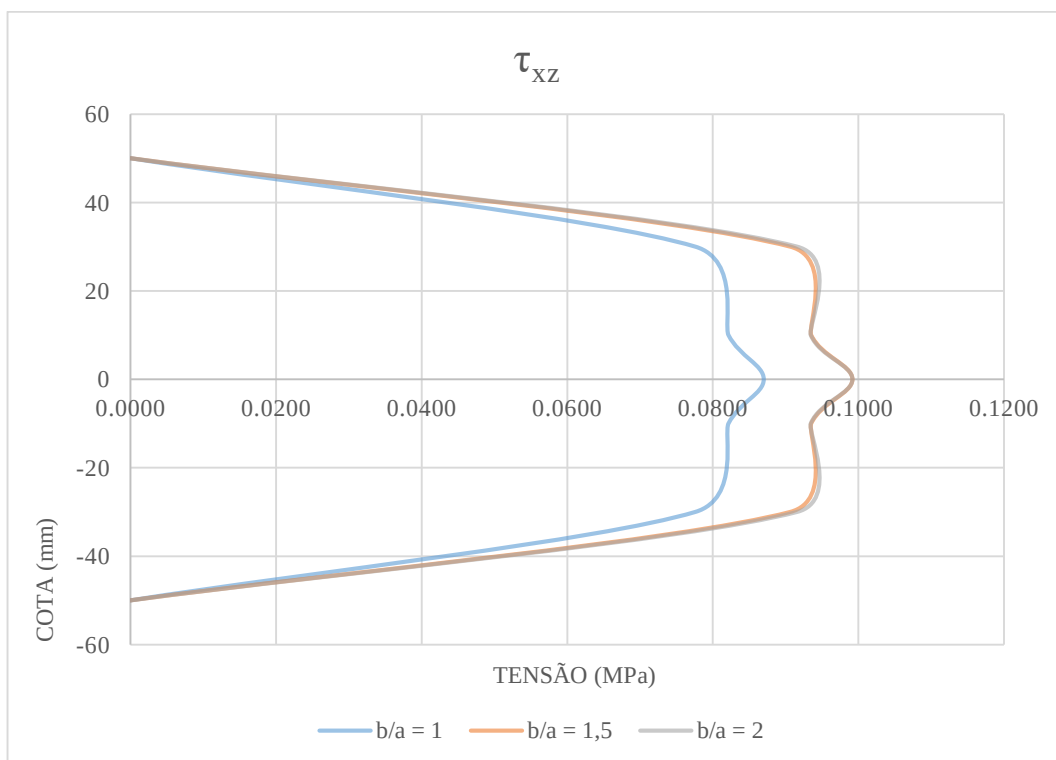
Tabela 4.9 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$

θ	z	z_k	$-\chi(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{xz}(x,y,z_k)$	τ_{xz}	$-\Upsilon(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{yz}(x,y,z_k)$	τ_{yz}
(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0°	-50	-50	0,0000	-	0,0000	0,0000	-	0,0000
0°	-30	-50	0,0916	0,0000	0,0916	0,0082	0,0000	0,0082
90°	-10	-30	0,0019	0,0916	0,0935	0,0091	0,0082	0,0173
0°	0	-10	0,0057	0,0935	0,0992	0,0005	0,0173	0,0178
0°	10	0	-0,0057	0,0992	0,0935	-0,0005	0,0178	0,0173
90°	30	10	-0,0019	0,0935	0,0916	-0,0091	0,0173	0,0082
0°	50	30	-0,0916	0,0916	0,0000	-0,0082	0,0082	0,0000

Fonte: O Autor

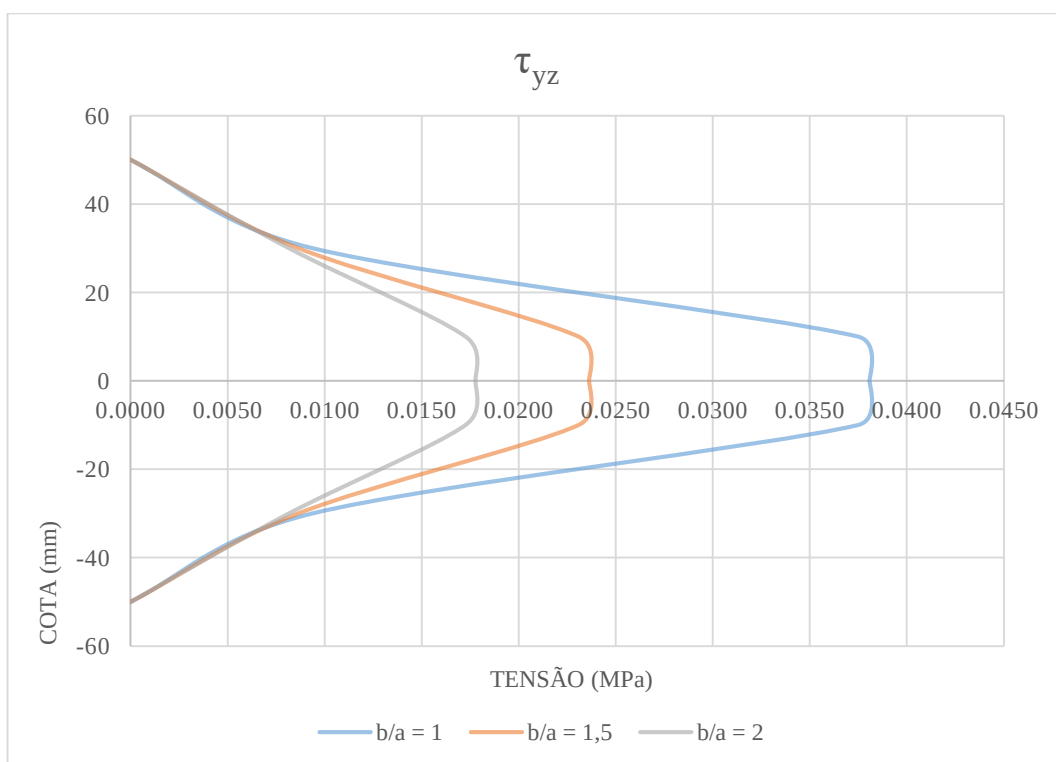
A partir dos valores constantes nas Tabelas 4.7, 4.8 e 4.9, foram traçados os diagramas de distribuição das tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} , os quais encontram-se ilustrados nas Figuras 4.6 e 4.7, respectivamente.

Figura 4.6 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xz}



Fonte: O Autor

Figura 4.7 – CPT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{yz}

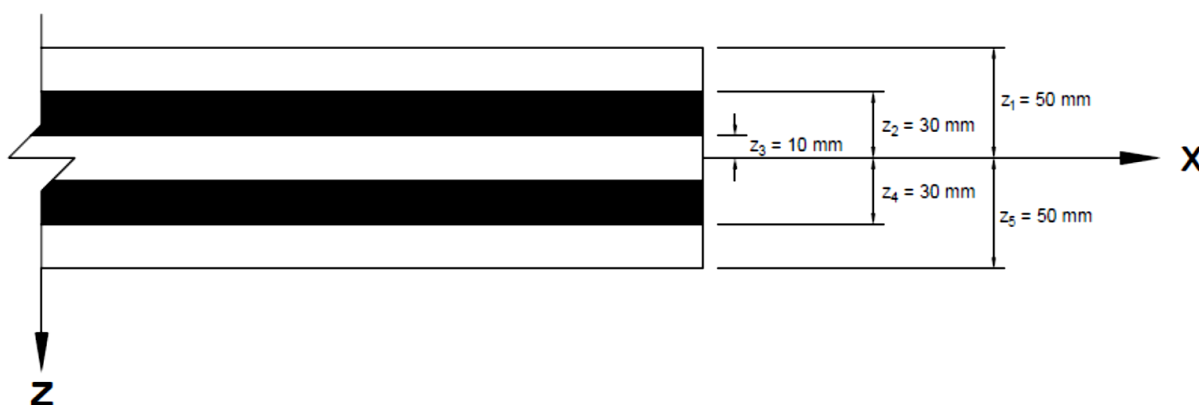


Fonte: O Autor

4.1.1.4 CPT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , $\bar{Q}_{ij}$ e D_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

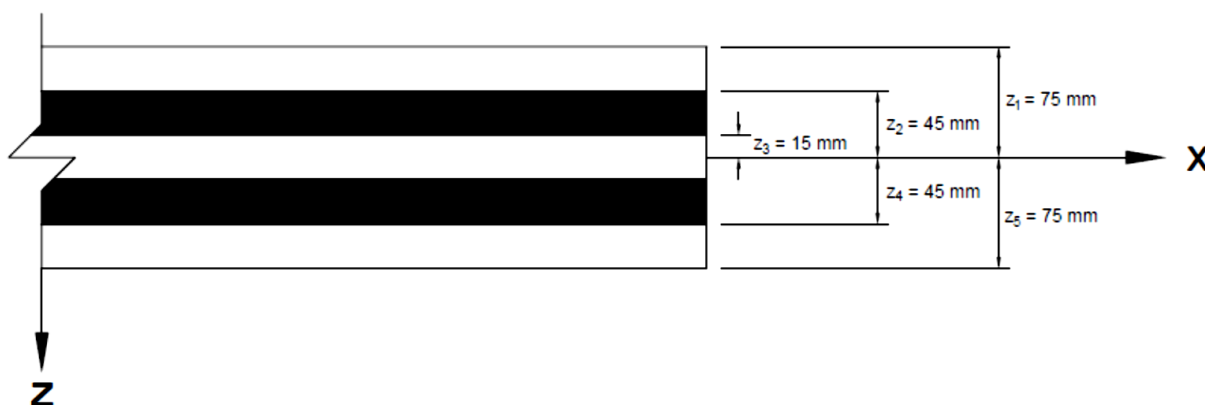
As variações paramétricas da razão h/b do painel de MLCC de referência a serem avaliadas são: $1/30$, $1/20$ e $1/15$. Os painéis de MLCC com essas variações estão ilustradas nas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10, respectivamente. Vale ressaltar que o painel de MLCC de variação paramétrica $h/b = 1/30$ é o painel de MLCC com variação paramétrica $b/a = 1,0$ e, portanto, os resultados obtidos para as grandezas de interesse são os mesmos.

Figura 4.8 – Cotas z para o cálculo das rigidezes flexionais do painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$



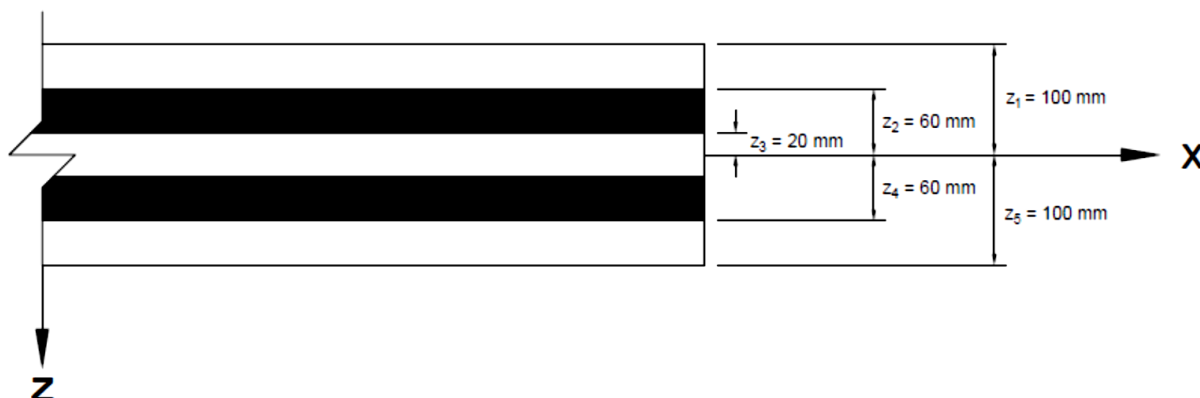
Fonte: O Autor

Figura 4.9 – Cotas z para o cálculo das rigidezes flexionais do painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$



Fonte: O Autor

Figura 4.10 – Cotas z para o cômputo das rigidezes flexionais do painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$



Fonte: O Autor

Os coeficientes Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} e Q_{66} , tanto quanto os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$, permanecem com as magnitudes determinadas na subseção 4.1.1.1, restando apenas a determinação das rigidezes flexionais D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} . Posto isso, torna-se possível, a partir dos dados apresentados nas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10 e da Equação (4.14), computar as referidas rigidezes à flexão, as quais encontram-se relacionadas nas Tabelas 4.10, 4.11 e 4.12

Tabela 4.10 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

i	j	$(z_1^3 - z_2^3)$	$(z_2^3 - z_3^3)$	z_3^3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	D_{ij}
		(mm ³)	(mm ³)	(mm ³)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N·mm)
1	1	98.000	26.000	1.000	11.072,102	372,425	$7,372 \cdot 10^8$
1	2	98.000	26.000	1.000	163,867	163,867	$1,366 \cdot 10^7$
2	2	98.000	26.000	1.000	372,425	11.072,102	$2,165 \cdot 10^8$
6	6	98.000	26.000	1.000	690	690	$5,750 \cdot 10^7$

Fonte: O Autor

Tabela 4.11 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/20$

i	j	$(z_1^3 - z_2^3)$	$(z_2^3 - z_3^3)$	z_3^3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	D_{ij}
		(mm ³)	(mm ³)	(mm ³)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N·mm)
1	1	330.750	87.750	3.375	11.072,102	372,425	$2,488 \cdot 10^9$
1	2	330.750	87.750	3.375	163,867	163,867	$4,609 \cdot 10^7$
2	2	330.750	87.750	3.375	372,425	11.072,102	$7,307 \cdot 10^8$
6	6	330.750	87.750	3.375	690	690	$1,941 \cdot 10^8$

Fonte: O Autor

Tabela 4.12 – Rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/15$

i	j	$(z_1^3 - z_2^3)$	$(z_2^3 - z_3^3)$	z_3^3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	D_{ij}
		(mm ³)	(mm ³)	(mm ³)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N·mm)
1	1	784.000	208.000	8.000	11.072,102	372,425	$5,898 \cdot 10^9$
1	2	784.000	208.000	8.000	163,867	163,867	$1,092 \cdot 10^8$
2	2	784.000	208.000	8.000	372,425	11.072,102	$1,732 \cdot 10^9$
6	6	784.000	208.000	8.000	690	690	$4,600 \cdot 10^8$

Fonte: O Autor

4.1.1.5 CPT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Os cálculos referentes às variações paramétricas da razão h/b do painel de MLCC de referência seguem as mesmas rotinas aplicadas às variações paramétricas da razão b/a . Apenas para fins de esclarecimento, as seguintes observações podem ser postas:

- Os pontos críticos (x,y), no plano dos painéis de MLCC, onde as grandezas de interesse à análise estrutural apresentam-se com seus valores críticos já foram especificados e são os mesmos que se encontram sintetizados nas Tabelas 4.2 e 4.6;

- b) O carregamento transversal uniformemente distribuído $q_0 = 5 \text{ kN/m}^2 = 0,0050 \text{ N/mm}^2$, os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$, dados em (4.6) a (4.13), e os valores de m e n iguais a 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 e 19 não sofrem qualquer alteração;
- c) As equações para o cômputo das grandezas de interesse são aquelas retomadas nas subseções anteriores 4.1.1.2 e 4.1.1.3, ou seja, as Equações (4.15) a (4.27).

Com base no exposto, pode-se então dar sequência aos cálculos dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento. As Tabelas 4.13, 4.14 e 4.15 reúnem os valores para os deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} para as razões h/b iguais a 1/30, 1/20 e 1/15, respectivamente. Por sua vez, as Tabelas 4.16, 4.17 e 4.18 trazem as magnitudes das tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para as razões h/b iguais a 1/30, 1/20 e 1/15, nesta ordem.

Tabela 4.13 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	5,437	-3,223	-0,144	0,474
0	-30	5,437	-1,934	-0,087	0,284
90	-30	5,437	-0,090	-1,762	0,284
90	-10	5,437	-0,030	-0,587	0,095
0	-10	5,437	-0,645	-0,029	0,095
0	0	5,437	0,000	0,000	0,000
0	10	5,437	0,645	0,029	-0,095
90	10	5,437	0,030	0,587	-0,095
90	30	5,437	0,090	1,762	-0,284
0	30	5,437	1,934	0,087	-0,284
0	50	5,437	3,223	0,144	-0,474

Fonte: O Autor

Tabela 4.14 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-75	1,611	-1,432	-0,064	0,211
0	-45	1,611	-0,859	-0,038	0,126
90	-45	1,611	-0,040	-0,783	0,126
90	-15	1,611	-0,013	-0,261	0,042
0	-15	1,611	-0,286	-0,013	0,042
0	0	1,611	0,000	0,000	0,000
0	15	1,611	0,286	0,013	-0,042
90	15	1,611	0,013	0,261	-0,042
90	45	1,611	0,040	0,783	-0,126
0	45	1,611	0,859	0,038	-0,126
0	75	1,611	1,432	0,064	-0,211

Fonte: O Autor

Tabela 4.15 – CPT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensão de cisalhamento τ_{xy} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-100	0,680	-0,806	-0,036	0,119
0	-60	0,680	-0,483	-0,022	0,071
90	-60	0,680	-0,022	-0,441	0,071
90	-20	0,680	-0,007	-0,147	0,024
0	-20	0,680	-0,161	-0,007	0,024
0	0	0,680	0,000	0,000	0,000
0	20	0,680	0,161	0,007	-0,024
90	20	0,680	0,007	0,147	-0,024
90	60	0,680	0,022	0,441	-0,071
0	60	0,680	0,483	0,022	-0,071
0	100	0,680	0,806	0,036	-0,119

Fonte: O Autor

Tabela 4.16 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

θ	z	z_k	$-\chi(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{xz}(x,y,z_k)$	τ_{xz}	$-\Upsilon(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{yz}(x,y,z_k)$	τ_{yz}
(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0°	-50	-50	0,0000	-	0,0000	0,0000	-	0,0000
0°	-30	-50	0,0776	0,0000	0,0776	0,0094	0,0000	0,0094
90°	-10	-30	0,0046	0,0776	0,0822	0,0281	0,0094	0,0375
0°	0	-10	0,0049	0,0822	0,0870	0,0006	0,0375	0,0381
0°	10	0	-0,0049	0,0870	0,0822	-0,0006	0,0381	0,0375
90°	30	10	-0,0046	0,0822	0,0776	-0,0281	0,0375	0,0094
0°	50	30	-0,0776	0,0776	0,0000	-0,0094	0,0094	0,0000

Fonte: O Autor

Tabela 4.17 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

θ	z	z_k	$-\chi(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{xz}(x,y,z_k)$	τ_{xz}	$-\Upsilon(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{yz}(x,y,z_k)$	τ_{yz}
(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0°	-75	-75	0,0000	-	0,0000	0,0000	-	0,0000
0°	-45	-75	0,0517	0,0000	0,0517	0,0062	0,0000	0,0062
90°	-15	-45	0,0030	0,0517	0,0548	0,0187	0,0062	0,0250
0°	0	-15	0,0032	0,0548	0,0580	0,0004	0,0250	0,0254
0°	15	0	-0,0032	0,0580	0,0548	-0,0004	0,0254	0,0250
90°	45	15	-0,0030	0,0548	0,0517	-0,0187	0,0250	0,0062
0°	75	45	-0,0517	0,0517	0,0000	-0,0062	0,0062	0,0000

Fonte: O Autor

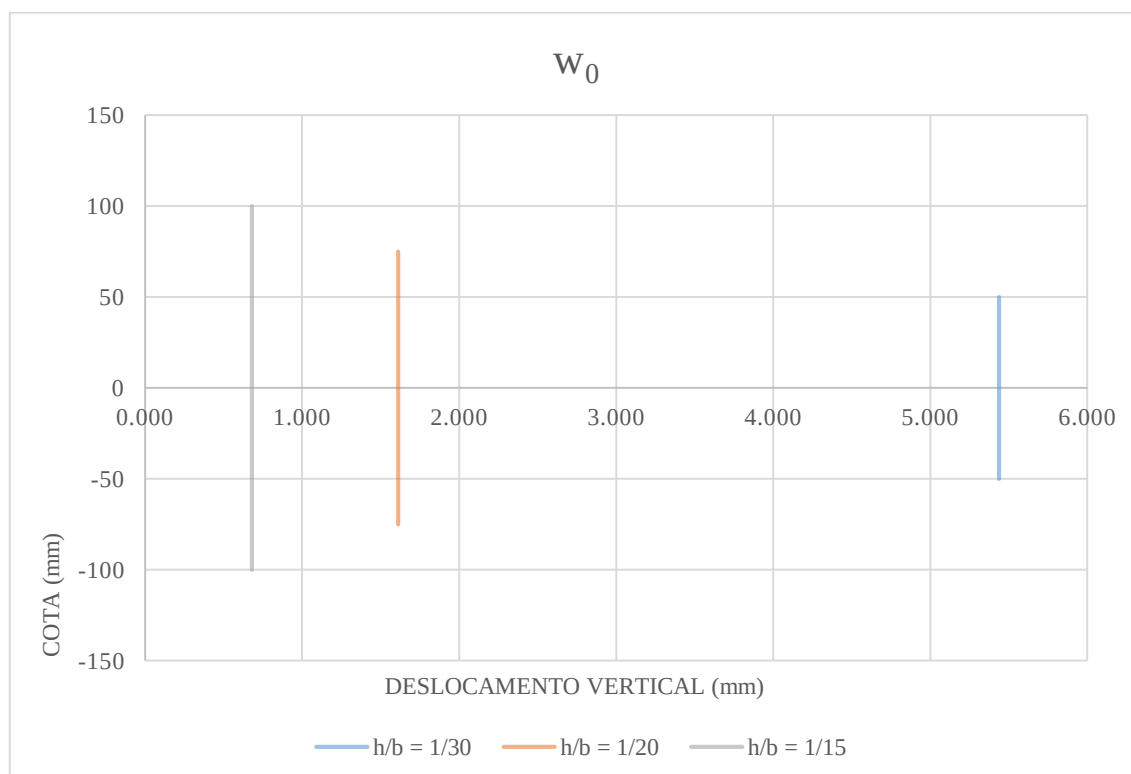
Tabela 4.18 – CPT: tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

θ	z	z_k	$-\chi(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{xz}(x,y,z_k)$	τ_{xz}	$-\Upsilon(z) \Sigma \Sigma$	$\tau_{yz}(x,y,z_k)$	τ_{yz}
(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0°	-100	-100	0,0000	-	0,0000	0,0000	-	0,0000
0°	-60	-100	0,0388	0,0000	0,0388	0,0047	0,0000	0,0047
90°	-20	-60	0,0023	0,0388	0,0411	0,0141	0,0047	0,0187
0°	0	-20	0,0024	0,0411	0,0435	0,0003	0,0187	0,0190
0°	20	0	-0,0024	0,0435	0,0411	-0,0003	0,0190	0,0187
90°	60	20	-0,0023	0,0411	0,0388	-0,0141	0,0187	0,0047
0°	100	60	-0,0388	0,0388	0,0000	-0,0047	0,0047	0,0000

Fonte: O Autor

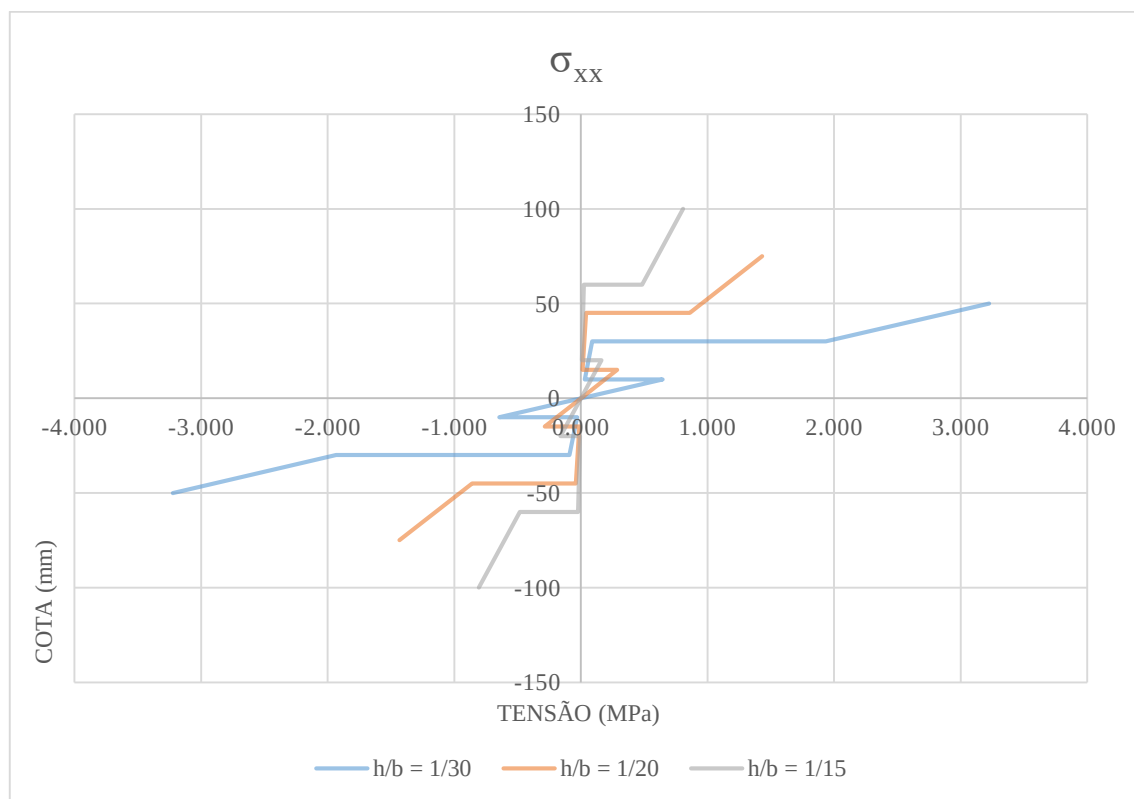
Similarmente ao que fora feito para as avaliações paramétricas da razão b/a , foram traçados os diagramas de distribuição das grandezas computadas. Esses diagramas, ilustrados nas Figuras 4.11 a 4.16, foram construídos tomando-se como base os valores constantes nas Tabelas 4.13 a 4.18.

Figura 4.11 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para os deslocamentos verticais w_0



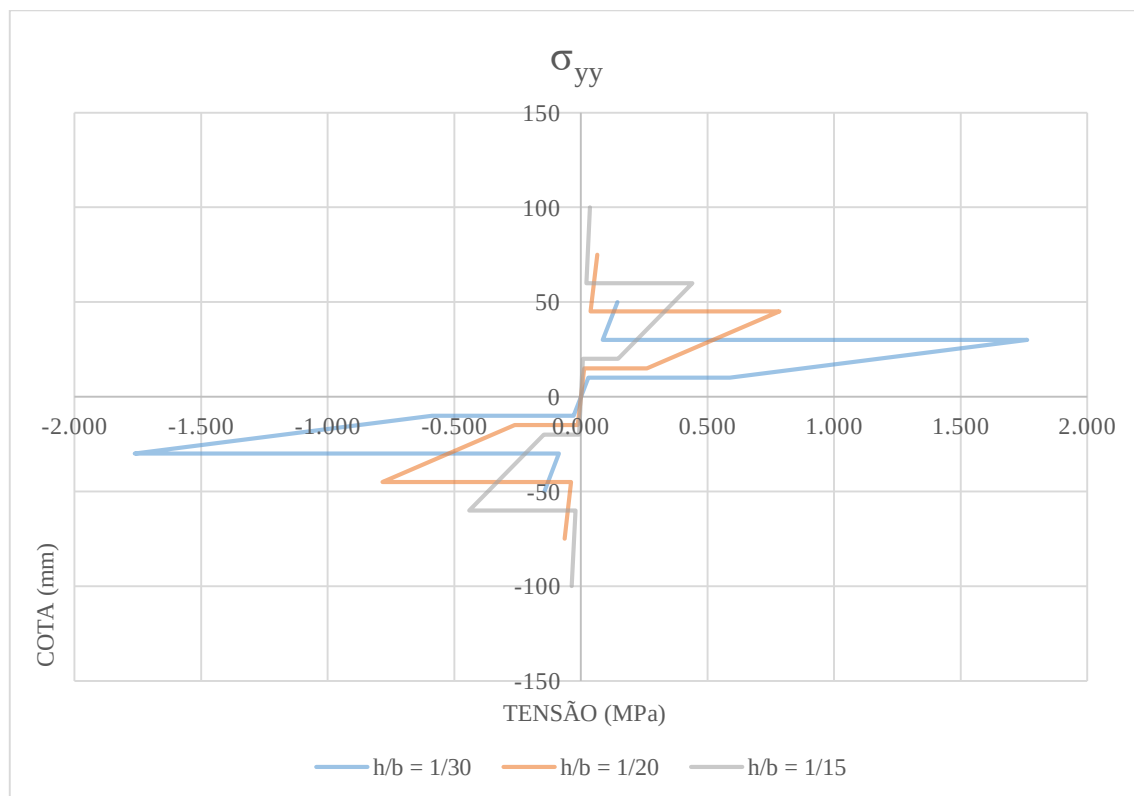
Fonte: O Autor

Figura 4.12 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{xx}



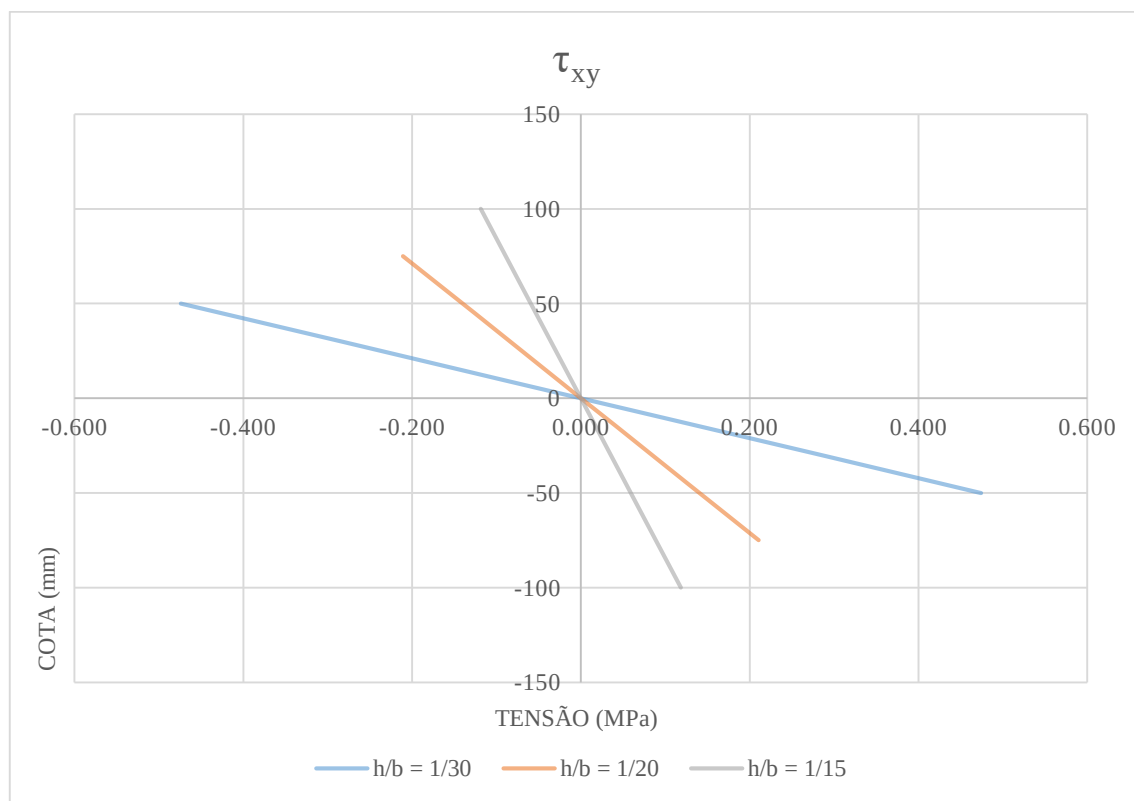
Fonte: O Autor

Figura 4.13 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{yy}



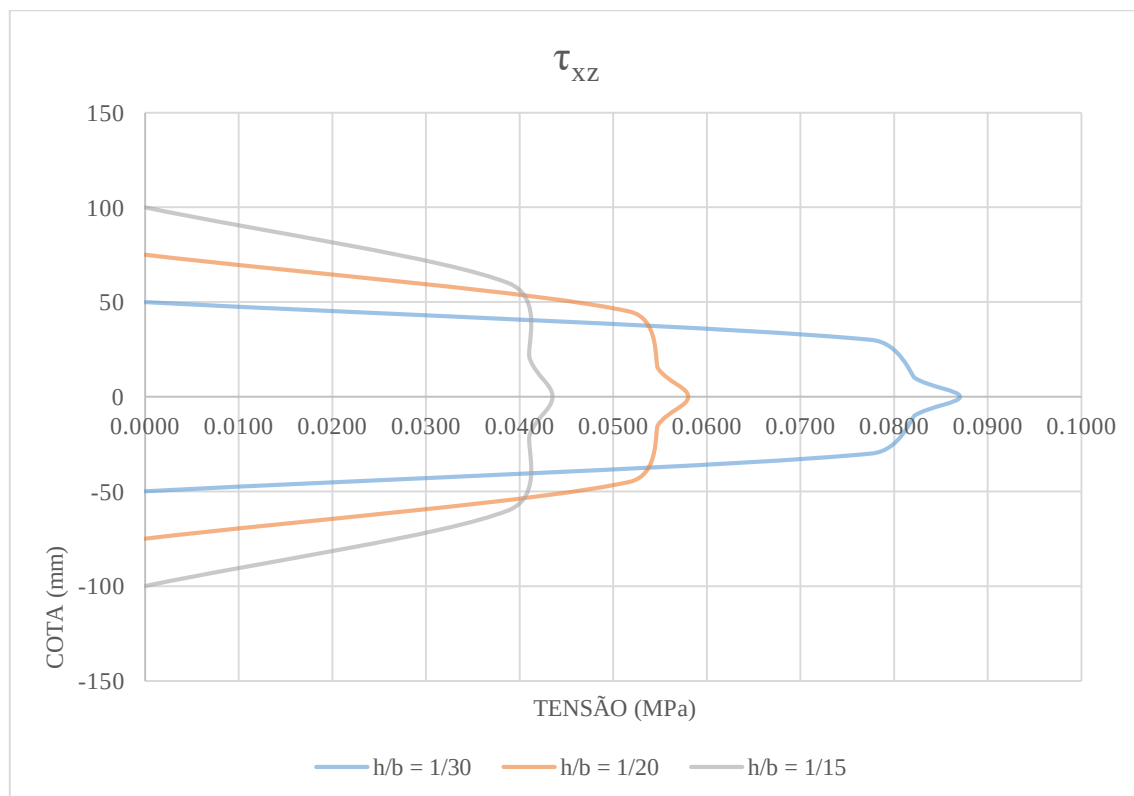
Fonte: O Autor

Figura 4.14 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xy}



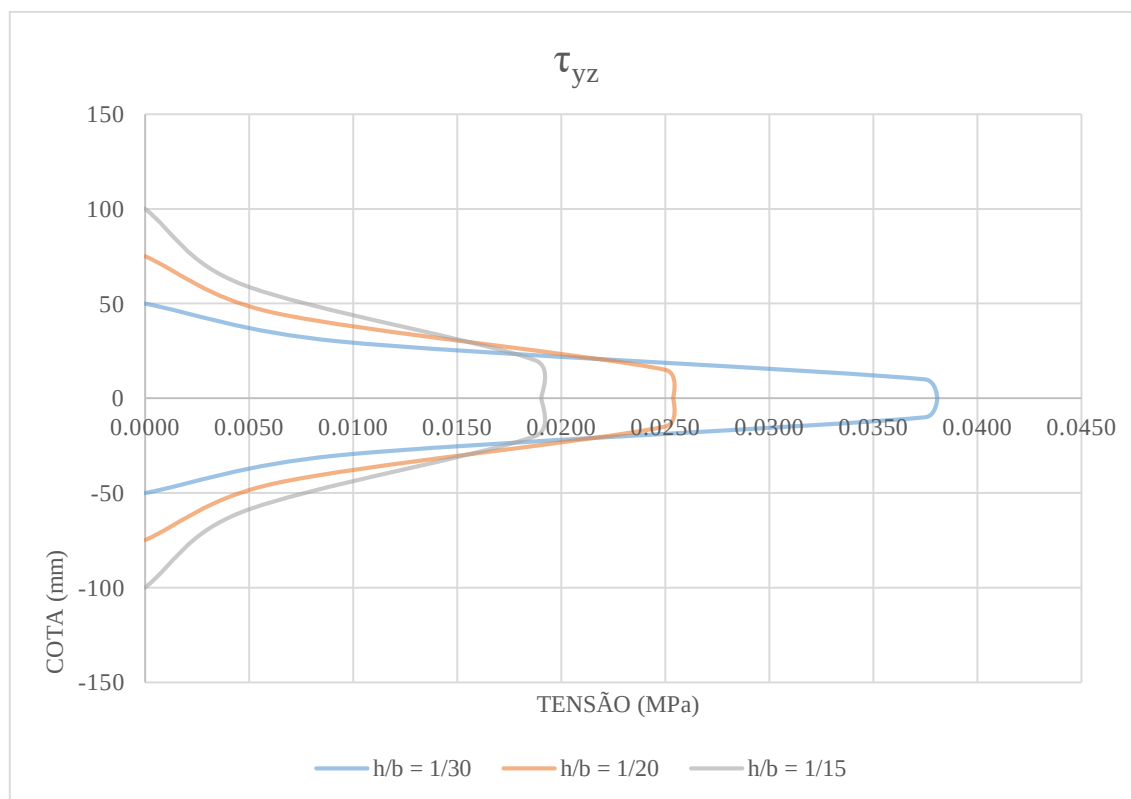
Fonte: O Autor

Figura 4.15 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xz}



Fonte: O Autor

Figura 4.16 – CPT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{yz}



Fonte: O Autor

4.1.2 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem (FSDT)

4.1.2.1 FSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , $\bar{Q}_{ij}$, D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Para a aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem, faz-se necessário determinar os coeficientes Q_{44} , Q_{55} , $\bar{Q}_{44}$ e $\bar{Q}_{55}$, bem como as rigidezes axiais A_{44} e A_{55} . Esses seis parâmetros não haviam sido definidos quando da aplicação da teoria clássica de placas, pois esta não estabelece relações constitutivas para as tensões e deformações transversais de cisalhamento, tal como fazem as teorias de deformação de cisalhamento. Em complemento, vale mencionar que os coeficientes Q_{11} , Q_{12} , Q_{22} , Q_{66} , $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$ e $\bar{Q}_{66}$, tanto quanto as rigidezes flexionais D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} , calculados para a teoria clássica de placas, não sofrem alterações.

Feitas as considerações anteriores, pode-se então retomar as Equações (2.101) e (2.102), assim como as propriedades mecânicas das lamelas de madeira da Tabela 3.1, a fim de se calcular os coeficientes Q_{44} e Q_{55} . De posse dessas informações, verifica-se então que:

$$Q_{44} = G_{23} = 50 \text{ N/mm}^2 \quad (4.28)$$

$$Q_{55} = G_{13} = 690 \text{ N/mm}^2 \quad (4.29)$$

Já com as Equações (2.94) e (2.96), é possível estabelecer os valores para os coeficientes $\bar{Q}_{44}$ e $\bar{Q}_{55}$. Para as lamelas de madeira com orientação $\theta = 0^\circ$, verifica-se que $\cos(\theta) = \cos(0^\circ) = 1$, $\sin(\theta) = \sin(0^\circ) = 0$ e, portanto:

$$\bar{Q}_{44}(0^\circ) = Q_{44} = 50 \text{ N/mm}^2 \quad (4.30)$$

$$\bar{Q}_{55}(0^\circ) = Q_{55} = 690 \text{ N/mm}^2 \quad (4.31)$$

Para o caso das lamelas de madeira com orientação $\theta = 90^\circ$, tem-se $\cos(\theta) = \cos(90^\circ) = 0$, $\sin(\theta) = \sin(90^\circ) = 1$ e:

$$\bar{Q}_{44}(90^\circ) = Q_{55} = 690 \text{ N/mm}^2 \quad (4.32)$$

$$\bar{Q}_{55}(90^\circ) = Q_{44} = 50 \text{ N/mm}^2 \quad (4.33)$$

Já no que se refere às rigidezes axiais A_{44} e A_{55} , tem-se que elas são determinadas mediante a aplicação da Equação (2.111). Todavia, ao considerar novamente a Figura 4.1, é possível reescrever a Equação (2.111) na seguinte forma:

$$A_{ij} = 2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) (z_1 - z_2) + 2 \bar{Q}_{ij}(90^\circ) (z_2 - z_3) + 2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) z_3 \quad (4.34)$$

Baseando-se nas cotas ilustradas na Figura 4.1 e considerando-se a Equação (4.34), encontram-se os valores das rigidezes axiais A_{44} e A_{55} , reunidos na Tabela 4.19.

Tabela 4.19 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

i	j	$(z_1 - z_2)$	$(z_2 - z_3)$	z_3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	A_{ij}
		(mm)	(mm)	(mm)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N/mm)
4	4	20	20	10	50	690	$3,06 \cdot 10^4$
5	5	20	20	10	690	50	$4,34 \cdot 10^4$

Fonte: O Autor

4.1.2.2 FSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Para o caso das teorias de deformação de cisalhamento, optou-se por abordar os cálculos das tensões de cisalhamento transversais, τ_{xz} e τ_{yz} , juntamente com os cálculos das demais tensões, pois as expressões empregadas são semelhantes entre si e deduzidas a partir das relações constitutivas do material.

No que se refere aos pontos críticos nos planos dos painéis de MLCC, onde os deslocamentos verticais e as tensões devem ser calculados, têm-se que os mesmos já foram definidos nas Tabelas 4.2 e 4.6. Assim sendo, ao considerar esses pontos críticos, bem como o carregamento transversal uniformemente distribuído q_0 , as rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} e os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$, $\bar{Q}_{44}$, $\bar{Q}_{55}$ e $\bar{Q}_{66}$, é possível calcular as grandezas mencionadas por meio das Equações (2.200), (2.223), (2.224), (2.225), (2.227) e (2.228), respectivamente. Essas equações estão retomadas na sequência com os valores de m e n a serem utilizados. Ademais, foram também resgatadas algumas equações auxiliares, nomeadamente as Equações (2.207) a (2.221).

a) Equação para o cômputo dos deslocamentos verticais w_0 :

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} W_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (4.35)$$

b) Equação para o cômputo das tensões normais σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = -z \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (\bar{Q}_{11} \alpha_m X_{mn} + \bar{Q}_{12} \beta_n Y_{mn}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (4.36)$$

c) Equação para o cômputo das tensões normais σ_{yy} :

$$\sigma_{yy} = -z \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (\bar{Q}_{12} \alpha_m X_{mn} + \bar{Q}_{22} \beta_n Y_{mn}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (4.37)$$

d) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = z \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} \bar{Q}_{66} (\beta_n X_{mn} + \alpha_m Y_{mn}) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (4.38)$$

e) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{xz} :

$$\tau_{xz} = \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} \bar{Q}_{55} (X_{mn} + \alpha_m W_{mn}) \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (4.39)$$

f) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{yz} :

$$\tau_{yz} = \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} \bar{Q}_{44} (Y_{mn} + \beta_n W_{mn}) \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (4.40)$$

g) Equações auxiliares referentes aos parâmetros W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} :

$$W_{mn} = \frac{b_0}{b_{mn}} q_{mn} \quad (4.41)$$

$$X_{mn} = \frac{b_1}{b_{mn}} q_{mn} \quad (4.42)$$

$$Y_{mn} = \frac{b_2}{b_{mn}} q_{mn} \quad (4.43)$$

h) Equações auxiliares referentes aos parâmetros b_{mn} , b_0 , b_1 e b_2 :

$$b_{mn} = \hat{s}_{11} b_0 + \hat{s}_{12} b_1 + \hat{s}_{13} b_2 \quad (4.44)$$

$$b_0 = \hat{s}_{22} \hat{s}_{33} - \hat{s}_{23} \hat{s}_{23} \quad (4.45)$$

$$b_1 = \hat{s}_{22} \hat{s}_{13} - \hat{s}_{12} \hat{s}_{33} \quad (4.46)$$

$$b_2 = \hat{s}_{12} \hat{s}_{23} - \hat{s}_{22} \hat{s}_{13} \quad (4.47)$$

i) Equações auxiliares referentes aos parâmetros $\hat{s}$:

$$\hat{s}_{11} = K_s (A_{55} \alpha_m^2 + A_{44} \beta_n^2) \quad (4.48)$$

$$\hat{s}_{12} = K_s A_{55} \alpha_m \quad (4.49)$$

$$\hat{s}_{13} = K_s A_{44} \beta_n \quad (4.50)$$

$$\hat{s}_{22} = (D_{11} \alpha_m^2 + D_{66} \beta_n^2 + K_s A_{55}) \quad (4.51)$$

$$\hat{s}_{23} = (D_{12} + D_{66}) \alpha_m \beta_n \quad (4.52)$$

$$\hat{s}_{33} = (D_{66} \alpha_m^2 + D_{22} \beta_n^2 + K_s A_{44}) \quad (4.53)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad (4.54)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad (4.55)$$

Por fim, para o fator de forma no cisalhamento K_s , foi considerado o valor 1, conforme recomendação de Karacabeyli e Gagnon (2019). Considerando o que fora exposto, uma rotina de cálculo semelhante àquela apresentada para a teoria clássica de placas conduz aos resultados resumidos nos Tabelas 4.20 a 4.22.

Tabela 4.20 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	5,533	-3,213	-0,145	0,477	0,105	0,006
0	-30	5,533	-1,928	-0,087	0,286	0,105	0,006
90	-30	5,533	-0,090	-1,776	0,286	0,008	0,078
90	-10	5,533	-0,030	-0,592	0,095	0,008	0,078
0	-10	5,533	-0,643	-0,029	0,095	0,105	0,006
0	0	5,533	0,000	0,000	0,000	0,105	0,006
0	10	5,533	0,643	0,029	-0,095	0,105	0,006
90	10	5,533	0,030	0,592	-0,095	0,008	0,078
90	30	5,533	0,090	1,776	-0,286	0,008	0,078
0	30	5,533	1,928	0,087	-0,286	0,105	0,006
0	50	5,533	3,213	0,145	-0,477	0,105	0,006

Fonte: O Autor

Tabela 4.21 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	7,242	-4,214	-0,103	0,488	0,121	0,005
0	-30	7,242	-2,528	-0,062	0,293	0,121	0,005
90	-30	7,242	-0,096	-0,776	0,293	0,009	0,070
90	-10	7,242	-0,032	-0,259	0,098	0,009	0,070
0	-10	7,242	-0,843	-0,021	0,098	0,121	0,005
0	0	7,242	0,000	0,000	0,000	0,121	0,005
0	10	7,242	0,843	0,021	-0,098	0,121	0,005
90	10	7,242	0,032	0,259	-0,098	0,009	0,070
90	30	7,242	0,096	0,776	-0,293	0,009	0,070
0	30	7,242	2,528	0,062	-0,293	0,121	0,005
0	50	7,242	4,214	0,103	-0,488	0,121	0,005

Fonte: O Autor

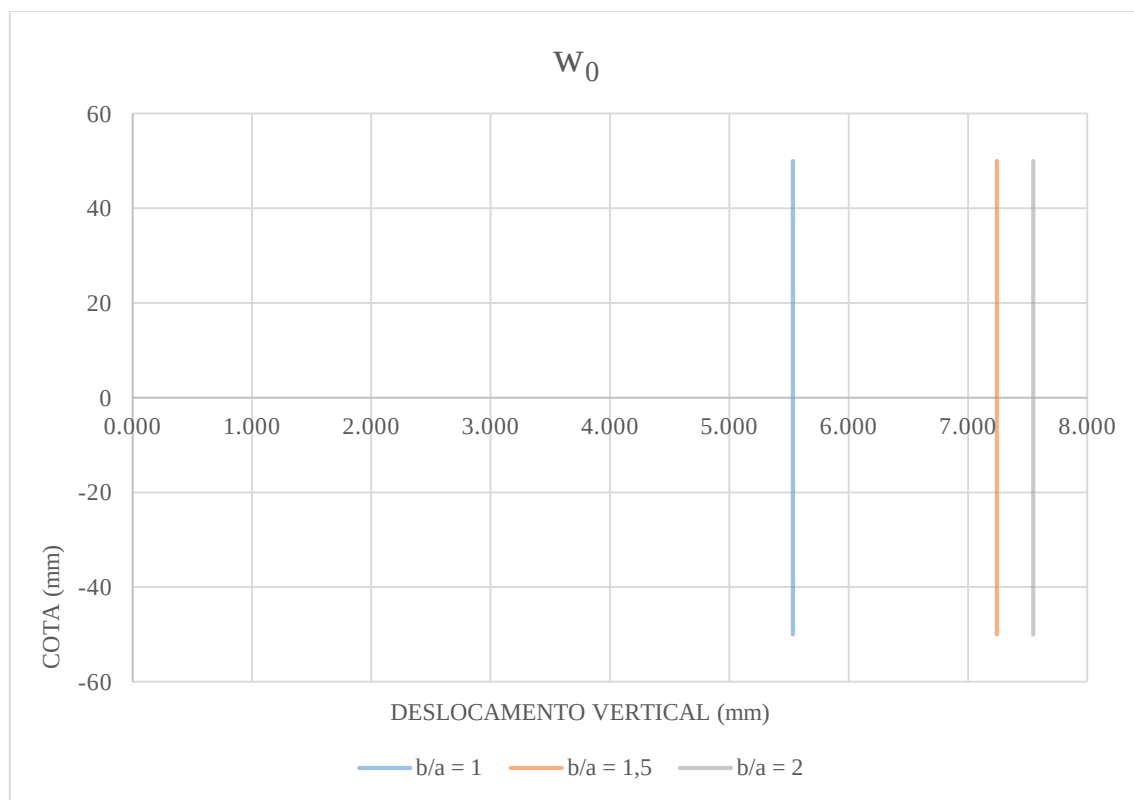
Tabela 4.22 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	7,548	-4,386	-0,076	0,480	0,121	0,005
0	-30	7,548	-2,631	-0,046	0,288	0,121	0,005
90	-30	7,548	-0,091	-0,238	0,288	0,009	0,068
90	-10	7,548	-0,030	-0,079	0,096	0,009	0,068
0	-10	7,548	-0,877	-0,015	0,096	0,121	0,005
0	0	7,548	0,000	0,000	0,000	0,121	0,005
0	10	7,548	0,877	0,015	-0,096	0,121	0,005
90	10	7,548	0,030	0,079	-0,096	0,009	0,068
90	30	7,548	0,091	0,238	-0,288	0,009	0,068
0	30	7,548	2,631	0,046	-0,288	0,121	0,005
0	50	7,548	4,386	0,076	-0,480	0,121	0,005

Fonte: O Autor

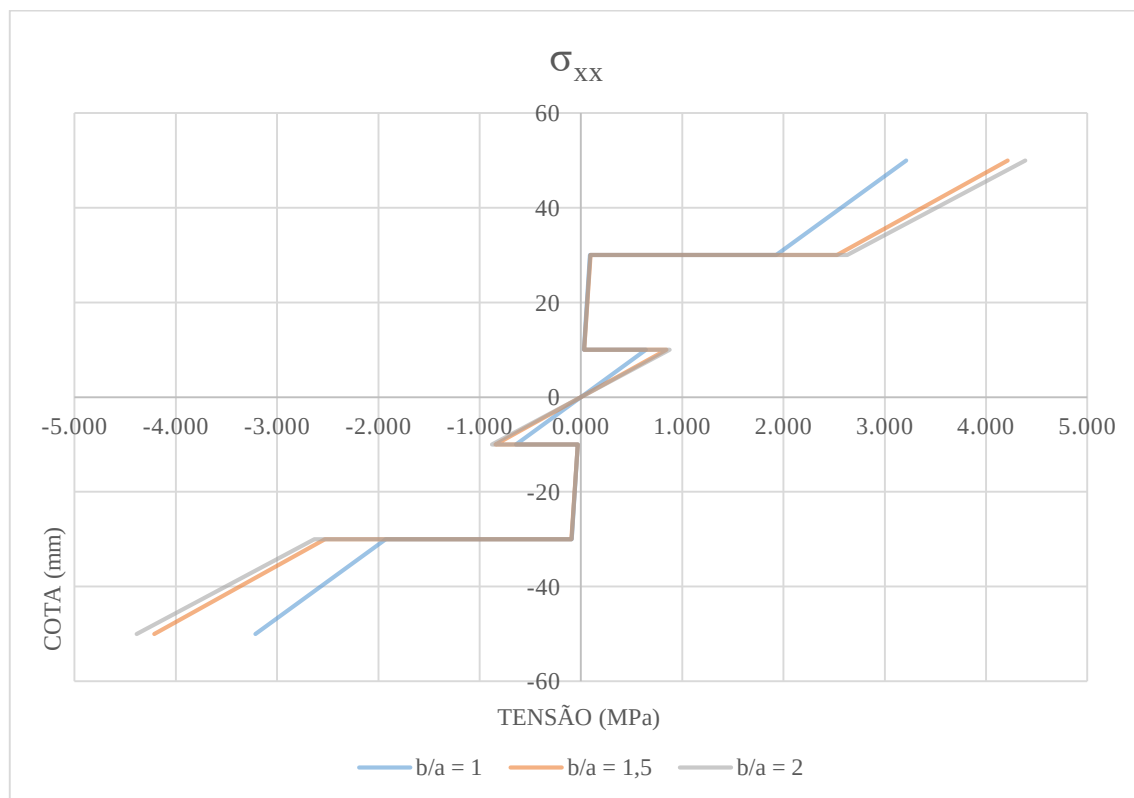
A seguir, as Figuras 4.17 a 4.22, ilustram os diagramas de distribuição dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} , os quais foram traçados tomando-se os valores reunidos nas Tabelas 4.20 a 4.22.

Figura 4.17 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para os deslocamentos verticais w_0



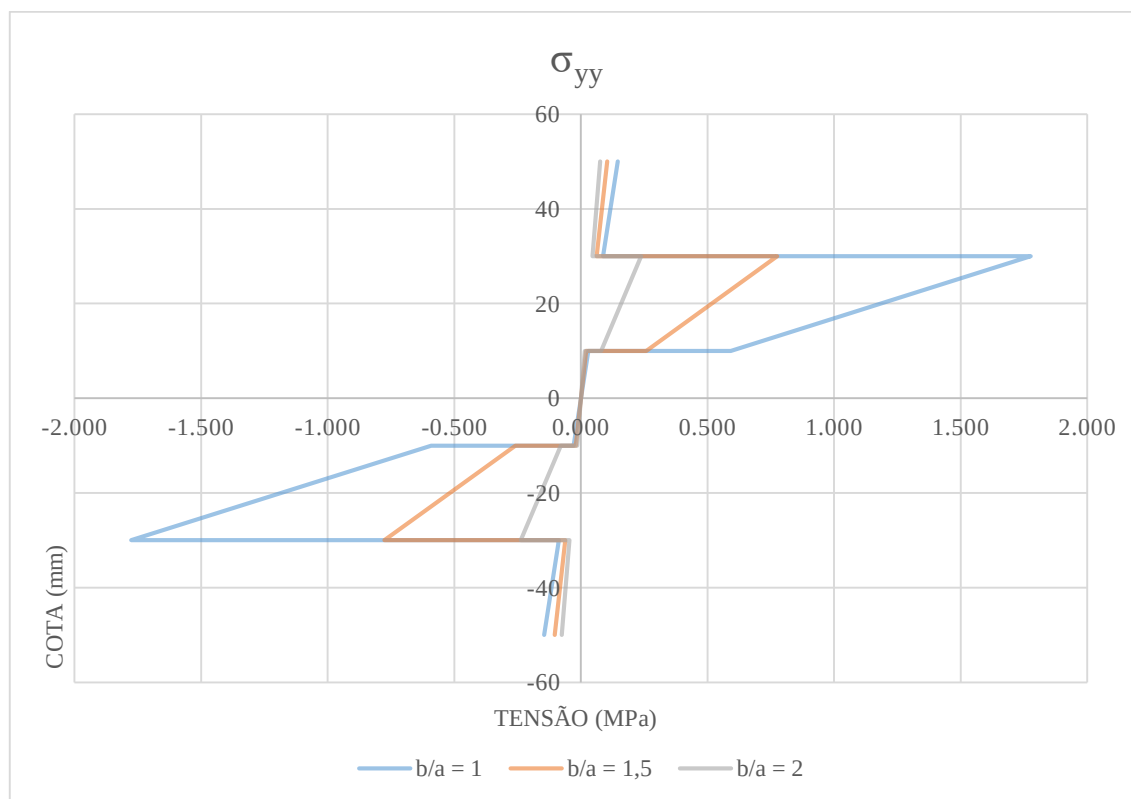
Fonte: O Autor

Figura 4.18 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{xx}



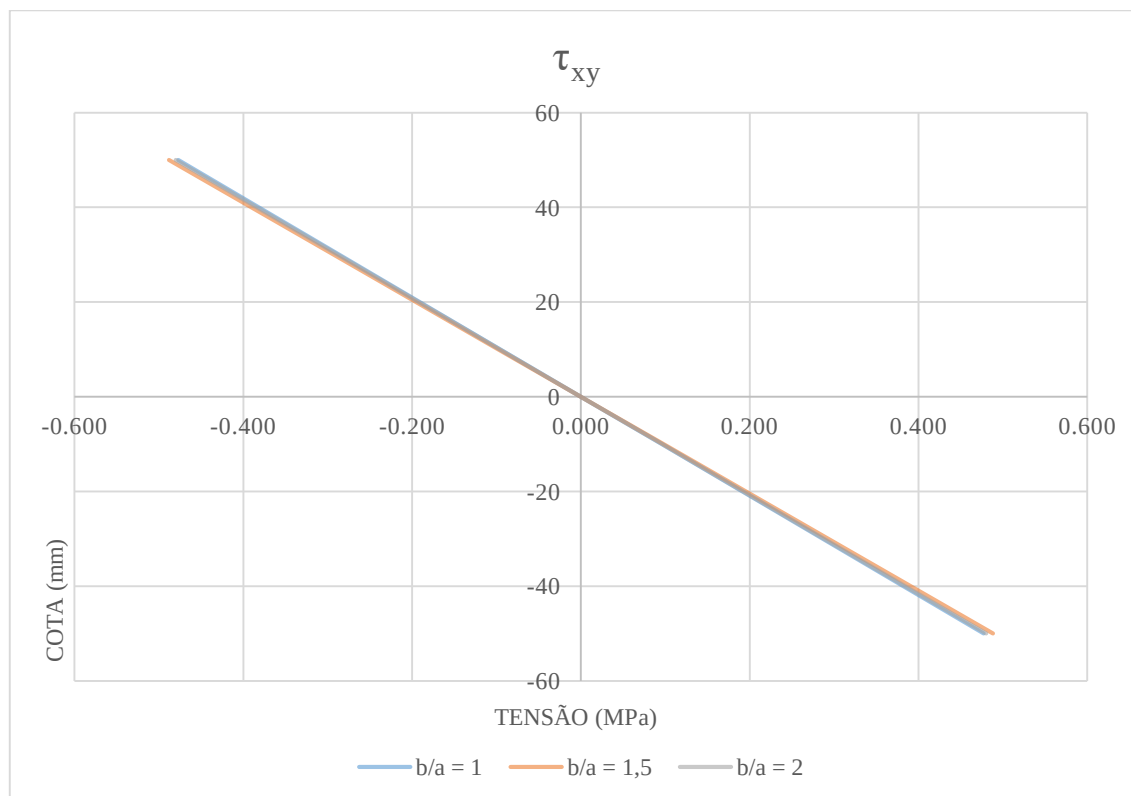
Fonte: O Autor

Figura 4.19 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{yy}



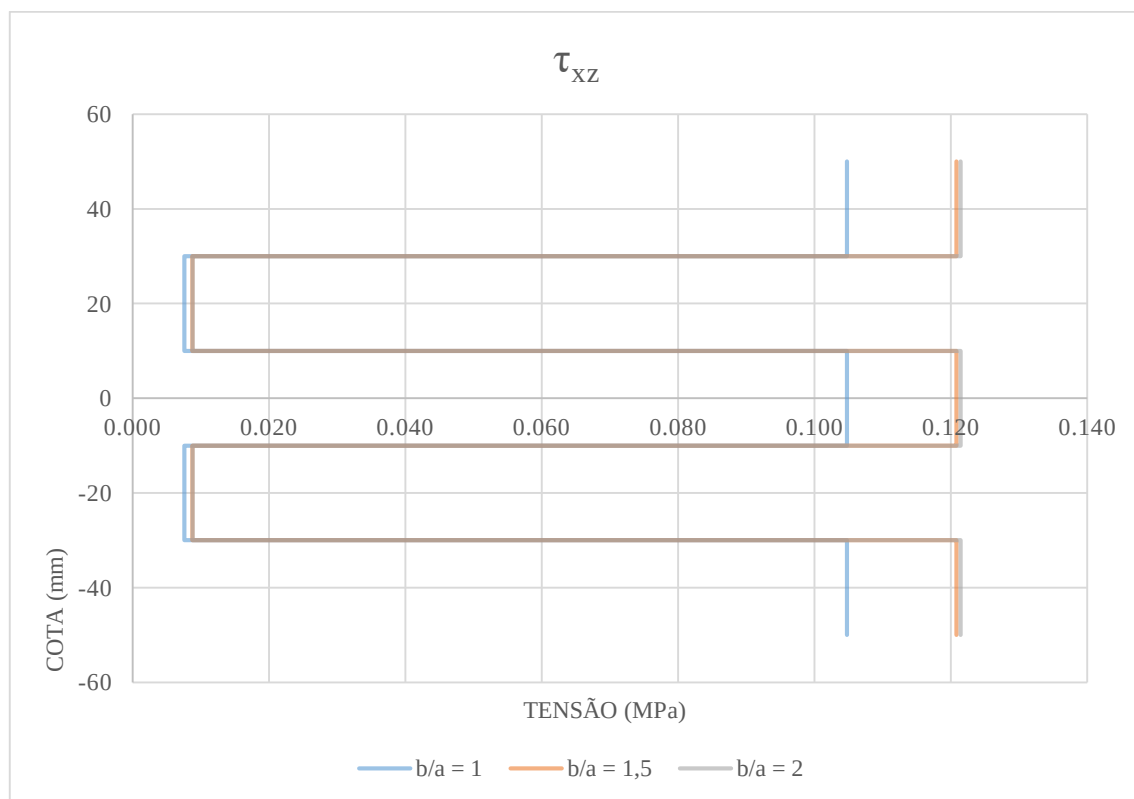
Fonte: O Autor

Figura 4.20 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xy}



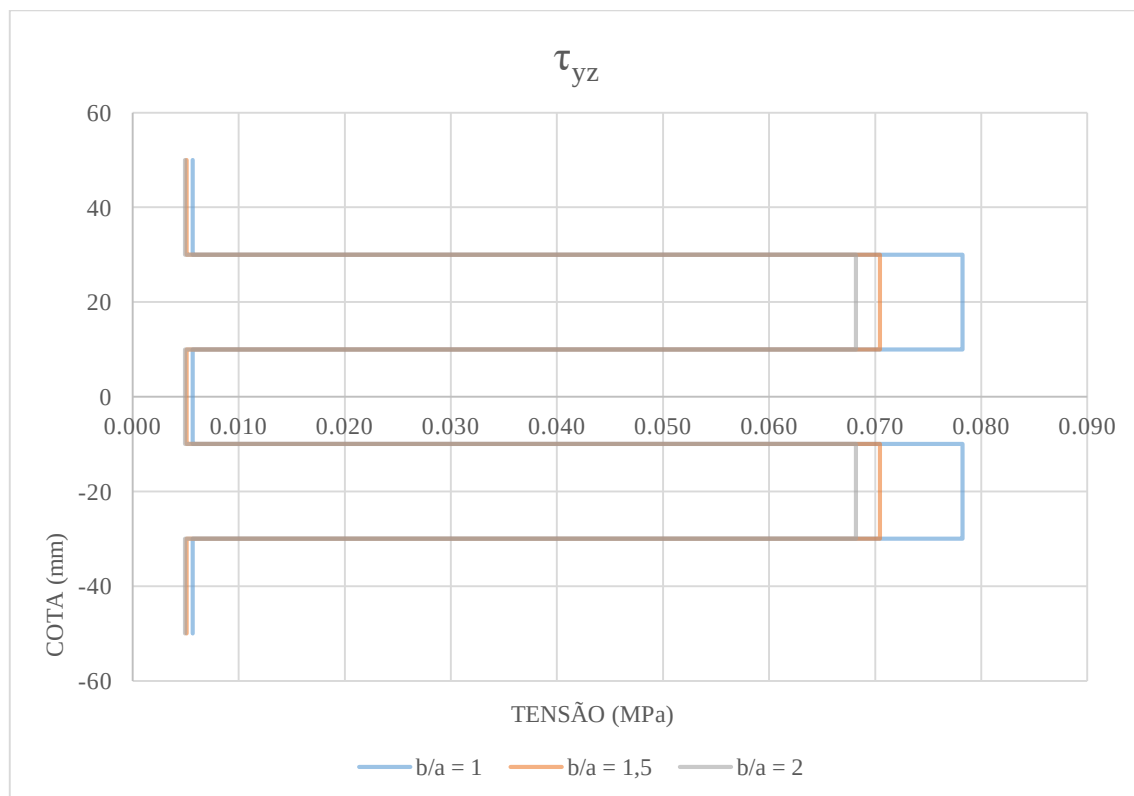
Fonte: O Autor

Figura 4.21 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xz}



Fonte: O Autor

Figura 4.22 – FSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{yz}



Fonte: O Autor

4.1.2.3 FSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , $\bar{Q}_{ij}$, D_{ij} e A_{ij} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Para aplicar a teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem ao painel de MLCC de referência e as suas variações da razão h/b , resta apenas a determinação das rigidezes axiais A_{44} e A_{55} . Os coeficientes $\bar{Q}_{11}$, $\bar{Q}_{12}$, $\bar{Q}_{22}$, $\bar{Q}_{44}$, $\bar{Q}_{55}$ e $\bar{Q}_{66}$ permanecem com os valores utilizados na subseção 4.1.2.1, enquanto que as rigidezes à flexão D_{11} , D_{12} , D_{22} e D_{66} assumem as magnitudes constantes nas Tabelas 4.10 a 4.12. Dessa forma, ao recorrer às Figuras 4.8 a 4.10 e à Equação (4.34), pode-se chegar às rigidezes axiais A_{44} e A_{55} trazidas pelas Tabelas 4.23 a 4.25

Tabela 4.23 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

i	j	$(z_1 - z_2)$	$(z_2 - z_3)$	z_3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	A_{ij}
		(mm)	(mm)	(mm)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N/mm)
4	4	20	20	10	50	690	$3,06 \cdot 10^4$
5	5	20	20	10	690	50	$4,34 \cdot 10^4$

Fonte: O Autor

Tabela 4.24 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

i	j	$(z_1 - z_2)$	$(z_2 - z_3)$	z_3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	A_{ij}
		(mm)	(mm)	(mm)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N/mm)
4	4	30	30	15	50	690	$4,59 \cdot 10^4$
5	5	30	30	15	690	50	$6,51 \cdot 10^4$

Fonte: O Autor

Tabela 4.25 – Rigidezes axiais A_{44} e A_{55} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

i	j	$(z_1 - z_2)$	$(z_2 - z_3)$	z_3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	A_{ij}
		(mm)	(mm)	(mm)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N/mm)
4	4	40	40	20	50	690	$6,12 \cdot 10^4$
5	5	40	40	20	690	50	$8,68 \cdot 10^4$

Fonte: O Autor

4.1.2.4 FSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Os cálculos dos deslocamentos verticais e das tensões, normais e de cisalhamento, para as variações paramétricas da razão h/b do painel de MLCC de referência são idênticos àqueles desenvolvidos para as variações paramétricas da razão b/a . Há apenas duas diferenças: as cotas z a serem avaliadas (Figuras 4.8 a 4.10) e as magnitudes das rigidezes axiais A_{44} e A_{55} , as quais foram estabelecidas na subseção precedente. As Tabelas 4.26 a 4.28 reúnem os valores calculados para as grandezas de interesse considerando a razão h/b igual a $1/30$, $1/20$ e $1/15$, respectivamente.

Imediatamente após as Tabelas 4.26 a 4.28, têm-se as Figuras 4.23 a 4.28, as quais trazem os diagramas de distribuição dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} , nesta ordem.

Tabela 4.26 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	5,533	-3,213	-0,145	0,477	0,105	0,006
0	-30	5,533	-1,928	-0,087	0,286	0,105	0,006
90	-30	5,533	-0,090	-1,776	0,286	0,008	0,078
90	-10	5,533	-0,030	-0,592	0,095	0,008	0,078
0	-10	5,533	-0,643	-0,029	0,095	0,105	0,006
0	0	5,533	0,000	0,000	0,000	0,105	0,006
0	10	5,533	0,643	0,029	-0,095	0,105	0,006
90	10	5,533	0,030	0,592	-0,095	0,008	0,078
90	30	5,533	0,090	1,776	-0,286	0,008	0,078
0	30	5,533	1,928	0,087	-0,286	0,105	0,006
0	50	5,533	3,213	0,145	-0,477	0,105	0,006

Fonte: O Autor

Tabela 4.27 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

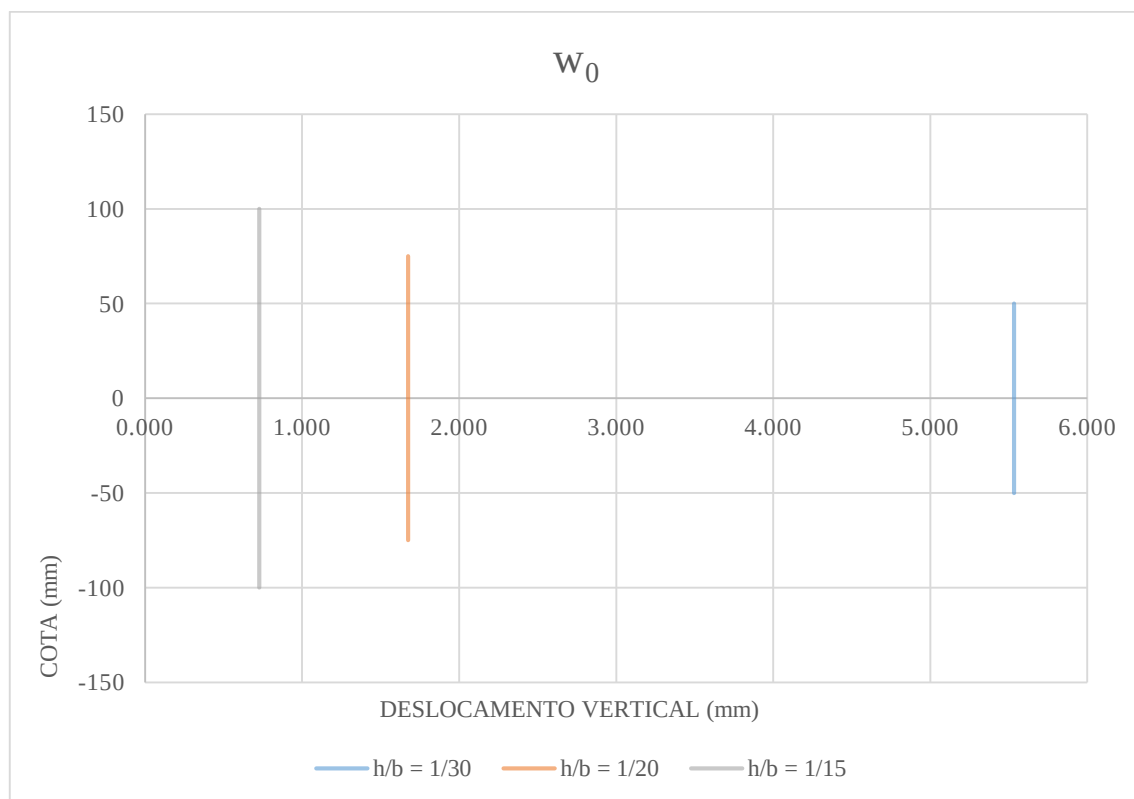
θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-75	1,675	-1,422	-0,065	0,214	0,070	0,004
0	-45	1,675	-0,853	-0,039	0,128	0,070	0,004
90	-45	1,675	-0,040	-0,797	0,128	0,005	0,052
90	-15	1,675	-0,013	-0,266	0,043	0,005	0,052
0	-15	1,675	-0,284	-0,013	0,043	0,070	0,004
0	0	1,675	0,000	0,000	0,000	0,070	0,004
0	15	1,675	0,284	0,013	-0,043	0,070	0,004
90	15	1,675	0,013	0,266	-0,043	0,005	0,052
90	45	1,675	0,040	0,797	-0,128	0,005	0,052
0	45	1,675	0,853	0,039	-0,128	0,070	0,004
0	75	1,675	1,422	0,065	-0,214	0,070	0,004

Fonte: O Autor

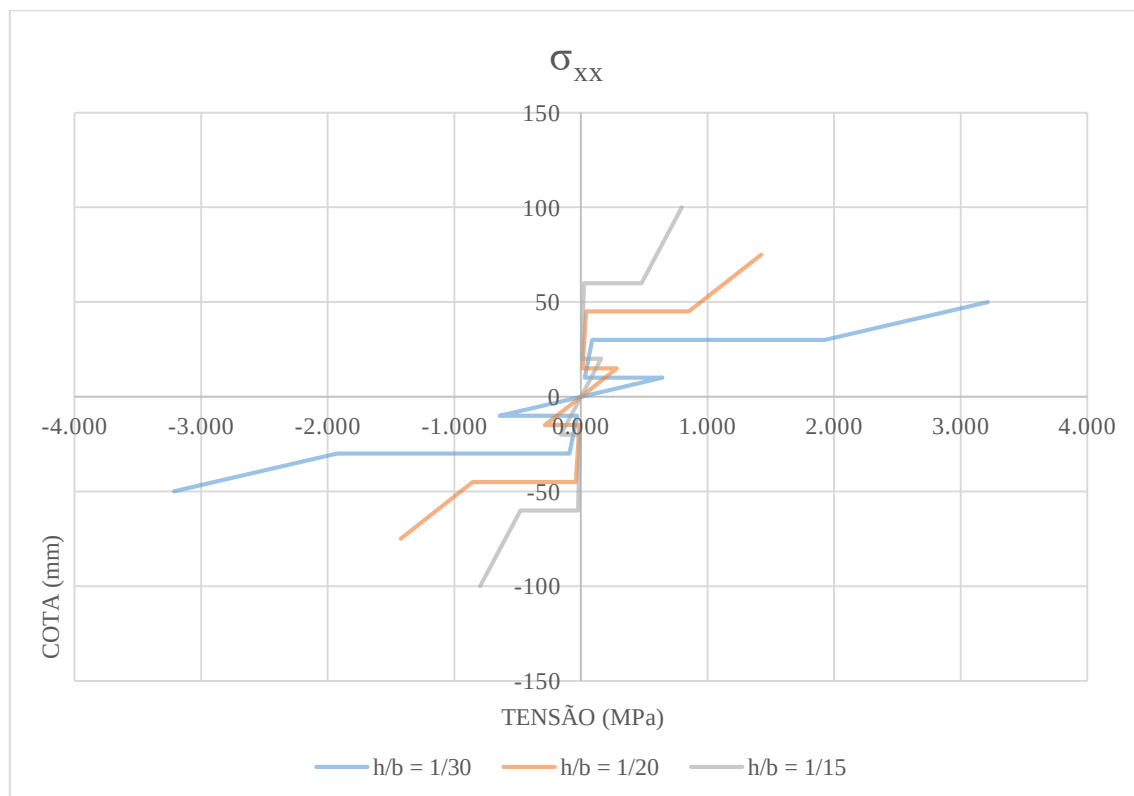
Tabela 4.28 – FSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-100	0,727	-0,796	-0,037	0,121	0,052	0,003
0	-60	0,727	-0,478	-0,022	0,073	0,052	0,003
90	-60	0,727	-0,022	-0,454	0,073	0,004	0,039
90	-20	0,727	-0,007	-0,151	0,024	0,004	0,039
0	-20	0,727	-0,159	-0,007	0,024	0,052	0,003
0	0	0,727	0,000	0,000	0,000	0,052	0,003
0	20	0,727	0,159	0,007	-0,024	0,052	0,003
90	20	0,727	0,007	0,151	-0,024	0,004	0,039
90	60	0,727	0,022	0,454	-0,073	0,004	0,039
0	60	0,727	0,478	0,022	-0,073	0,052	0,003
0	100	0,727	0,796	0,037	-0,121	0,052	0,003

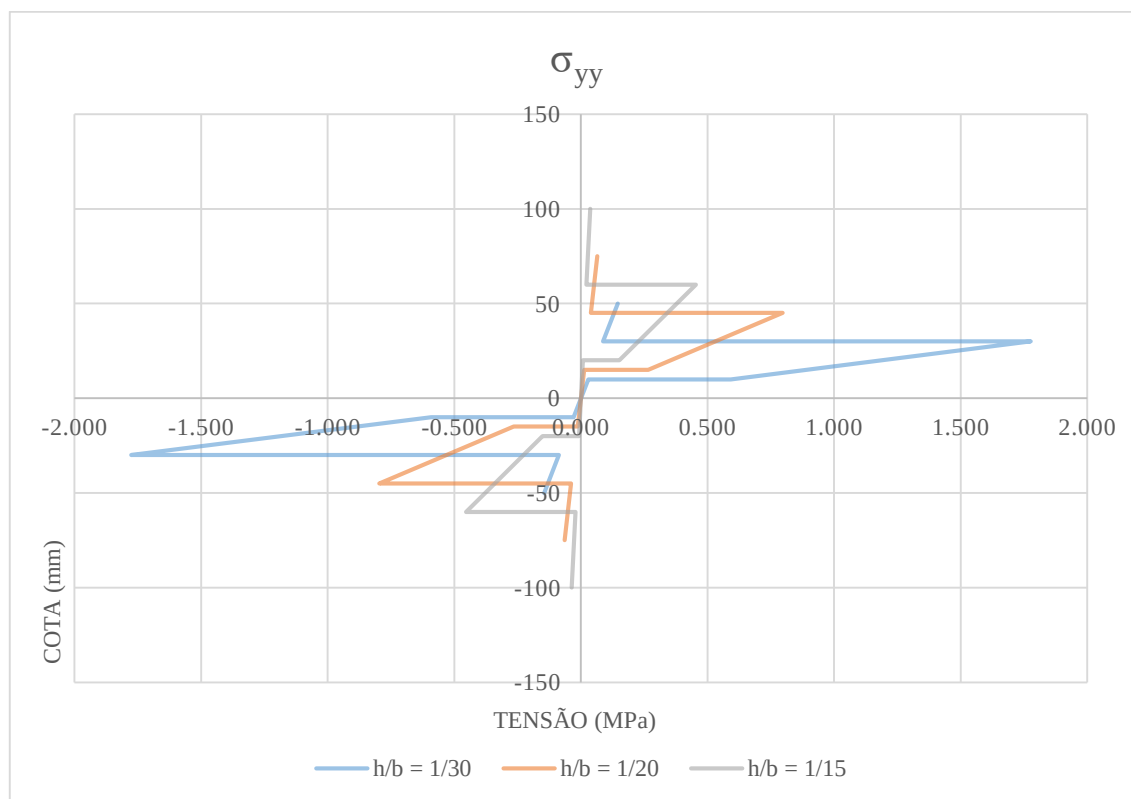
Fonte: O Autor

Figura 4.23 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para os deslocamentos verticais w_0 

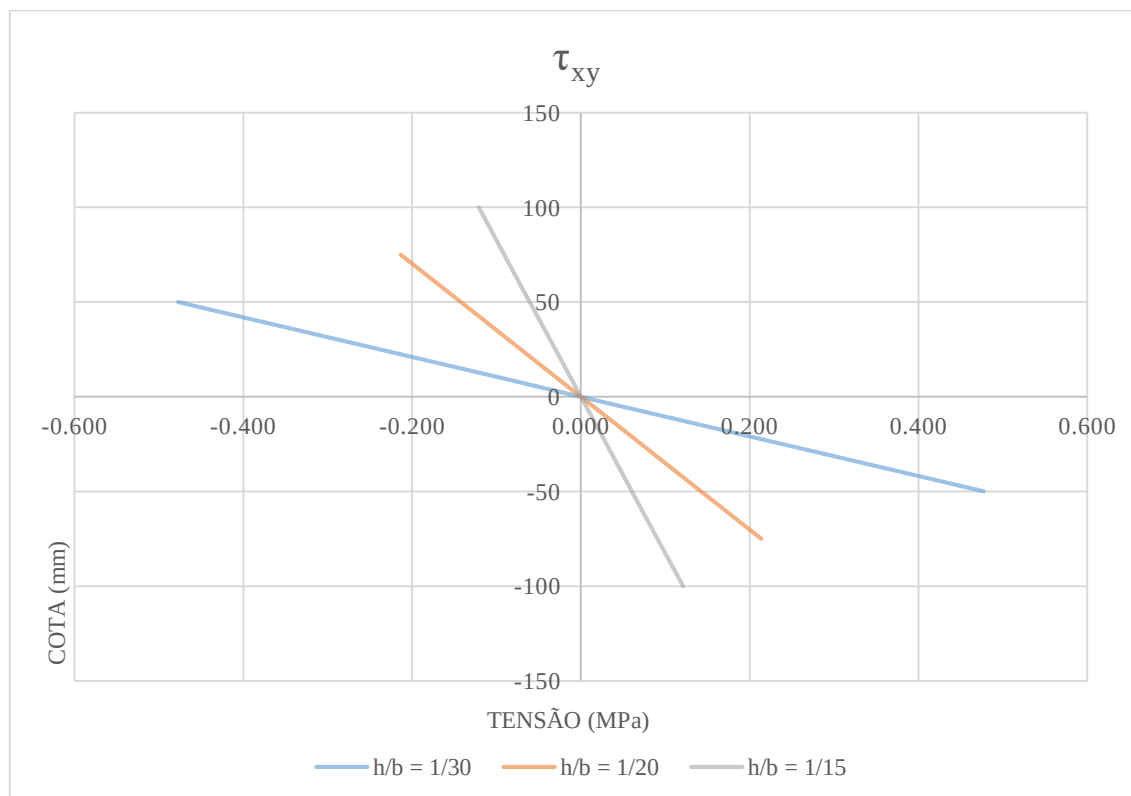
Fonte: O Autor

Figura 4.24 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{xx} 

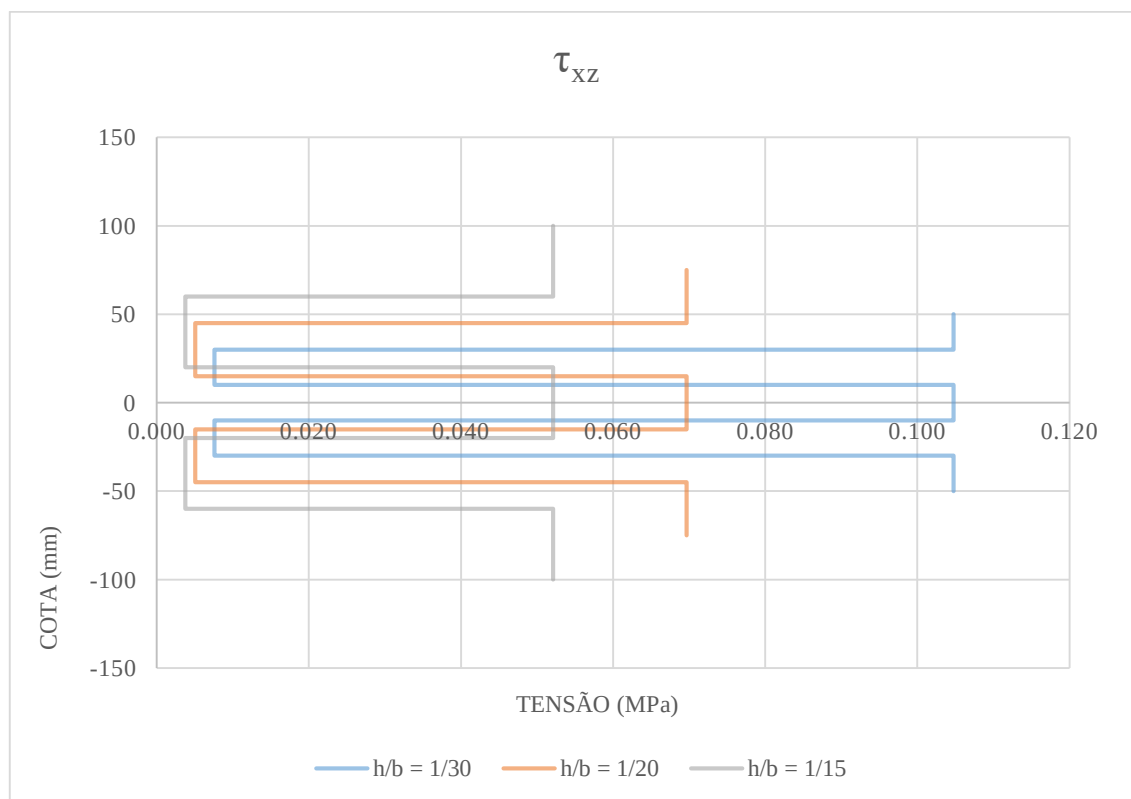
Fonte: O Autor

Figura 4.25 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{yy} 

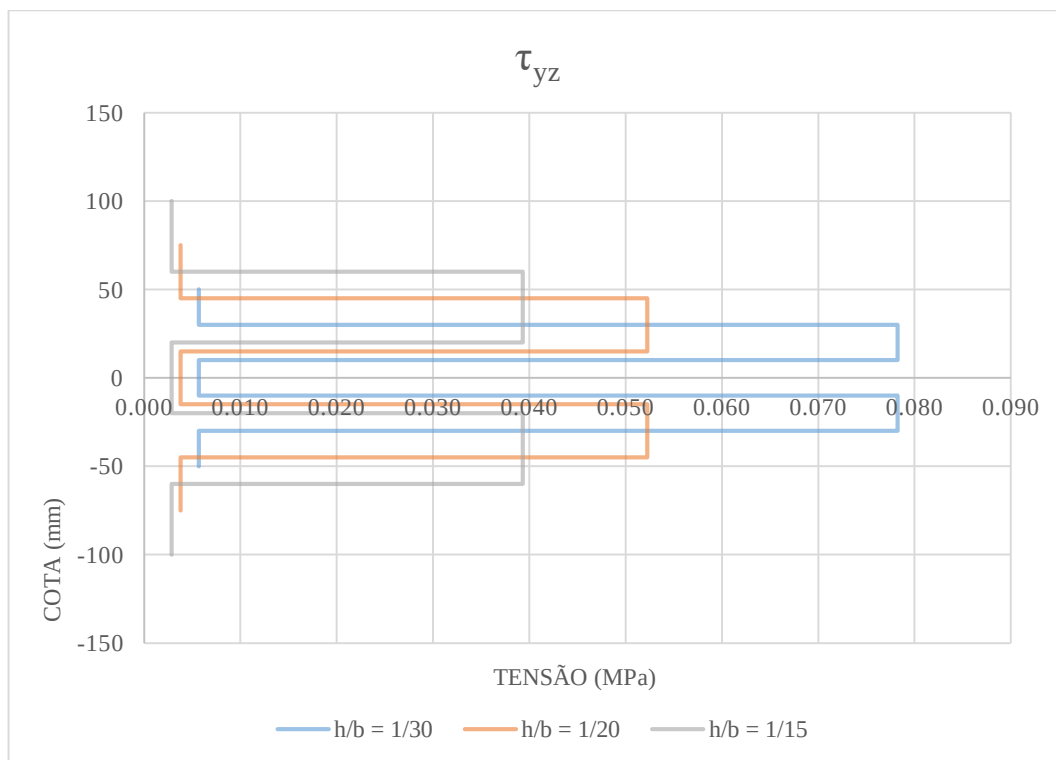
Fonte: O Autor

Figura 4.26 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xy} 

Fonte: O Autor

Figura 4.27 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xz} 

Fonte: O Autor

Figura 4.28 – FSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{yz} 

Fonte: O Autor

4.1.3 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem (TSDT)

4.1.3.1 TSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , $\bar{Q}_{ij}$, D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , H_{ij} , $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Para a aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem, resta a determinação das rigidezes flexionais D_{44} e D_{55} , além dos demais coeficientes identificados por F_{ij} , H_{ij} , $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$. Os coeficientes Q_{ij} , $\bar{Q}_{ij}$, D_{ij} e A_{ij} , obtidos nas subseções precedentes, permanecem inalterados.

Primeiramente, serão calculadas as rigidezes flexionais D_{44} e D_{55} , fazendo-se uso da Figura 4.1 e da Equação (4.14). Como resultados, obtém-se os valores sintetizados na Tabela 4.29.

Tabela 4.29 – Rigidezes à flexão D_{44} e D_{55} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

i	j	$(z_3^3 - z_2^3)$	$(z_2^3 - z_1^3)$	z_1^3	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	D_{ij}
		(mm ³)	(mm ³)	(mm ³)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N·mm)
4	4	98.000	26.000	1.000	50	690	$1,526 \cdot 10^7$
5	5	98.000	26.000	1.000	690	50	$4,641 \cdot 10^7$

Fonte: O Autor

Para as rigidezes de ordem superior F_{ij} e H_{ij} , um procedimento semelhante deve ser seguido, porém fazendo-se uso das Equações (2.295) e (2.29). Essas equações, ao considerar a Figura 4.1, podem ser reescritas da seguinte maneira:

$$F_{ij} = \frac{1}{5} \left[2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) (z_1^5 - z_2^5) + 2 \bar{Q}_{ij}(90^\circ) (z_2^5 - z_3^5) + 2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) z_3^5 \right] \quad (4.56)$$

$$H_{ij} = \frac{1}{7} \left[2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) (z_1^7 - z_2^7) + 2 \bar{Q}_{ij}(90^\circ) (z_2^7 - z_3^7) + 2 \bar{Q}_{ij}(0^\circ) z_3^7 \right] \quad (4.57)$$

As Tabelas 4.30 e 4.31 reúnem, respectivamente, as magnitudes encontradas para as rigidezes de ordem 5 (F_{11} , F_{12} , F_{22} , F_{44} , F_{55} e F_{66}) e de ordem 7 (H_{11} , H_{12} , H_{22} e H_{66}).

Tabela 4.30 – Rigidezes F_{11} , F_{12} , F_{22} , F_{44} , F_{55} e F_{66} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

i	j	$(z_3^5 - z_2^5)$	$(z_2^5 - z_1^5)$	z_1^5	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	F_{ij}
		(mm ⁵)	(mm ⁵)	(mm ⁵)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N·mm ³)
1	1	288.200.000	24.200.000	100.000	11.072,102	372,425	$1,280 \cdot 10^{12}$
1	2	288.200.000	24.200.000	100.000	163,867	163,867	$2,048 \cdot 10^{10}$
2	2	288.200.000	24.200.000	100.000	372,425	11.072,102	$1,501 \cdot 10^{11}$
4	4	288.200.000	24.200.000	100.000	50	690	$1,245 \cdot 10^{10}$
5	5	288.200.000	24.200.000	100.000	690	50	$8,005 \cdot 10^{10}$
6	6	288.200.000	24.200.000	100.000	690	690	$8,625 \cdot 10^{10}$

Fonte: O Autor

Tabela 4.31 – Rigidezes H_{11} , H_{12} , H_{22} e H_{66} para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

i	j	$(z_3^7 - z_2^7)$	$(z_2^7 - z_1^7)$	z_1^7	$\bar{Q}_{ij}(0^\circ)$	$\bar{Q}_{ij}(90^\circ)$	H_{ij}
		(mm ⁷)	(mm ⁷)	(mm ⁷)	(N/mm ²)	(N/mm ²)	(N·mm ⁵)
1	1	$7,5938 \cdot 10^{11}$	21.860.000.000	10.000.000	11.072,102	372,425	$2,405 \cdot 10^{15}$
1	2	$7,5938 \cdot 10^{11}$	21.860.000.000	10.000.000	163,867	163,867	$3,658 \cdot 10^{13}$
2	2	$7,5938 \cdot 10^{11}$	21.860.000.000	10.000.000	372,425	11.072,102	$1,500 \cdot 10^{14}$
6	6	$7,5938 \cdot 10^{11}$	21.860.000.000	10.000.000	690	690	$1,540 \cdot 10^{14}$

Fonte: O Autor

Posteriormente ao cômputo das rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} , pode-se proceder com a determinação dos coeficientes $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ cujas expressões são retomadas a seguir:

a) Para $i, j = 1, 2$ e 6 :

$$\hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_1 F_{ij} \quad (4.58)$$

$$\hat{F}_{ij} = F_{ij} - c_1 H_{ij} \quad (4.59)$$

$$\bar{D}_{ij} = \hat{D}_{ij} - c_1 \hat{F}_{ij} \quad (4.60)$$

b) Para $i, j = 4$ e 5 :

$$\hat{A}_{ij} = A_{ij} - c_2 D_{ij} \quad (4.61)$$

$$\hat{D}_{ij} = D_{ij} - c_2 F_{ij} \quad (4.62)$$

$$\bar{A}_{ij} = \hat{A}_{ij} - c_2 \hat{D}_{ij} \quad (4.63)$$

c) Coeficientes c_1 e c_2 :

$$c_1 = \frac{4}{3 h^2} \quad (4.64)$$

$$c_2 = 3 c_1 = \frac{4}{h^2} \quad (4.65)$$

A partir das rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} (reunidas na Tabela 4.32) e das Equações (4.58) a (4.65), chega-se aos valores dos coeficientes $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ apresentados na Tabela 4.33.

Tabela 4.32 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} obtidas para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

i	j	D_{ij}	A_{ij}	F_{ij}	H_{ij}
		(N·mm)	(N/mm)	(N·mm ³)	(N·mm ⁵)
1	1	$7,372 \cdot 10^8$	-	$1,280 \cdot 10^{12}$	$2,405 \cdot 10^{15}$
1	2	$1,366 \cdot 10^7$	-	$2,048 \cdot 10^{10}$	$3,658 \cdot 10^{13}$
2	2	$2,165 \cdot 10^8$	-	$1,501 \cdot 10^{11}$	$1,500 \cdot 10^{14}$
4	4	$1,526 \cdot 10^7$	$3,060 \cdot 10^4$	$1,245 \cdot 10^{10}$	-
5	5	$4,641 \cdot 10^7$	$4,340 \cdot 10^4$	$8,005 \cdot 10^{10}$	-
6	6	$5,750 \cdot 10^7$	-	$8,625 \cdot 10^{10}$	$1,540 \cdot 10^{14}$

Fonte: O Autor

Tabela 4.33 – Coeficientes $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

i	j	c ₁	c ₂	$\hat{F}_{ij}$	$\hat{D}_{ij}$	$\bar{D}_{ij}$	$\hat{A}_{ij}$	$\bar{A}_{ij}$
		(mm ²)	(mm ²)	(N·mm ³)	(N·mm)	(N·mm)	(N/mm)	(N/mm)
1	1	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$9,598 \cdot 10^{11}$	$5,665 \cdot 10^8$	$4,385 \cdot 10^8$	-	-
1	2	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1,561 \cdot 10^{10}$	$1,092 \cdot 10^7$	$8,844 \cdot 10^6$	-	-
2	2	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1,301 \cdot 10^{11}$	$1,965 \cdot 10^8$	$1,791 \cdot 10^8$	-	-
4	4	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	-	$1,028 \cdot 10^7$	-	$2,450 \cdot 10^4$	$2,038 \cdot 10^4$
5	5	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	-	$1,438 \cdot 10^7$	-	$2,484 \cdot 10^4$	$1,908 \cdot 10^4$
6	6	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6,571 \cdot 10^{10}$	$4,600 \cdot 10^7$	$3,724 \cdot 10^7$	-	-

Fonte: O Autor

4.1.3.2 TSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Para a aplicação da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem, empregam-se novamente os pontos críticos sintetizados anteriormente nas Tabelas 4.2 e 4.6. As Equações (2.297), (2.318), (2.319), (2.320), (2.327) e (2.328), as quais são necessárias aos cálculos dos deslocamentos verticais w_0 e das tensões σ_{xx} , σ_{yy} , τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} , respectivamente, são retomadas adiante, com a indicação dos valores de m e n a serem considerados. Além disso, são resgatadas algumas equações auxiliares, mais precisamente as Equações (2.215) a (2.221), (2.306) a (3.311) e (2.321) a (3.326).

a) Equação para o cômputo dos deslocamentos verticais w_0 :

$$w_0(x,y) = \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} W_{mn} \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (4.66)$$

b) Equação para o cômputo das tensões normais σ_{xx} :

$$\sigma_{xx} = \bar{Q}_{11} \left[\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (z S_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] + \bar{Q}_{12} \left[\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (z S_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \quad (4.67)$$

c) Equação para o cômputo das tensões normais σ_{yy} :

$$\sigma_{yy} = \bar{Q}_{12} \left[\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (z S_{mn}^{xx} + c_1 z^3 T_{mn}^{xx}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] + \bar{Q}_{22} \left[\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (z S_{mn}^{yy} + c_1 z^3 T_{mn}^{yy}) \sin(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \right] \quad (4.68)$$

d) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{xy} :

$$\tau_{xy} = \bar{Q}_{66} \left[\sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} (z S_{mn}^{xy} + c_1 z^3 T_{mn}^{xy}) \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \right] \quad (4.69)$$

e) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{xz} :

$$\tau_{xz} = (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} [Q_{55} (X_{mn} + \alpha_m W_{mn})] \cos(\alpha_m x) \sin(\beta_n y) \quad (4.70)$$

f) Equação para o cômputo das tensões de cisalhamento τ_{yz} :

$$\tau_{yz} = (1 - c_2 z^2) \sum_{m=1}^{19} \sum_{n=1}^{19} [Q_{44} (Y_{mn} + \beta_n W_{mn})] \sin(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (4.71)$$

g) Equações auxiliares referentes aos parâmetros W_{mn} , X_{mn} e Y_{mn} :

$$W_{mn} = \frac{b_0}{b_{mn}} q_{mn} \quad (4.72)$$

$$X_{mn} = \frac{b_1}{b_{mn}} q_{mn} \quad (4.73)$$

$$Y_{mn} = \frac{b_2}{b_{mn}} q_{mn} \quad (4.74)$$

h) Equações auxiliares referentes aos parâmetros b_{mn} , b_0 , b_1 e b_2 :

$$b_{mn} = \hat{s}_{11} b_0 + \hat{s}_{12} b_1 + \hat{s}_{13} b_2 \quad (4.75)$$

$$b_0 = \hat{s}_{22} \hat{s}_{33} - \hat{s}_{23} \hat{s}_{23} \quad (4.76)$$

$$b_1 = \hat{s}_{22} \hat{s}_{13} - \hat{s}_{12} \hat{s}_{33} \quad (4.77)$$

$$b_2 = \hat{s}_{12} \hat{s}_{23} - \hat{s}_{22} \hat{s}_{13} \quad (4.78)$$

i) Equações auxiliares referentes aos parâmetros $\hat{s}$:

$$\hat{s}_{11} = \overline{A}_{55} \alpha_m^2 + \overline{A}_{44} \beta_n^2 + c_1^2 [H_{11} \alpha_m^4 + 2 (H_{12} + 2 H_{66}) \alpha_m^2 \beta_n^2 + H_{22} \beta_n^4] \quad (4.79)$$

$$\hat{s}_{12} = \overline{A}_{55} \alpha_m - c_1 [\hat{F}_{11} \alpha_m^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha_m \beta_n^2] \quad (4.80)$$

$$\hat{s}_{13} = \overline{A}_{44} \beta_n - c_1 [\hat{F}_{22} \beta_n^3 + (\hat{F}_{12} + 2 \hat{F}_{66}) \alpha_m^2 \beta_n] \quad (4.81)$$

$$\hat{s}_{22} = \overline{A}_{55} + \overline{D}_{11} \alpha_m^2 + \overline{D}_{66} \beta_n^2 \quad (4.82)$$

$$\hat{s}_{23} = (\overline{D}_{12} + \overline{D}_{66}) \alpha_m \beta_n \quad (4.83)$$

$$\hat{s}_{33} = \overline{A}_{44} + \overline{D}_{66} \alpha_m^2 + \overline{D}_{22} \beta_n^2 \quad (4.84)$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a} \quad (4.85)$$

$$\beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad (4.86)$$

j) Equações auxiliares referentes aos parâmetros S_{mn} e T_{mn} :

$$S_{mn}^{xx} = -\alpha_m X_{mn} \quad (4.87)$$

$$S_{mn}^{yy} = -\beta_n Y_{mn} \quad (4.88)$$

$$S_{mn}^{xy} = \beta_n X_{mn} + \alpha_m Y_{mn} \quad (4.89)$$

$$T_{mn}^{xx} = \alpha_m X_{mn} + \alpha_m^2 W_{mn} \quad (4.90)$$

$$T_{mn}^{yy} = \beta_n Y_{mn} + \beta_n^2 W_{mn} \quad (4.91)$$

$$T_{mn}^{xy} = -(\beta_n X_{mn} + \alpha_m Y_{mn} + 2\alpha_m \beta_n W_{mn}) \quad (4.92)$$

Por meio de uma rotina de cálculo semelhante àquelas discutidas para as teorias de placas anteriores, obtém-se os resultados reunidos nas Tabelas 4.34 a 4.36, bem como os diagramas de distribuições dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento ilustrados nas Figuras 4.29 a 4.34.

Tabela 4.34 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	5,563	-3,217	-0,146	0,483	0,000	0,000
0	-30	5,563	-1,919	-0,087	0,286	0,117	0,005
90	-30	5,563	-0,090	-1,784	0,286	0,009	0,066
90	-10	5,563	-0,030	-0,594	0,095	0,013	0,100
0	-10	5,563	-0,638	-0,029	0,095	0,176	0,007
0	0	5,563	0,000	0,000	0,000	0,183	0,008
0	10	5,563	0,638	0,029	-0,095	0,176	0,007
90	10	5,563	0,030	0,594	-0,095	0,013	0,100
90	30	5,563	0,090	1,784	-0,286	0,009	0,066
0	30	5,563	1,919	0,087	-0,286	0,117	0,005
0	50	5,563	3,217	0,146	-0,483	0,000	0,000

Fonte: O Autor

Tabela 4.35 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,5$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	7,285	-4,223	-0,104	0,493	0,000	0,000
0	-30	7,285	-2,519	-0,062	0,293	0,135	0,004
90	-30	7,285	-0,095	-0,781	0,293	0,010	0,060
90	-10	7,285	-0,032	-0,261	0,097	0,015	0,089
0	-10	7,285	-0,837	-0,021	0,097	0,203	0,006
0	0	7,285	0,000	0,000	0,000	0,211	0,007
0	10	7,285	0,837	0,021	-0,097	0,203	0,006
90	10	7,285	0,032	0,261	-0,097	0,015	0,089
90	30	7,285	0,095	0,781	-0,293	0,010	0,060
0	30	7,285	2,519	0,062	-0,293	0,135	0,004
0	50	7,285	4,223	0,104	-0,493	0,000	0,000

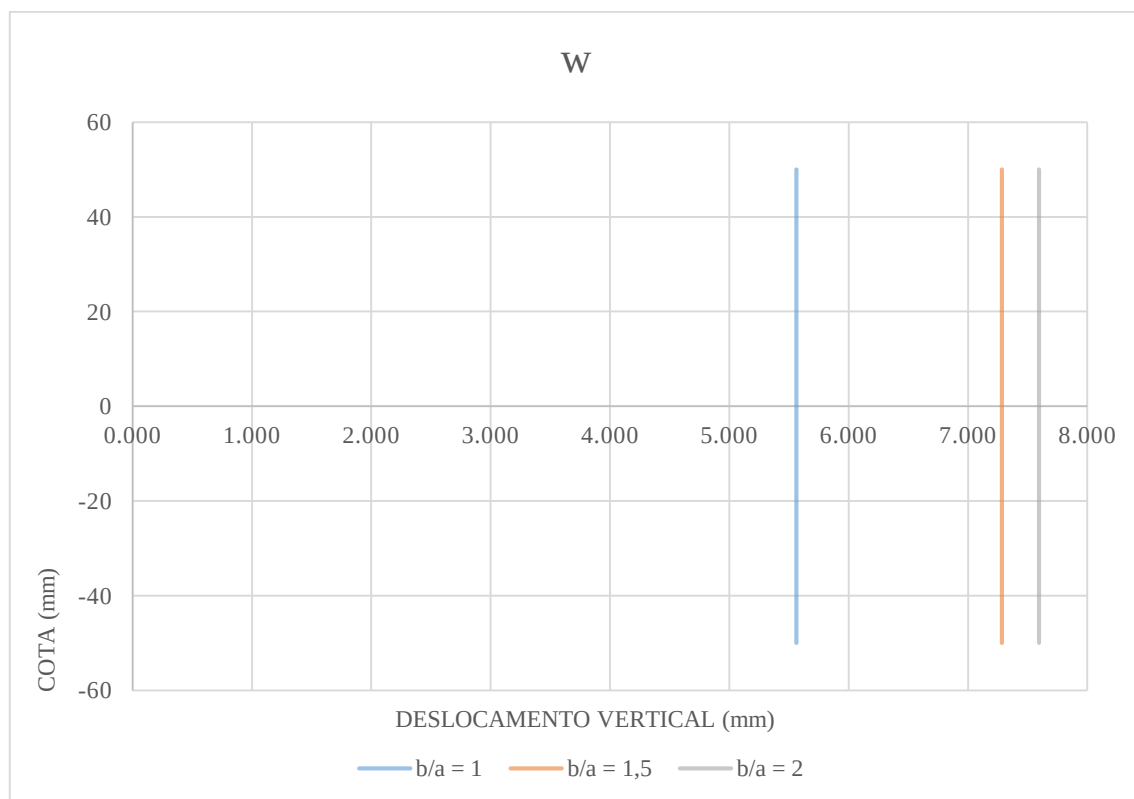
Fonte: O Autor

Tabela 4.36 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $b/a = 2,0$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	7,594	-4,397	-0,076	0,485	0,000	0,000
0	-30	7,594	-2,624	-0,046	0,288	0,136	0,004
90	-30	7,594	-0,091	-0,240	0,288	0,010	0,058
90	-10	7,594	-0,030	-0,080	0,095	0,015	0,086
0	-10	7,594	-0,872	-0,015	0,095	0,203	0,006
0	0	7,594	0,000	0,000	0,000	0,212	0,007
0	10	7,594	0,872	0,015	-0,095	0,203	0,006
90	10	7,594	0,030	0,080	-0,095	0,015	0,086
90	30	7,594	0,091	0,240	-0,288	0,010	0,058
0	30	7,594	2,624	0,046	-0,288	0,136	0,004
0	50	7,594	4,397	0,076	-0,485	0,000	0,000

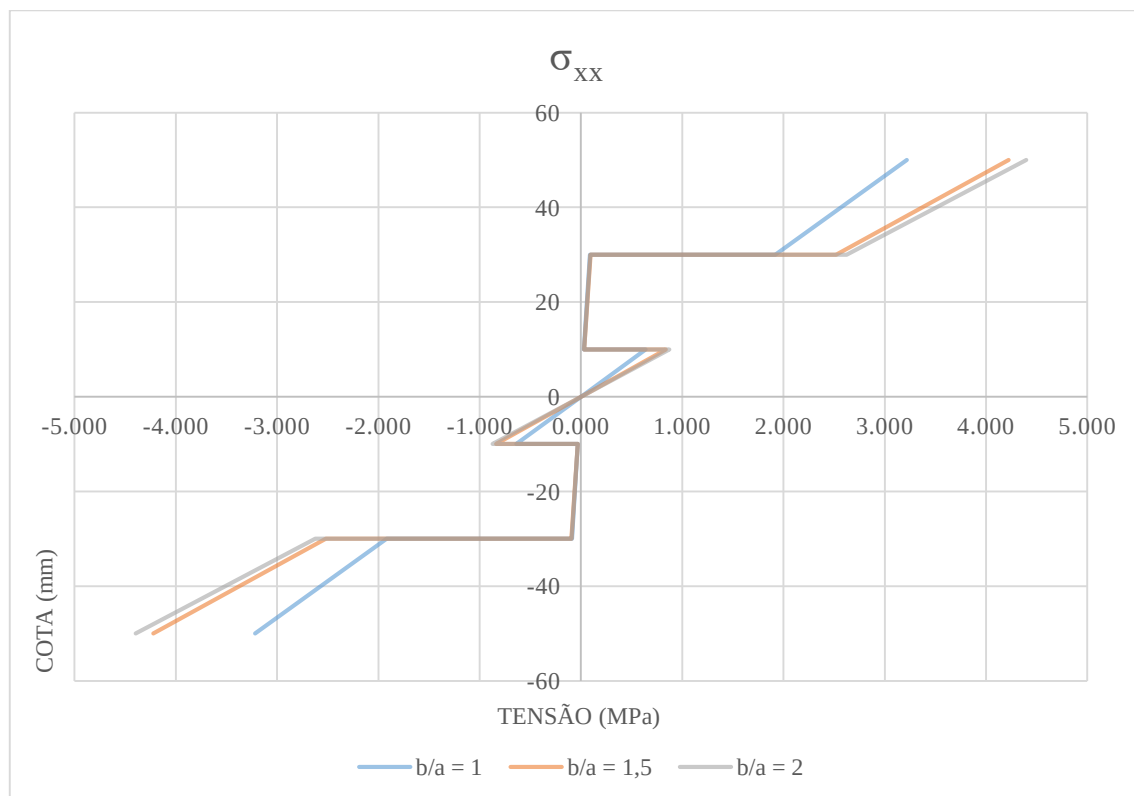
Fonte: O Autor

Figura 4.29 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para os deslocamentos verticais w_0



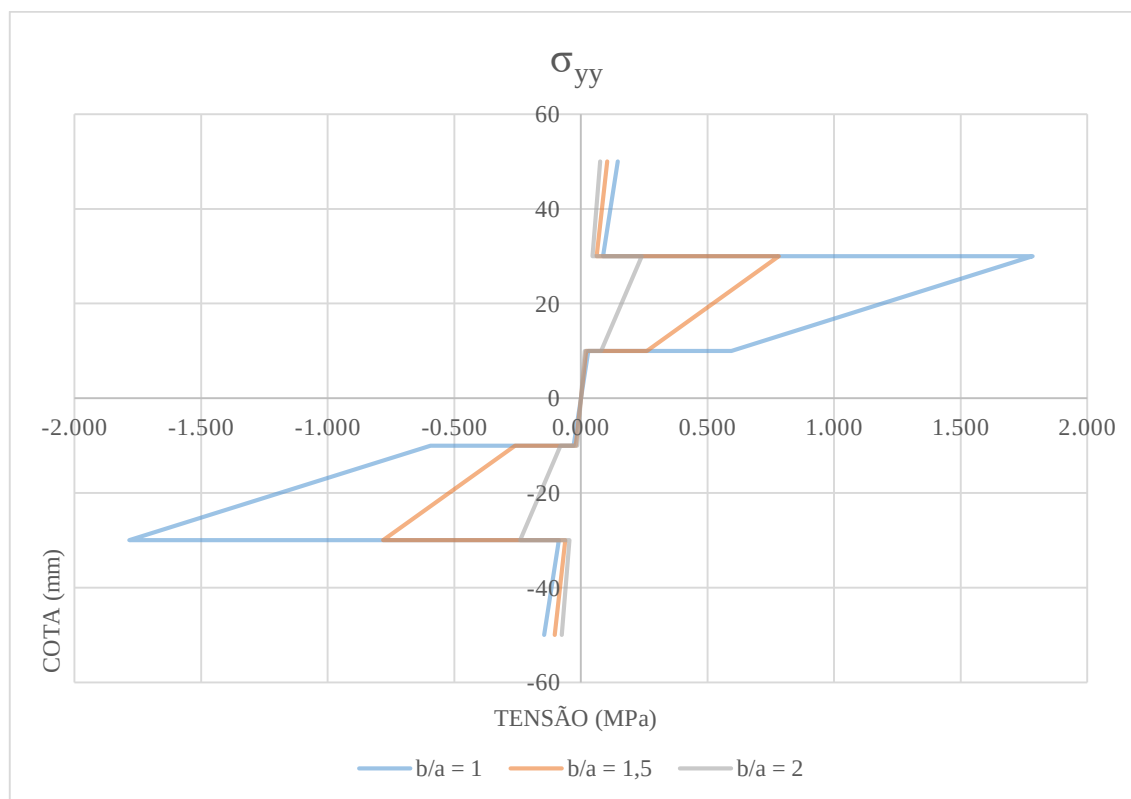
Fonte: O Autor

Figura 4.30 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{xx}



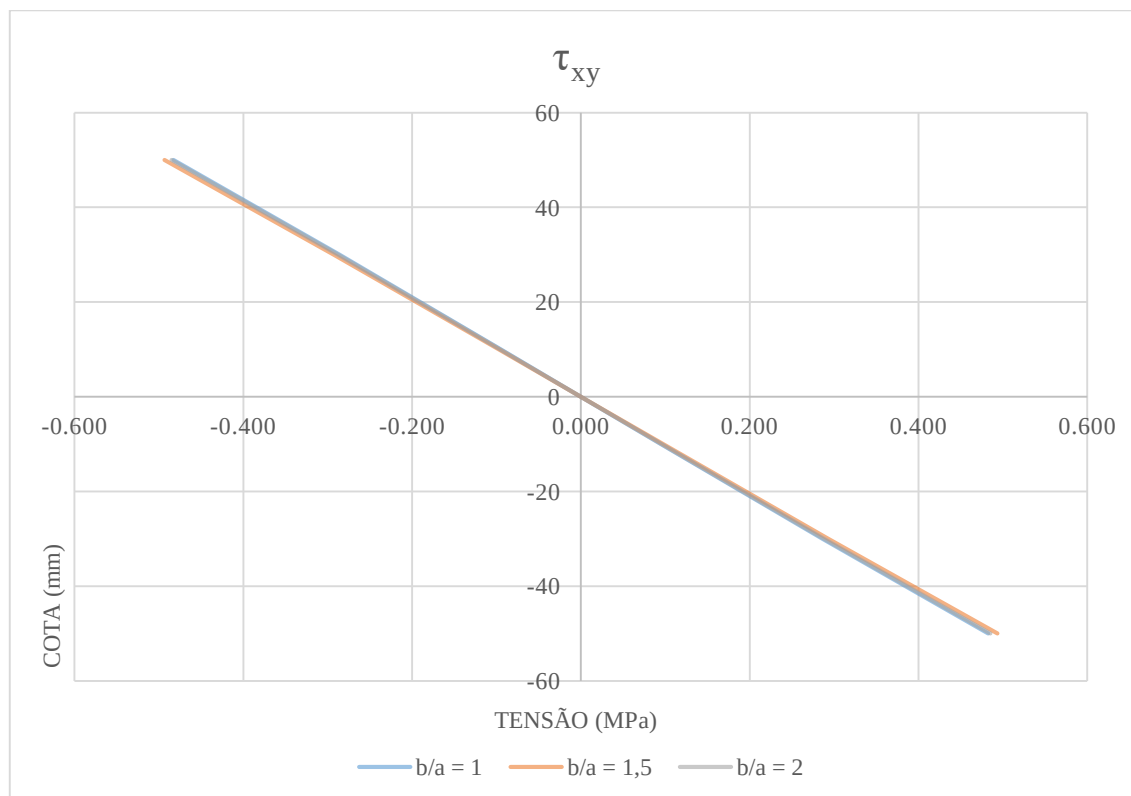
Fonte: O Autor

Figura 4.31 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões normais σ_{yy}



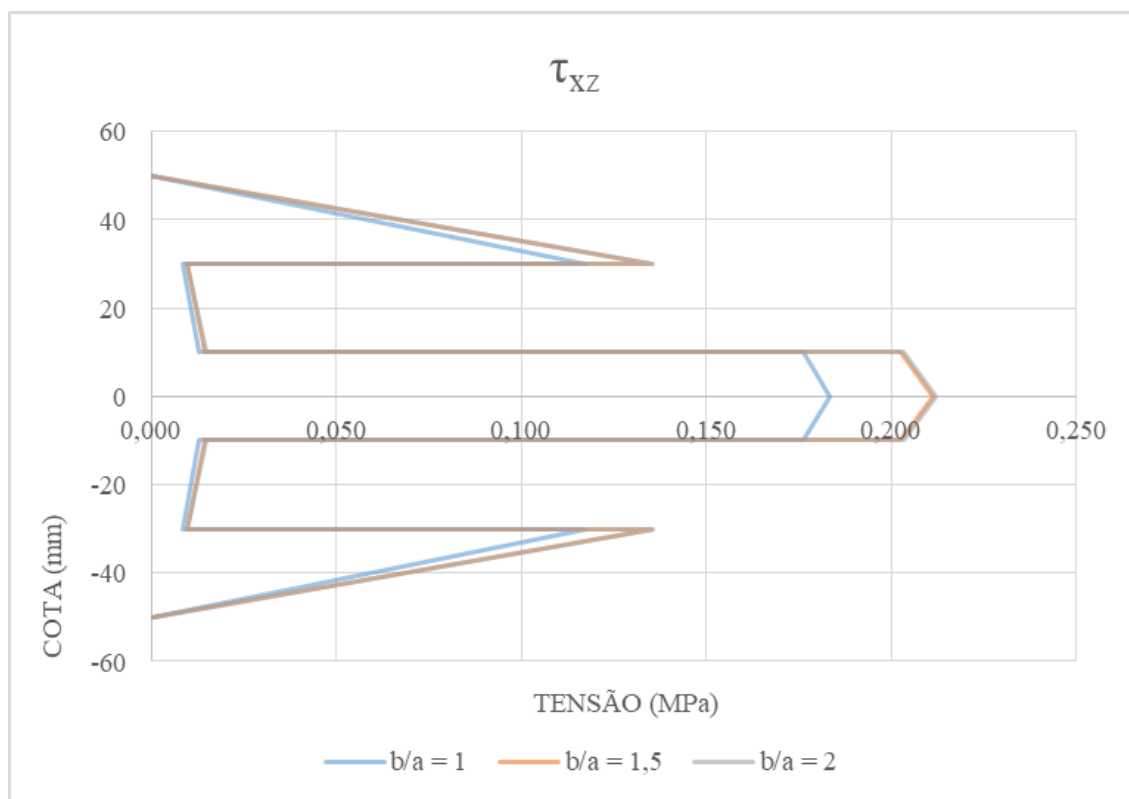
Fonte: O Autor

Figura 4.32 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xy}



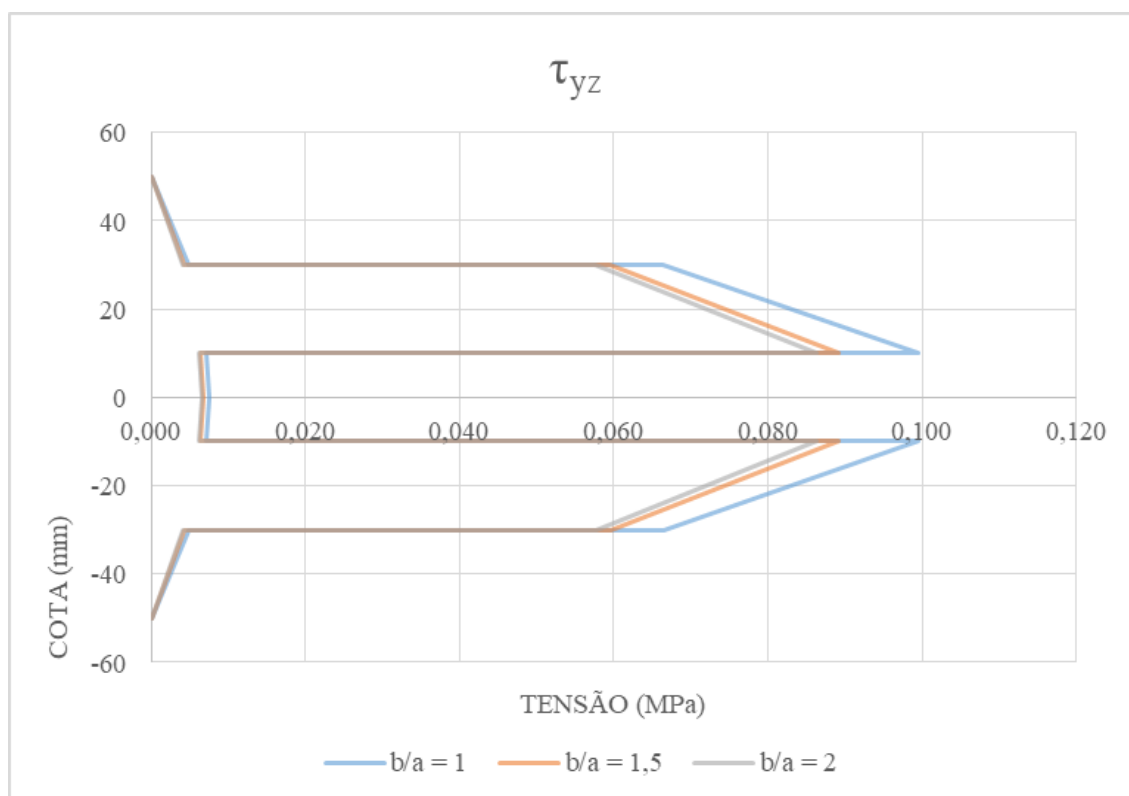
Fonte: O Autor

Figura 4.33 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{xz}



Fonte: O Autor

Figura 4.34 – TSDT: avaliação paramétrica da razão b/a para as tensões de cisalhamento τ_{yz}



Fonte: O Autor

4.1.3.3 TSDT: cálculos dos coeficientes Q_{ij} , $\bar{Q}_{ij}$, D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , H_{ij} , $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ para o painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Os mesmos cálculos desenvolvidos na subseção 4.1.3.1 devem ser repetidos para o cômputo dos coeficientes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} , H_{ij} , $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$, referentes às variações paramétricas da razão h/b do painel de MLCC de referência. Por meio do procedimento aludido e com o auxílio das Figuras 4.8 a 4.10, são encontrados os valores dos coeficientes em questão, os quais estão elencados nas Tabelas 4.37 a 4.42.

Tabela 4.37 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

i	j	D_{ij}	A_{ij}	F_{ij}	H_{ij}
		(N·mm)	(N/mm)	(N·mm ³)	(N·mm ⁵)
1	1	$7,372 \cdot 10^8$	-	$1,280 \cdot 10^{12}$	$2,405 \cdot 10^{15}$
1	2	$1,366 \cdot 10^7$	-	$2,048 \cdot 10^{10}$	$3,658 \cdot 10^{13}$
2	2	$2,165 \cdot 10^8$	-	$1,501 \cdot 10^{11}$	$1,500 \cdot 10^{14}$
4	4	$1,526 \cdot 10^7$	$3,060 \cdot 10^4$	$1,245 \cdot 10^{10}$	-
5	5	$4,641 \cdot 10^7$	$4,340 \cdot 10^4$	$8,005 \cdot 10^{10}$	-
6	6	$5,750 \cdot 10^7$	-	$8,625 \cdot 10^{10}$	$1,540 \cdot 10^{14}$

Fonte: O Autor

Tabela 4.38 – Coeficientes $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

i	j	c_1	c_2	$\hat{F}_{ij}$	$\hat{D}_{ij}$	$\bar{D}_{ij}$	$\hat{A}_{ij}$	$\bar{A}_{ij}$
		(mm ⁻²)	(mm ⁻²)	(N·mm ³)	(N·mm)	(N·mm)	(N/mm)	(N/mm)
1	1	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$9,598 \cdot 10^{11}$	$5,665 \cdot 10^8$	$4,385 \cdot 10^8$	-	-
1	2	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1,561 \cdot 10^{10}$	$1,092 \cdot 10^7$	$8,844 \cdot 10^6$	-	-
2	2	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$1,301 \cdot 10^{11}$	$1,965 \cdot 10^8$	$1,791 \cdot 10^8$	-	-
4	4	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	-	$1,028 \cdot 10^7$	-	$2,450 \cdot 10^4$	$2,038 \cdot 10^4$
5	5	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	-	$1,438 \cdot 10^7$	-	$2,484 \cdot 10^4$	$1,908 \cdot 10^4$
6	6	$1,333 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^{-4}$	$6,571 \cdot 10^{10}$	$4,600 \cdot 10^7$	$3,724 \cdot 10^7$	-	-

Fonte: O Autor

Tabela 4.39 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

i	j	D_{ij}	A_{ij}	F_{ij}	H_{ij}
		(N·mm)	(N/mm)	(N·mm ³)	(N·mm ⁵)
1	1	$2,488 \cdot 10^9$	-	$9,723 \cdot 10^{12}$	$4,109 \cdot 10^{16}$
1	2	$4,609 \cdot 10^7$	-	$1,555 \cdot 10^{11}$	$6,250 \cdot 10^{14}$
2	2	$7,307 \cdot 10^8$	-	$1,140 \cdot 10^{12}$	$2,562 \cdot 10^{15}$
4	4	$5,150 \cdot 10^7$	$4,590 \cdot 10^4$	$9,451 \cdot 10^{10}$	-
5	5	$1,566 \cdot 10^8$	$6,510 \cdot 10^4$	$6,079 \cdot 10^{11}$	-
6	6	$1,941 \cdot 10^8$	-	$6,550 \cdot 10^{11}$	$2,632 \cdot 10^{15}$

Fonte: O Autor

Tabela 4.40 – Coeficientes $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

i	j	c_1	c_2	$\hat{F}_{ij}$	$\hat{D}_{ij}$	$\bar{D}_{ij}$	$\hat{A}_{ij}$	$\bar{A}_{ij}$
		(mm ⁻²)	(mm ⁻²)	(N·mm ³)	(N·mm)	(N·mm)	(N/mm)	(N/mm)
1	1	$5,926 \cdot 10^{-5}$	$1,778 \cdot 10^{-4}$	$7,289 \cdot 10^{12}$	$1,912 \cdot 10^9$	$1,480 \cdot 10^9$	-	-
1	2	$5,926 \cdot 10^{-5}$	$1,778 \cdot 10^{-4}$	$1,185 \cdot 10^{11}$	$3,687 \cdot 10^7$	$2,985 \cdot 10^7$	-	-
2	2	$5,926 \cdot 10^{-5}$	$1,778 \cdot 10^{-4}$	$9,882 \cdot 10^{11}$	$6,631 \cdot 10^8$	$6,046 \cdot 10^8$	-	-
4	4	$5,926 \cdot 10^{-5}$	$1,778 \cdot 10^{-4}$	-	$3,470 \cdot 10^7$	-	$3,674 \cdot 10^4$	$3,057 \cdot 10^4$
5	5	$5,926 \cdot 10^{-5}$	$1,778 \cdot 10^{-4}$	-	$4,855 \cdot 10^7$	-	$3,726 \cdot 10^4$	$2,863 \cdot 10^4$
6	6	$5,926 \cdot 10^{-5}$	$1,778 \cdot 10^{-4}$	$4,990 \cdot 10^{11}$	$1,553 \cdot 10^8$	$1,275 \cdot 10^8$	-	-

Fonte: O Autor

Tabela 4.41 – Rigidezes D_{ij} , A_{ij} , F_{ij} e H_{ij} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

i	j	D_{ij}	A_{ij}	F_{ij}	H_{ij}
		(N·mm)	(N/mm)	(N·mm ³)	(N·mm ⁵)
1	1	$5,898 \cdot 10^9$	-	$4,097 \cdot 10^{13}$	$3,078 \cdot 10^{17}$
1	2	$1,092 \cdot 10^8$	-	$6,555 \cdot 10^{11}$	$4,682 \cdot 10^{15}$
2	2	$1,732 \cdot 10^9$	-	$4,804 \cdot 10^{12}$	$1,919 \cdot 10^{16}$
4	4	$1,221 \cdot 10^8$	$6,120 \cdot 10^4$	$3,982 \cdot 10^{11}$	-
5	5	$3,713 \cdot 10^8$	$8,680 \cdot 10^4$	$2,562 \cdot 10^{12}$	-
6	6	$4,600 \cdot 10^8$	-	$2,760 \cdot 10^{12}$	$1,971 \cdot 10^{16}$

Fonte: O Autor

Tabela 4.42 – Coeficientes $\hat{D}_{ij}$, $\hat{A}_{ij}$, $\hat{F}_{ij}$, $\bar{D}_{ij}$ e $\bar{A}_{ij}$ para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

i	j	c1	c2	$\hat{F}_{ij}$	$\hat{D}_{ij}$	$\bar{D}_{ij}$	$\hat{A}_{ij}$	$\bar{A}_{ij}$
		(mm ²)	(mm ²)	(N·mm ³)	(N·mm)	(N·mm)	(N/mm)	(N/mm)
1	1	$3,333 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$3,071 \cdot 10^{13}$	$4,532 \cdot 10^9$	$3,508 \cdot 10^9$	-	-
1	2	$3,333 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4,994 \cdot 10^{11}$	$8,740 \cdot 10^7$	$7,075 \cdot 10^7$	-	-
2	2	$3,333 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$4,164 \cdot 10^{12}$	$1,572 \cdot 10^9$	$1,433 \cdot 10^9$	-	-
4	4	$3,333 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	-	$8,226 \cdot 10^7$	-	$4,899 \cdot 10^4$	$4,077 \cdot 10^4$
5	5	$3,333 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	-	$1,151 \cdot 10^8$	-	$4,967 \cdot 10^4$	$3,817 \cdot 10^4$
6	6	$3,333 \cdot 10^{-5}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$2,103 \cdot 10^{12}$	$3,680 \cdot 10^8$	$2,979 \cdot 10^8$	-	-

Fonte: O Autor

4.1.3.4 FSDT: cálculos dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Para o cálculo dos deslocamentos verticais e das tensões, normais e de cisalhamento, para as variações paramétricas da razão h/b do painel de MLCC de referência, deve-se fazer uso das mesmas formulações e considerações expostas anteriormente na subseção 4.1.3.2. Assim sendo, de posse das referidas formulações e das rigidezes e coeficientes sintetizados nas Tabelas 4.37 a 4.42, é possível passar à determinação das grandezas de interesse à análise estrutural do painel de MLCC com suas variações da razão h/b .

As Tabelas 4.43 a 4.45 reúnem os valores calculados para os deslocamentos verticais e para as tensões, normais e de cisalhamento, considerando a razão h/b do painel de MLCC igual a 1/30, 1/20 e 1/15, respectivamente. Subsequentemente, as Figuras 4.35 a 4.40 ilustram os diagramas de distribuição dos deslocamentos verticais w_0 , das tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e das tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} , respectivamente.

Tabela 4.43 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-50	5,563	-3,217	-0,146	0,483	0,000	0,000
0	-30	5,563	-1,919	-0,087	0,286	0,117	0,005
90	-30	5,563	-0,090	-1,784	0,286	0,009	0,066
90	-10	5,563	-0,030	-0,594	0,095	0,013	0,100
0	-10	5,563	-0,638	-0,029	0,095	0,176	0,007
0	0	5,563	0,000	0,000	0,000	0,183	0,008
0	10	5,563	0,638	0,029	-0,095	0,176	0,007
90	10	5,563	0,030	0,594	-0,095	0,013	0,100
90	30	5,563	0,090	1,784	-0,286	0,009	0,066
0	30	5,563	1,919	0,087	-0,286	0,117	0,005
0	50	5,563	3,217	0,146	-0,483	0,000	0,000

Fonte: O Autor

Tabela 4.44 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-75	1,695	-1,427	-0,065	0,219	0,000	0,000
0	-45	1,695	-0,844	-0,039	0,128	0,078	0,003
90	-45	1,695	-0,040	-0,804	0,128	0,006	0,044
90	-15	1,695	-0,013	-0,268	0,042	0,008	0,067
0	-15	1,695	-0,280	-0,013	0,042	0,117	0,005
0	0	1,695	0,000	0,000	0,000	0,122	0,005
0	15	1,695	0,280	0,013	-0,042	0,117	0,005
90	15	1,695	0,013	0,268	-0,042	0,008	0,067
90	45	1,695	0,040	0,804	-0,128	0,006	0,044
0	45	1,695	0,844	0,039	-0,128	0,078	0,003
0	75	1,695	1,427	0,065	-0,219	0,000	0,000

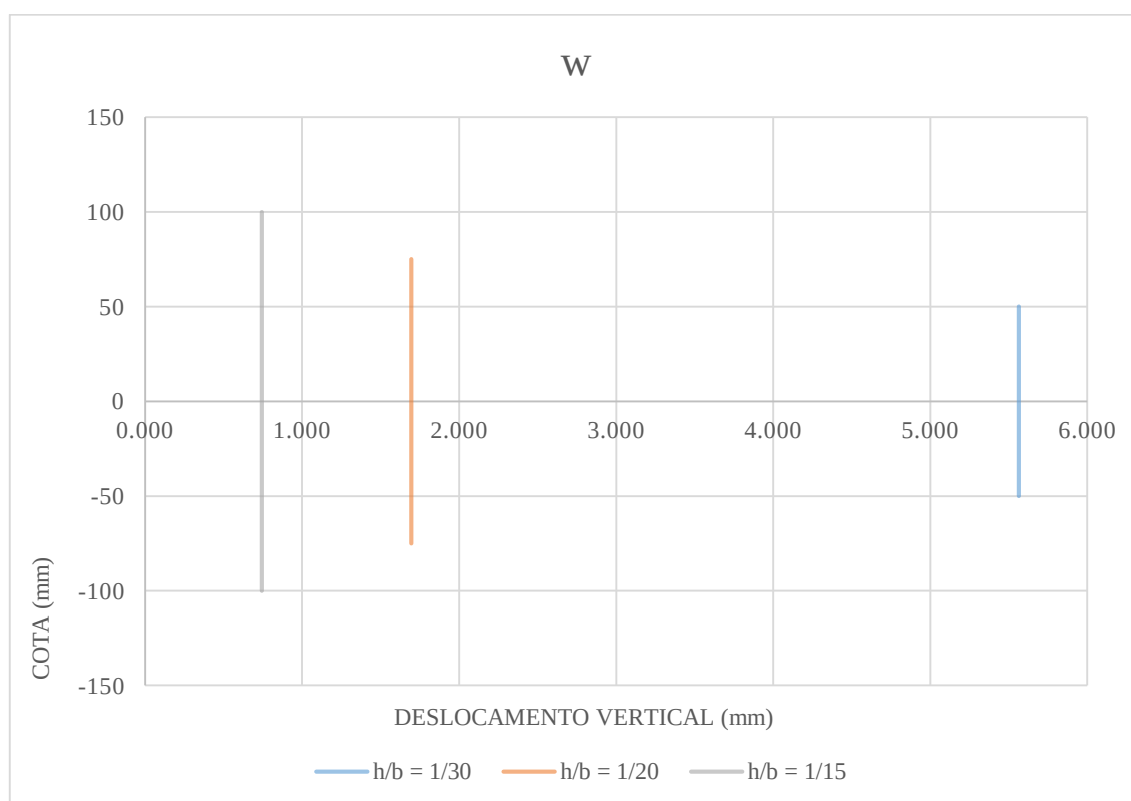
Fonte: O Autor

Tabela 4.45 – TSDT: deslocamentos verticais w_0 , tensões normais σ_{xx} e σ_{yy} e tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

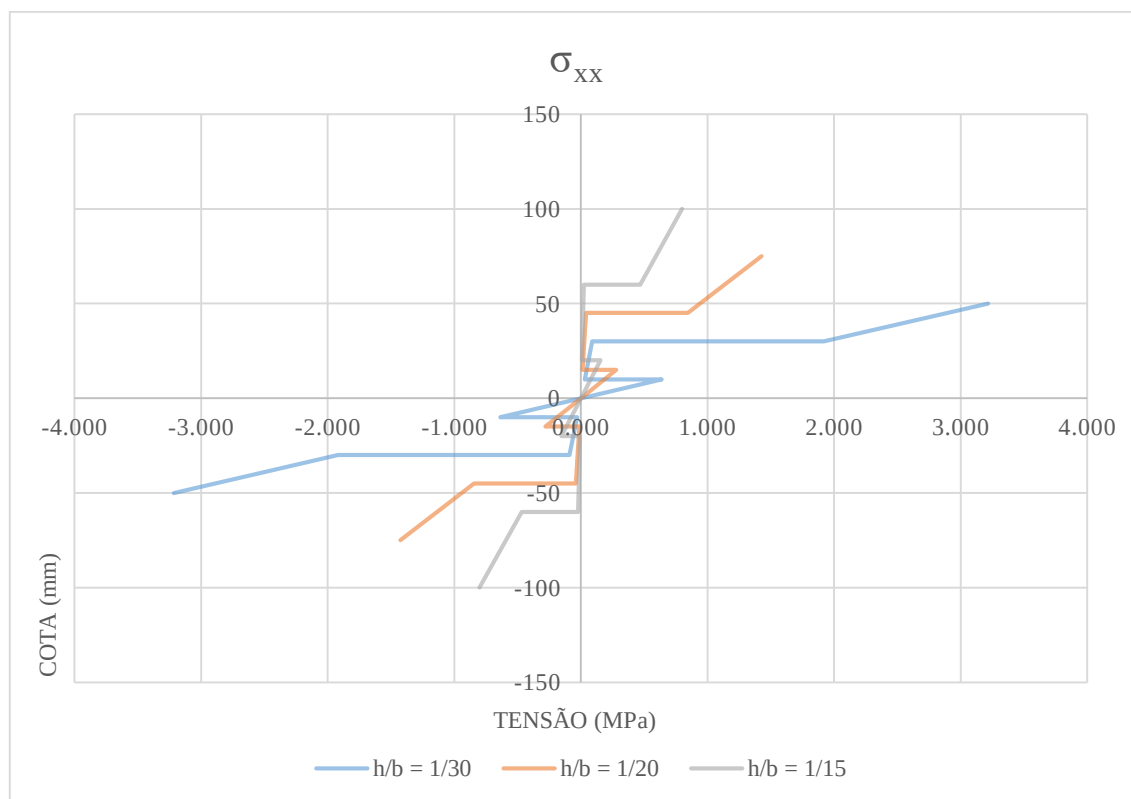
θ	z	w_0	σ_{xx}	σ_{yy}	τ_{xy}	τ_{xz}	τ_{yz}
(°)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
0	-100	0,743	-0,800	-0,037	0,126	0,000	0,000
0	-60	0,743	-0,469	-0,022	0,072	0,058	0,002
90	-60	0,743	-0,022	-0,461	0,072	0,004	0,033
90	-20	0,743	-0,007	-0,153	0,023	0,006	0,050
0	-20	0,743	-0,154	-0,007	0,023	0,087	0,004
0	0	0,743	0,000	0,000	0,000	0,091	0,004
0	20	0,743	0,154	0,007	-0,023	0,087	0,004
90	20	0,743	0,007	0,153	-0,023	0,006	0,050
90	60	0,743	0,022	0,461	-0,072	0,004	0,033
0	60	0,743	0,469	0,022	-0,072	0,058	0,002
0	100	0,743	0,800	0,037	-0,126	0,000	0,000

Fonte: O Autor

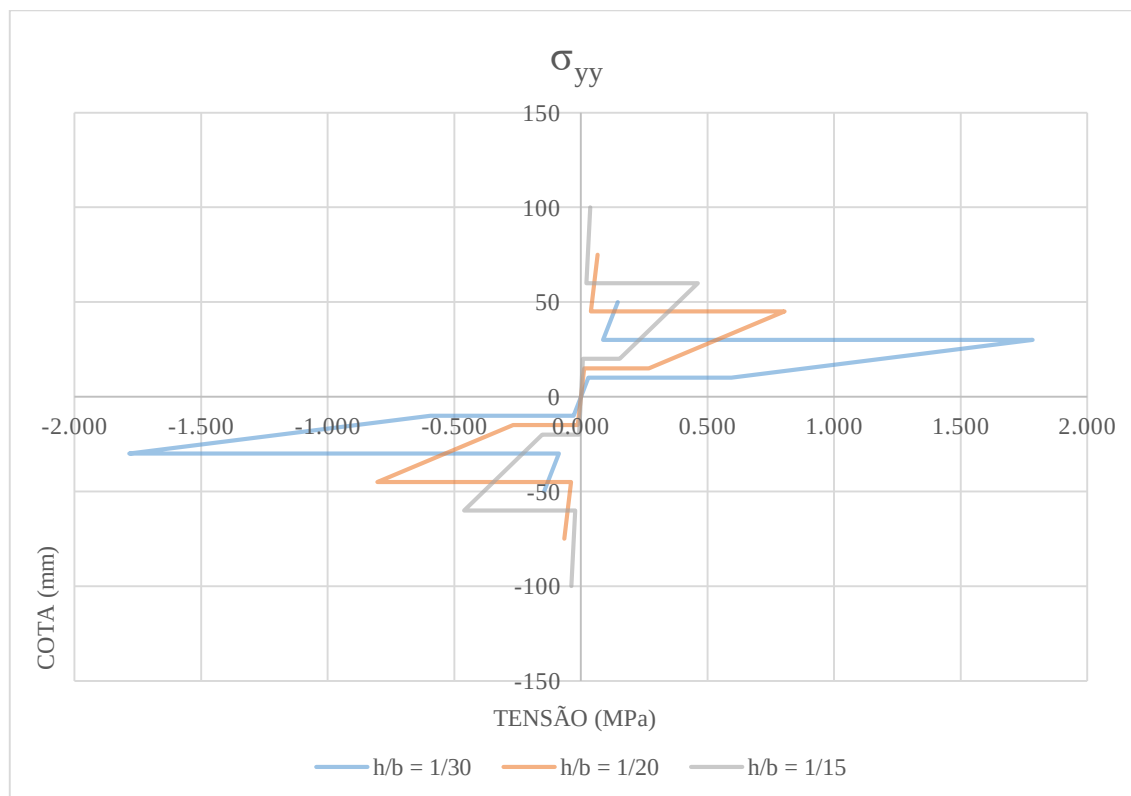
Figura 4.35 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para os deslocamentos verticais w_0



Fonte: O Autor

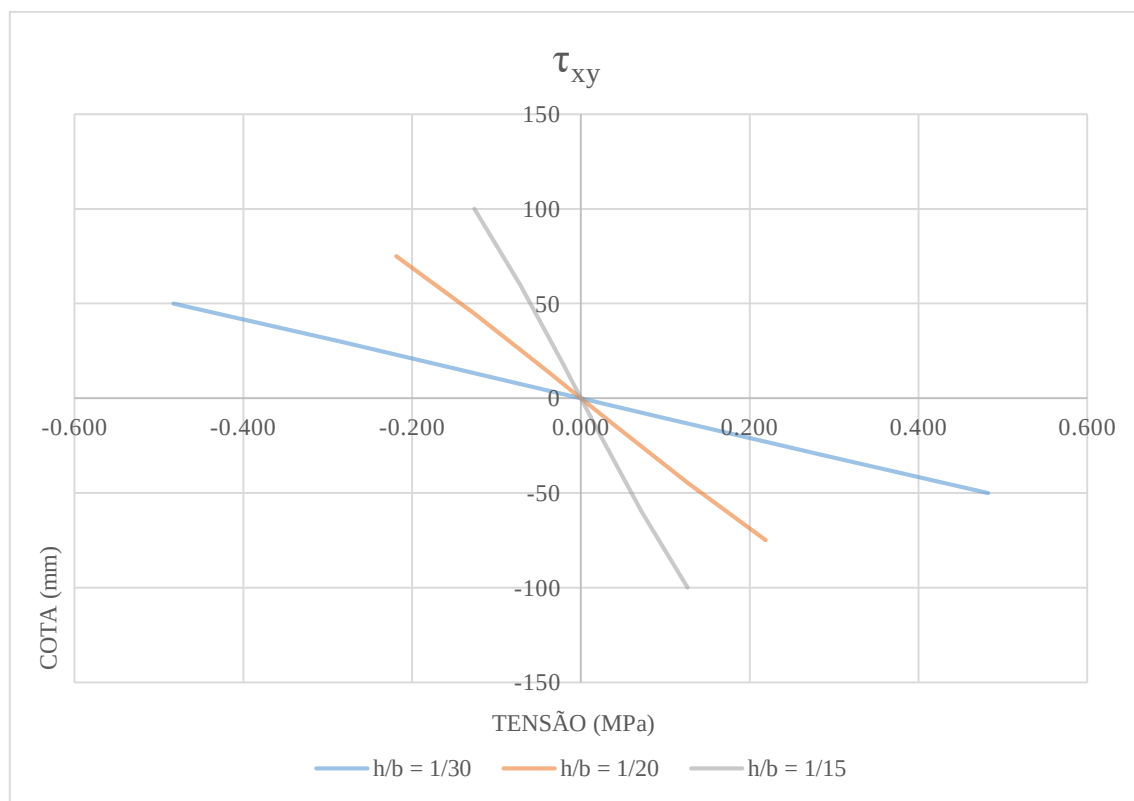
Figura 4.36 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{xx} 

Fonte: O Autor

Figura 4.37 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões normais σ_{yy} 

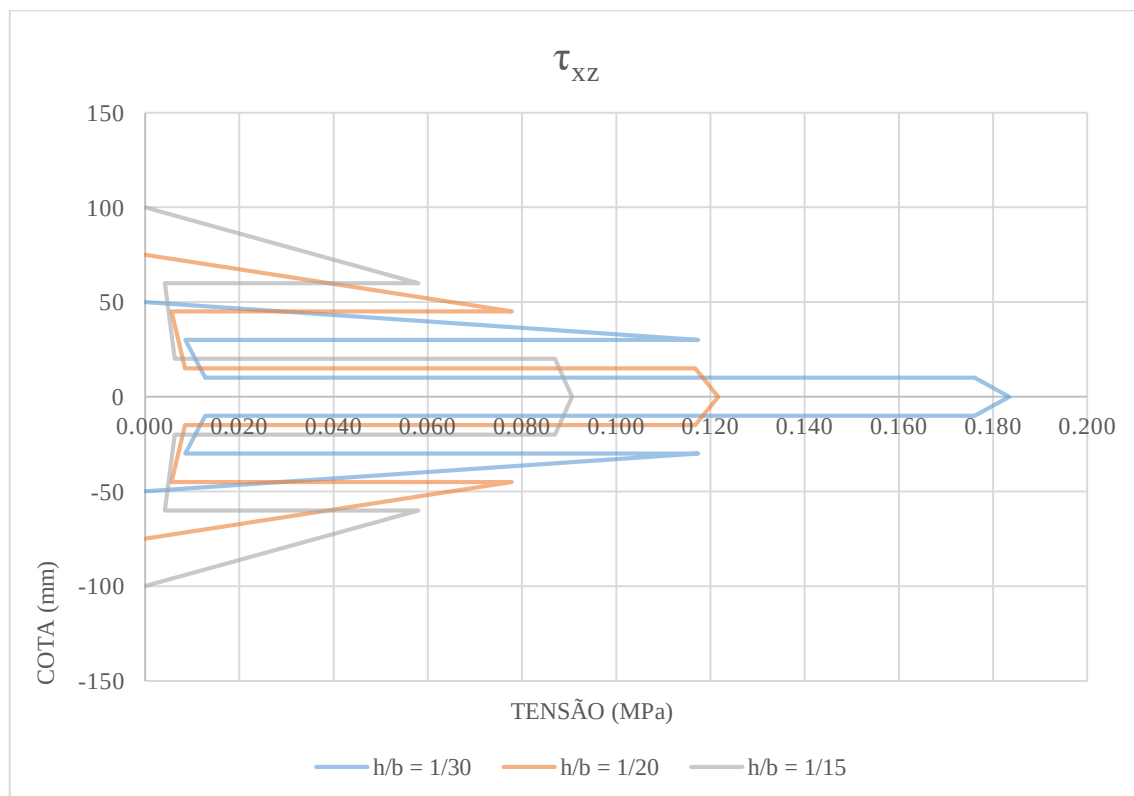
Fonte: O Autor

Figura 4.38 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xy}



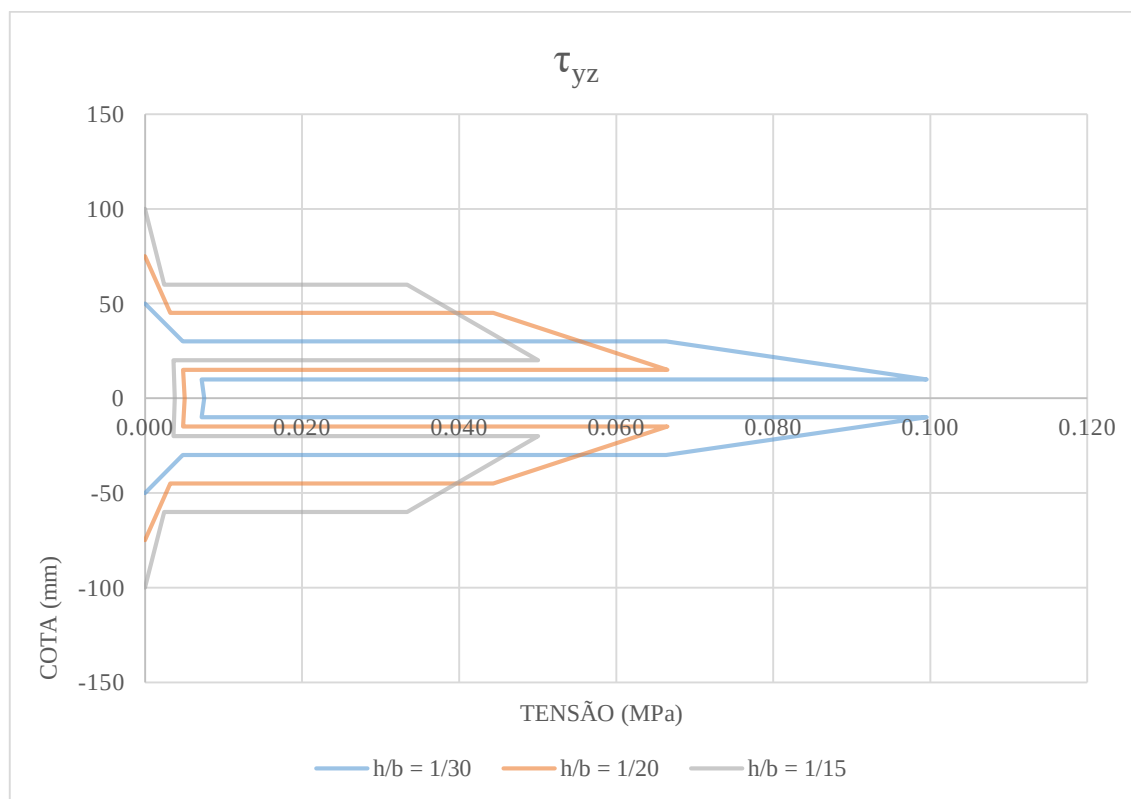
Fonte: O Autor

Figura 4.39 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{xz}



Fonte: O Autor

Figura 4.40 – TSDT: avaliação paramétrica da razão h/b para as tensões de cisalhamento τ_{yz}



Fonte: O Autor

4.1.4 Ponderações acerca da aplicação das teorias de placas ao painel de MLCC analisado

A partir da aplicação das teorias de placas CPT, FSDT e TSDT ao painel de MLCC objeto de estudo, bem como as suas variações paramétricas, foi possível verificar as suas respectivas vantagens e dificuldades e também como o campo de deslocamentos assumido influi na distribuição das tensões e nos deslocamentos verticais.

Para a teoria de placas CPT, tem-se o campo de deslocamentos mais simples, o qual desconsidera as deformações transversais de cisalhamento. Como consequência, formulações mais simples foram obtidas para o cômputo das tensões no plano da placa, porém esse campo de deslocamentos acabou por impedir a determinação das tensões de cisalhamento transversais por meio das relações constitutivas. Com isso, além de uma inconsistência teórica, verificou-se a necessidade de um processo mais trabalhoso para se obter as referidas tensões fazendo-se uso das equações diferenciais de equilíbrio.

A teoria de placas FSDT, por sua vez, assume um campo de deslocamentos a partir do qual foi possível obter deformações e tensões de cisalhamento constantes ao longo das espessuras das lamelas dos painéis de MLCC. Diferentemente da teoria de placas CPT, foi

possível fazer o cálculo das tensões de cisalhamento transversais por meio das relações constitutivas, apresentando como inconvenientes uma distribuição irrealista ao longo da altura dos painéis de MLCC e a necessidade de definição de um fator de correção no cisalhamento, o qual foi assumido igual a 1,0.

Já a teoria de placas TSDT possui as formulações com aplicações mais trabalhosas, envolvendo a determinação de uma série de parâmetros de rigidez antes do cálculo das tensões normais e de cisalhamento. Em contrapartida à essa dificuldade, foi possível notar que a teoria de placas TSDT é também aquela que possibilitou determinar as tensões de cisalhamento transversais por meio das relações constitutivas e obter para elas distribuições com variações quadráticas, sendo estas mais condizentes com a realidade. Sabe-se, a partir da Resistência dos Materiais, que as tensões de cisalhamento transversais se manifestam com variações quadráticas ao longo da altura de um elemento com carregamento transversal.

Por fim, faz-se importante pontuar que tanto as magnitudes quanto as distribuições das tensões no plano dos painéis resultaram bastante semelhantes entre si quando da aplicação das distintas teorias de placas. Conclusão análoga pode ser estendida aos deslocamentos verticais.

4.2 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DA APLICAÇÃO DOS MÉTODOS ANALÍTICOS UNIDIMENSIONAIS

Após a avaliação do painel de MLCC de referência, bem como de suas variações paramétricas, pelas três distintas teorias de placas, é interessante realizar também as análises estruturais desses elementos por meio dos métodos analíticos unidimensionais mais comumente abordados na literatura técnica. Essa abordagem tem seu mérito ao permitir que se estabeleçam comparações entre os métodos mais simplificados e de caráter prático com as tradicionais teorias de placas. Desta forma, as subseções 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3 reúnem as análises estruturais do painel de MLCC de referência e de suas variações paramétricas, quando da aplicação do Método Gama, do Método κ e do Método de Analogia ao Cisalhamento, respectivamente.

4.2.1 Máximos deslocamentos verticais e máximas tensões decorrentes da aplicação do Método Gama

Diferentemente das teorias de placas, o Método Gama, assim como os demais métodos unidimensionais, possibilitam que sejam realizadas análises estruturais de painéis de MLCC por meio da determinação de apenas três grandezas, sendo elas: deslocamento vertical máximo

$w_{\text{máx}}$, tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$. Os subíndices xx da tensão normal e xz da tensão de cisalhamento transversal são consequência da convenção de eixos adotada no presente trabalho, podendo variar ou até mesmo serem suprimidas em outras publicações. Portanto, a tensão normal máxima a ser determinada será o maior valor modular da tensão normal σ_{xx} , enquanto que a tensão de cisalhamento máxima corresponderá ao maior valor, em módulo, da tensão de cisalhamento τ_{xz} . Realizadas as considerações antecedentes, pode-se então proceder com o cômputo de $w_{\text{máx}}$, $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$, retomando as Equações (2.359), (2.343) e (2.344), respectivamente.

$$w_{\text{máx}} = \frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_{\text{ef}}} \quad (4.93)$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = \frac{\gamma_1 E_1 a_1 M_{xx}}{(EI)_{\text{ef}}} + \frac{0,5 E_1 h_1 M_{xx}}{(EI)_{\text{ef}}} \quad (4.94)$$

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = \frac{V_{xz} (EQ)}{(EI)_{\text{ef}} b_x} \quad (4.95)$$

4.2.1.1 Método Gama: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Para determinar as três grandezas anteriormente citadas pelo Método Gama, faz-se necessário o cômputo da rigidez flexão efetiva $(EI)_{\text{ef}}$ do painel de MLCC. Essa propriedade mecânica, segundo o método em questão, é expressa pela Equação (2.337), a qual é retomada a seguir.

$$(EI)_{\text{ef}} = \sum_{i=1}^{n=5} (E_i I_i + \gamma_i E_i A_i a_i^2) \quad (4.96)$$

Em que:

$$A_i = b_x h_i \quad (4.97)$$

$$I_i = \frac{b_x h_i^3}{12} \quad (4.98)$$

$$\gamma_i = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 E_i A_i}{a^2} \frac{h_i}{G_R b_x}} \quad (4.99)$$

Com base na Figura 4.1 e nas Equações (4.96) a (4.99), obtêm-se os valores trazidos pela Tabela 4.46, lembrando-se que a_i refere-se à distância medida do centroide do painel de MLCC ao centroide de cada uma das camadas de lamelas individuais. Além disso, o vão a ser considerado é aquele segundo a menor dimensão do painel, ou seja, $a = 3.000$ mm. Como consequência, nota-se que, independentemente da razão b/a considerada, os resultados serão os mesmos, evidenciando assim a grande limitação dos métodos unidimensionais.

Tabela 4.46 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva para todas as razões b/a do painel de MLCC de referência

Camada	$E_{0,i}$	b_i	h_i	a_i	A_i	I_i	γ_i	$(EI)_{ef,i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm ²)	(mm ⁴)		(N·mm ²)
1	11.000	1.000	20	40	20.000	6,667E+05	0,912	3,284E+11
3	11.000	1.000	20	0	20.000	6,667E+05	1,000	7,333E+09
5	11.000	1.000	20	40	20.000	6,667E+05	0,912	3,284E+11
$(EI)_{ef} = \Sigma(EI)_{ef,i} =$								6,640E+11

Fonte: O Autor

Além da rigidez a flexão efetiva $(EI)_{ef}$, devem ser computados:

- a) O produto do módulo de elasticidade pelo momento estático da seção transversal EQ:

$$EQ = \gamma_1 E_0 A_1 \left(\frac{h_1}{2} + h_2 + \frac{h_3}{2} \right) + E_{90} A_2 \left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \right) + \gamma_3 E_0 \frac{A_3}{2} \frac{h_3}{4} \quad (4.100)$$

$$EQ = 0,912 \cdot 11.000 \cdot 20.000 \cdot 40 + 370 \cdot 20.000 \cdot 20 + 0,912 \cdot 11.000 \cdot 10.000 \cdot 5 \quad (4.101)$$

$$EQ = 8,675 \cdot 10^9 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (4.102)$$

- b) O quinhão de carregamento q_{0x} responsável por provocar os esforços solicitantes internos a serem utilizados no dimensionamento do painel:

$$q_{0x} = q_0 (1.000 \text{ mm}) \quad (4.103)$$

$$q_{0x} = (0,0050 \text{ N/mm}^2) \cdot (1.000 \text{ mm}) = 5 \text{ N/mm}^2 \quad (4.104)$$

- c) O momento fletor M_{xx} para o dimensionamento do painel:

$$M_{xx} = \frac{q_{0x} a^2}{8} \quad (4.105)$$

$$M_{xx} = \frac{5 \cdot 3.000^2}{8} = 5.625.000 \text{ N} \cdot \text{mm} \quad (4.106)$$

- d) O esforço cortante V_{xz} para o dimensionamento do painel:

$$V_{xz} = \frac{q_{0x} a}{2} \quad (4.107)$$

$$V_{xz} = \frac{5 \cdot 3.000}{2} = 7.500 \text{ N} \quad (4.108)$$

A aplicação das Equações (4.93) a (4.95) conduz aos deslocamentos verticais máximos $w_{\text{máx}}$, às tensões normais máximas $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e às tensões de cisalhamento máximas $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$, relacionados na Tabela 4.47.

Tabela 4.47 – Método Gama: avaliação paramétrica da razão b/a

Razão b/a	$w_{\text{máx}}$	$(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx}}$
	(mm)	(MPa)	(MPa)
1,0	7,941	4,331	0,0980
1,5	7,941	4,331	0,0980
2,0	7,941	4,331	0,0980

Fonte: O Autor

4.2.1.2 Método Gama: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Um procedimento análogo ao anterior deve ser aplicado às variações paramétricas da razão h/b do painel de MLCC. Por meio desse procedimento e com o auxílio das Figuras 4.8 a 4.10 chegam-se aos resultados elencados nas Tabelas 4.48 a 4.52. Mais precisamente, as Tabelas 4.48 a 4.50 trazem os valores das rigidezes à flexão efetiva para as variações paramétricas h/b iguais a 1/30, 1/20 e 1/15, respectivamente. A Tabela 4.51, por sua vez, reúne, para todas essas variações, os produtos do módulo de elasticidade das lamelas de madeira pelo momento estático das seções transversais. Por fim, a Tabela 4.52 apresenta os resultados finais alcançados para as três grandezas de interesse à análise estrutural.

Tabela 4.48 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva do painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

Camada	$E_{0,i}$	b_i	h_i	a_i	A_i	I_i	Υ_i	$(EI)_{\text{ef},i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm ²)	(mm ⁴)		(N·mm ²)
1	11.000	1.000	20	40	20.000	6,667E+05	0,912	3,284E+11
3	11.000	1.000	20	0	20.000	6,667E+05	1,000	7,333E+09
5	11.000	1.000	20	40	20.000	6,667E+05	0,912	3,284E+11
$(EI)_{\text{ef}} = \Sigma(EI)_{\text{ef},i} =$								6,640E+11

Fonte: O Autor

Tabela 4.49 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva do painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

Camada	$E_{0,i}$	b_{xi}	h_i	a_i	A_i	I_i	Υ_i	$(EI)_{\text{ef},i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm ²)	(mm ⁴)		(N·mm ²)
1	11.000	1.000	30	60	30.000	2,250E+06	0,822	1,001E+12
3	11.000	1.000	30	0	30.000	2,250E+06	1,000	2,475E+10
5	11.000	1.000	30	60	30.000	2,250E+06	0,822	1,001E+12
$(EI)_{\text{ef}} = \Sigma(EI)_{\text{ef},i} =$								2,026E+12

Fonte: O Autor

Tabela 4.50 – Método Gama: rigidez à flexão efetiva do painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

Camada	$E_{0,i}$	b_{xi}	h_i	a_i	A_i	I_i	Υ_i	$(EI)_{ef,i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm ²)	(mm ⁴)		(N·mm ²)
1	11.000	1.000	20	40	40.000	5,333E+06	0,721	2,090E+12
3	11.000	1.000	20	0	40.000	5,333E+06	1,000	5,867E+10
5	11.000	1.000	20	40	40.000	5,333E+06	0,721	2,090E+12
$(EI)_{ef} = \Sigma(EI)_{ef,i} =$								4,239E+12

Fonte: O Autor

Tabela 4.51 – Método Gama: produto do módulo de elasticidade pelo momento estático da seção transversal EQ (razões h/b)

Razão h/b	E_0	E_{90}	$h_1 = h_2 = h_3$	$A_1 = A_2 = A_3$	$\Upsilon_1 = \Upsilon_3$	(EQ)
	(MPa)	(MPa)	(mm)	(mm ²)		(N·mm ²)
1/30	11.000	370	20	20.000	0,912	8,724E+09
1/20	11.000	370	30	30.000	0,822	1,784E+10
1/15	11.000	370	40	40.000	0,721	2,819E+10

Fonte: O Autor

Tabela 4.52 – Método Gama: avaliação paramétrica da razão h/b

Razão h/b	$w_{m\acute{a}x}$	$(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$	$(\tau_{xz})_{m\acute{a}x}$
	(mm)	(MPa)	(MPa)
1/30	7,941	4,331	0,0985
1/20	2,602	1,963	0,0652
1/15	1,244	1,134	0,0488

Fonte: O Autor

4.2.2 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação do Método κ

O Método κ é o método unidimensional de mais simples aplicação, sendo também o mais limitado dentre eles, uma vez que não prescreve uma forma para se determinar a tensão de cisalhamento transversal nos painéis de MLCC. A análise desses painéis pelo Método κ

consiste basicamente na aplicação das Equações (2.345) e (2.346). Retomando essas equações, vem:

$$(EI)_{ef} = E_0 \frac{b_x a_5^3}{12} k_1 \quad (4.109)$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = \frac{M_{xx}}{(EI)_{ef}} E_0 \frac{a_5}{2} \quad (4.110)$$

A base do método em questão consiste em calcular o fator de composição k_1 , o qual pode ser lido na Figura 2.29, e, a partir dele, determinar a rigidez à flexão efetiva $(EI)_{ef}$ e a tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$. Neste caso, a expressão a ser adotada para o fator de composição de k_1 corresponde àquela de painéis de MLCC com carregamento transversal e lamelas mais externas no sentido longitudinal, isto é, é a primeira equação constante na Figura 2.29. Para painéis de MLCC, tal equação assume a forma:

$$k_1 = 1 - \left(1 - \frac{E_{90}}{E_0}\right) \frac{a_3^3 - a_1^3}{a_5^3} \quad (4.111)$$

O máximo deslocamento vertical $w_{\text{máx}}$ é obtido pela Equação (4.93), pois o Método κ também despreza a contribuição das deformações transversais de cisalhamento.

4.2.2.1 Método κ : cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$ e da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Para todas as razões b/a do painel de MLCC analisado, as distâncias a_1 , a_3 e a_5 (ilustradas na Figura 2.29) são iguais a 20 mm, 60 mm e 100 mm, respectivamente. Portanto, o fator de composição k_1 assume o seguinte valor:

$$k_1 = 1 - \left(1 - \frac{370}{11.000}\right) \frac{60^3 - 20^3}{100^3} \cong 0,799 \quad (4.112)$$

Deve ser notado que, quando da variação da razão b/a do painel de MLCC, não se verificam mudanças no fator de composição k_1 e, por conseguinte, não haverá mudanças na

rigidez à flexão efetiva $(EI)_{ef}$, no deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$ e na tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$. Os valores de cada uma dessas grandezas estão elencados na Tabela 4.53.

Tabela 4.53 – Método κ : avaliação paramétrica da razão b/a

Razão b/a	$(EI)_{ef}$	$w_{m\acute{a}x}$	$(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$	$(\tau_{xz})_{m\acute{a}x}$
	(N·mm ²)	(mm)	(MPa)	(MPa)
1,0	$7,324 \cdot 10^{11}$	7,200	4,224	-
1,5	$7,324 \cdot 10^{11}$	7,200	4,224	-
2,0	$7,324 \cdot 10^{11}$	7,200	4,224	-

Fonte: O Autor

4.2.2.2 Método κ : cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$ e da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

A Tabela 4.54 reúne os valores das distâncias a_1 , a_3 e a_5 , dos módulos de elasticidade E_0 e E_{90} e do fator de composição k_1 para as diferentes razões h/b do painel de MLCC em estudo. Para essas mesmas razões, a Tabela 4.55 traz as magnitudes da rigidez à flexão efetiva $(EI)_{ef}$, do deslocamento vertical máximo $w_{m\acute{a}x}$ e da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$.

Tabela 4.54 – Método κ : fator de composição k_1 para as razões h/b do painel de MLCC

Razão h/b	a_1	a_3	a_5	E_0	E_{90}	k_1
	(mm)	(mm)	(mm)	(MPa)	(MPa)	
1/30	20	60	100	11.000	370	0,799
1/20	30	90	150	11.000	370	0,799
1/15	40	120	200	11.000	370	0,799

Fonte: O Autor

Tabela 4.55 – Método κ : avaliação paramétrica da razão h/b

Razão h/b	$(EI)_{ef}$	$W_{máx}$	$(\sigma_{xx})_{máx}$	$(\tau_{xz})_{máx}$
	$(N \cdot mm^2)$	(mm)	(MPa)	(MPa)
1/30	$7,324 \cdot 10^{11}$	7,200	4,224	-
1/20	$2,472 \cdot 10^{12}$	2,133	1,877	-
1/15	$5,859 \cdot 10^{12}$	0,900	1,056	-

Fonte: O Autor

4.2.3 Deslocamentos verticais e tensões decorrentes da aplicação do Método de Analogia ao Cisalhamento

Diferentemente dos métodos unidimensionais anteriores, o Método de Analogia ao Cisalhamento foi desenvolvido de modo a incluir a contribuição das deformações de cisalhamento. Neste caso, o máximo deslocamento vertical fica dado pela Equação (2.359) com a inclusão da parcela de deformação por cisalhamento, isto é:

$$w_{máx} = \frac{5}{384} \frac{q_{0,x} a^4}{(EI)_{ef}} + \frac{1}{8} \frac{q_{0,x} a^2 \kappa}{(GA)_{ef}} \quad (4.113)$$

Sendo:

$$(EI)_{ef} = B_A + B_B \quad (4.114)$$

$$(GA)_{ef} = S_B \quad (4.115)$$

As tensões normais e de cisalhamento, segundo o Método de Analogia ao Cisalhamento, estão sintetizadas nos Quadros 2.3 e 2.4. Com base nas informações desses quadros é possível escrever as seguintes expressões para as máximas tensões normais e de cisalhamento:

$$(\sigma_{xx})_{máx} = \sigma_{A,i} + \sigma_{B,i} \quad (4.116)$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = \frac{E_1 h_1 M_A}{2 B_A} + \frac{E_1 z_1 M_B}{B_B} \quad (4.117)$$

E:

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = \tau_{A,i} + \tau_{B,i+1} \quad (4.118)$$

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = \frac{1,5 E_1 I_1 V_A}{B_A b_x h_1} + \frac{V_B}{B_B} (E_1 h_1 z_1 + E_2 h_2 z_2) \quad (4.119)$$

Em que:

$$B_A = \sum_{i=1}^n E_i b_x \frac{h_i^3}{12} \quad (4.120)$$

$$B_B = \sum_{i=1}^n E_i b_x h_i z_i^2 \quad (4.121)$$

$$S_B = \frac{\left(h - \frac{h_i}{2} - \frac{h_n}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_1 b_x} + \sum_{i=2}^{n-1} \left(\frac{h_i}{G_i b_x}\right) + \frac{h_n}{2 G_n b_x}} \quad (4.122)$$

$$M_A = \frac{q_{0x,A} a^2}{8} \quad (4.123)$$

$$M_B = \frac{q_{0x,B} a^2}{8} \quad (4.124)$$

$$V_A = \frac{q_{0x,A} a}{2} \quad (4.125)$$

$$V_B = \frac{q_{0x,B} a}{2} \quad (4.126)$$

$$q_{0x,B} = \frac{\frac{5}{384} \frac{q_0 a^4}{B_A}}{\frac{5}{384} \frac{a^4}{B_A} + \frac{5}{384} \frac{a^4}{B_B} + \frac{1}{8} \frac{a^2 \kappa}{S_B}} \quad (4.127)$$

$$q_{0x,A} = q_{0x} - q_{0x,B} \quad (4.128)$$

4.2.3.1 Método de Analogia ao Cisalhamento: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

A aplicação do Método de Analogia ao Cisalhamento aos painéis de MLCC depende, a princípio, da determinação das rigidezes à flexão B_A , B_B e $(EI)_{\text{ef}}$, bem como da rigidez ao cisalhamento $S_B = (GA)_{\text{ef}}$. De posse dessas rigidezes, torna-se possível calcular os quinhões de carregamento e os esforços solicitantes internos em cada uma das vigas virtuais e, desta forma, aferir as magnitudes das máximas tensões normais e de cisalhamento. As Tabelas 4.56 e 4.57 reúnem, respectivamente, os valores das rigidezes à flexão e ao cisalhamento para todas as razões b/a do painel de MLCC estudado.

Tabela 4.56 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para as razões b/a painel de MLCC

Camada	E_i (MPa)	b_x (mm)	h_i (mm)	z_i (mm)	$B_{A,i}$ (N·mm ²)	$B_{B,i}$ (N·mm ²)	$(EI)_{\text{ef},i}$ (N·mm ²)
1	11.000	1.000	20	40	7,333E+09	3,520E+11	3,593E+11
3	11.000	1.000	20	0	7,333E+09	0,000E+00	7,333E+09
5	11.000	1.000	20	-40	7,333E+09	3,520E+11	3,593E+11
$\Sigma =$					2,200E+10	7,040E+11	7,260E+11

Fonte: O Autor

Tabela 4.57 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para as razões b/a painel de MLCC

Camada	G_i	b_x	h_i	$h_i/2 G_i b_x$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm ² /N)
1	690	1.000	20	1,449E-05
2	50	1.000	20	4,000E-04
3	690	1.000	20	2,899E-05
4	50	1.000	20	4,000E-04
5	690	1.000	20	1,449E-05
$\Sigma =$				8,580E-04

Fonte: O Autor

Da Equação (4.122), vem:

$$S_B = (GA)_{ef} \cong \frac{\left(100 - \frac{20}{2} - \frac{20}{2}\right)^2}{8,580 \cdot 10^{-4}} \cong 7,459 \cdot 10^6 \text{ N} \quad (4.129)$$

O próximo passo consiste em encontrar os quinhões de carregamento resistidos por cada uma das vigas virtuais fazendo-se uso das Equações (4.127) e (4.128).

$$q_{0x,B} \cong \frac{\frac{5}{384} \frac{5 \cdot 3.000^4}{2,200 \cdot 10^{10}}}{\frac{5}{384} \frac{3.000^4}{2,200 \cdot 10^{10}} + \frac{5}{384} \frac{3.000^4}{7,040 \cdot 10^{11}} + \frac{1}{8} \frac{3.000^2 \cdot 1,0}{7,459 \cdot 10^6}} \cong 4,8337 \text{ N/mm} \quad (4.130)$$

$$q_{0x,A} \cong 5 - 4,834 \cong 0,1663 \text{ N/mm} \quad (4.131)$$

Com os quinhões de carregamento anteriores, procede-se com o cômputo dos esforços solicitantes internos nas vigas virtuais. Retomando as Equações (4.123) a (4.126), tem-se:

$$M_B \cong \frac{4,8337 \cdot 3.000^2}{8} \cong 5,438 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (4.132)$$

$$M_A \cong \frac{0,1663 \cdot 3.000^2}{8} \cong 1,870 \cdot 10^5 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (4.133)$$

$$V_B \cong \frac{4,8337 \cdot 3.000}{2} \cong 7,251 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (4.134)$$

$$V_A \cong \frac{0,1663 \cdot 3.000}{2} \cong 2,494 \cdot 10^2 \text{ N} \quad (4.135)$$

De posse das rigidezes e dos esforços solicitantes internos, resta apenas a determinação dos máximos valores do deslocamento vertical e das tensões normal e de cisalhamento. Pelas Equações (4.113), (4.117) e (4.119), vem:

$$w_{\text{máx}} \cong \frac{5}{384} \frac{5,00 \cdot 3.000^4}{7,260 \cdot 10^{11}} + \frac{1}{8} \frac{5,00 \cdot 3.000^2 \cdot 1,0}{7,459 \cdot 10^6} \cong 8,018 \text{ mm} \quad (4.136)$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} \cong \frac{11.000 \cdot 20 \cdot 1,870 \cdot 10^5}{2 \cdot 2,200 \cdot 10^{10}} + \frac{11.000 \cdot 40 \cdot 5,438 \cdot 10^6}{7,040 \cdot 10^{11}} \cong 4,334 \text{ MPa} \quad (4.137)$$

$$\begin{aligned} (\tau_{xz})_{\text{máx}} &\cong \frac{1,5 \cdot 11.000 \cdot \left(\frac{1}{12} \cdot 1.000 \cdot 20^3\right) \cdot 2,494 \cdot 10^2}{2,200 \cdot 10^{10} \cdot 1.000 \cdot 20} \\ &+ \frac{7,251 \cdot 10^3}{7,040 \cdot 10^{11}} (11.000 \cdot 20.000 \cdot 40 + 370 \cdot 20.000 \cdot 20) \cong 0,0984 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (4.138)$$

Novamente, quando da variação da razão b/a do painel de MLCC, não se verificam variações nas magnitudes dos máximos valores dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento, assim como está elucidado na Tabela 4.58.

Tabela 4.58 – Método de Analogia ao Cisalhamento: avaliação paramétrica da razão b/a

Razão b/a	(EI) _{ef}	(GA) _{ef}	w _{máx}	(σ _{xx}) _{máx}	(τ _{xz}) _{máx}
	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(mm)	(MPa)	(MPa)
1,0	7,260 · 10 ¹¹	7,459 · 10 ⁶	8,018	4,334	0,0984
1,5	7,260 · 10 ¹¹	7,459 · 10 ⁶	8,018	4,334	0,0984
2,0	7,260 · 10 ¹¹	7,459 · 10 ⁶	8,018	4,334	0,0984

Fonte: O Autor

4.2.3.2 Método de Analogia ao Cisalhamento: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Para se obter as grandezas anteriores referentes às variações paramétricas da razão h/b do painel de MLCC de referência, deve-se seguir um procedimento análogo ao descrito na subseção precedente. Dessa forma, têm-se as rigidezes à flexão e ao cisalhamento especificadas nas Tabelas 4.59 a 4.64, os quinhões de carregamento e esforços solicitantes internos na Tabela 4.65 e as grandezas com seus valores finais na Tabela 4.66.

Tabela 4.59 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

Camada	E_i	b_x	h_i	z_i	$B_{A,i}$	$B_{B,i}$	$(EI)_{\text{ef},i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(N·mm ²)
1	11.000	1.000	20	40	7,333E+09	3,520E+11	3,593E+11
3	11.000	1.000	20	0	7,333E+09	0,000E+00	7,333E+09
5	11.000	1.000	20	-40	7,333E+09	3,520E+11	3,593E+11
$\Sigma =$					2,200E+10	7,040E+11	7,260E+11

Fonte: O Autor

Tabela 4.60 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

Camada	E_i	b_x	h_i	z_i	$B_{A,i}$	$B_{B,i}$	$(EI)_{\text{ef},i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(N·mm ²)
1	11.000	1.000	30	60	2,475E+10	1,188E+12	1,213E+12
3	11.000	1.000	30	0	2,475E+10	0,000E+00	2,475E+10
5	11.000	1.000	30	-60	2,475E+10	1,188E+12	1,213E+12
$\Sigma =$					7,425E+10	2,376E+12	2,450E+12

Fonte: O Autor

Tabela 4.61 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidezes à flexão para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

Camada	E_i	b_x	h_i	z_i	$B_{A,i}$	$B_{B,i}$	$(EI)_{ef,i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(N·mm ²)
1	11.000	1.000	40	80	5,867E+10	2,816E+12	2,875E+12
3	11.000	1.000	40	0	5,867E+10	0,000E+00	5,867E+10
5	11.000	1.000	40	-80	5,867E+10	2,816E+12	2,875E+12
$\Sigma =$					1,760E+11	5,632E+12	5,808E+12

Fonte: O Autor

Tabela 4.62 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para o painel de MLCC de referência com razão $h/b = 1/30$

Camada	G_i	b_x	h_i	$h_i/2 G_i b_x$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm ² /N)
1	690	1.000	20	1,449E-05
2	50	1.000	20	4,000E-04
3	690	1.000	20	2,899E-05
4	50	1.000	20	4,000E-04
5	690	1.000	20	1,449E-05
$S_B (N) = (GA)_{ef} (N) =$				7,459E+06

Fonte: O Autor

Tabela 4.63 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/20$

Camada	G_i	b_x	h_i	$h_i/2 G_i b_x$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm ² /N)
1	690	1.000	30	2,174E-05
2	50	1.000	30	6,000E-04
3	690	1.000	30	4,348E-05
4	50	1.000	30	6,000E-04
5	690	1.000	30	2,174E-05
$S_B (N) = (GA)_{ef} (N) =$				1,119E+07

Fonte: O Autor

Tabela 4.64 – Método de Analogia ao Cisalhamento: rigidez ao cisalhamento para o painel de MLCC com razão $h/b = 1/15$

Camada	G_i	b_x	h_i	$h_i/2 G_i b_x$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm ² /N)
1	690	1.000	40	2,899E-05
2	50	1.000	40	8,000E-04
3	690	1.000	40	5,797E-05
4	50	1.000	40	8,000E-04
5	690	1.000	40	2,899E-05
$S_B (N) = (GA)_{ef} (N) =$				1,492E+07

Fonte: O Autor

Tabela 4.65 – Método de Analogia ao Cisalhamento: quinhões de carregamento e esforços solicitantes internos para as razões b/a painel de MLCC

Razão h/b	$q_{0x,B}$	$q_{0x,A}$	M_B	M_A	V_B	V_A
	(N/mm)	(N/mm)	(N·mm)	(N·mm)	(N)	(N)
1/30	4,8337	0,1663	$5,438 \cdot 10^6$	$1,870 \cdot 10^5$	$7,251 \cdot 10^3$	$2,494 \cdot 10^2$
1/20	4,8154	0,1846	$5,417 \cdot 10^6$	$2,076 \cdot 10^5$	$7,223 \cdot 10^3$	$2,769 \cdot 10^2$
1/15	4,7900	0,2100	$5,389 \cdot 10^6$	$2,362 \cdot 10^5$	$7,185 \cdot 10^3$	$3,149 \cdot 10^2$

Fonte: O Autor

Tabela 4.66 – Método de Analogia ao Cisalhamento: avaliação paramétrica da razão h/b

Razão h/b	$(EI)_{ef}$	$(GA)_{ef}$	$w_{máx}$	$(\sigma_{xx})_{máx}$	$(\tau_{xz})_{máx}$
	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(mm)	(MPa)	(MPa)
1/30	$7,260 \cdot 10^{11}$	$7,459 \cdot 10^6$	8,018	4,334	0,0984
1/20	$2,450 \cdot 10^{12}$	$1,119 \cdot 10^7$	2,655	1,966	0,0658
1/15	$5,808 \cdot 10^{12}$	$1,492 \cdot 10^7$	1,285	1,137	0,0496

Fonte: O Autor

4.2.4 Ponderações acerca da aplicação dos métodos unidimensionais ao painel de MLCC analisado

Quando da aplicação dos métodos unidimensionais ao painel de MLCC objeto de estudo e as suas variações paramétricas, foi possível observar uma série de vantagens e limitações em cada um deles.

Primeiramente, são notórias duas características desvantajosas que são comuns a todos os métodos analíticos unidimensionais empregados, sendo elas: a obtenção de resultados iguais para qualquer variação da razão b/a e a não consideração da rigidez torcional dos painéis de MLCC. Em relação à invariabilidade dos deslocamentos e das tensões quando da variação da razão b/a , tem-se que a sua ocorrência advém do fato dos métodos em questão basearem-se na tomada de uma faixa de largura unitária sempre segundo a direção do menor vão (invariante) para a definição do carregamento transversal. Já no tocante à segunda característica, é possível notar, em contraste com as teorias de placas, que em nenhum momento da exposição dos métodos unidimensionais foram envolvidos os momentos de torção ou momentos volventes. O não aparecimento dos momentos volventes nas formulações é o indício da não consideração dos efeitos de torção nos painéis de MLCC por parte dos métodos aqui tratados.

Além disso, algumas particularidades de cada um dos métodos unidimensionais puderam ser notadas de forma mais clara, nomeadamente:

- a) Para o Método Gama, notou-se a desconsideração das deformações transversais de cisalhamento tanto no cálculo das flechas quanto na determinação das tensões, haja vista que as mesmas foram determinadas levando-se em conta apenas a rigidez à flexão efetiva $(EI)_{ef}$ dos painéis de MLCC. Ademais, observou-se que, no levantamento do carregamento transversal q_{0x} , nenhum aspecto geométrico ou mecânico foi abrangido;
- b) No Método κ , o qual possui a aplicação mais prática dentre todos os métodos apresentados, também foi observada a não consideração das deformações transversais de cisalhamento no cômputo das flechas e das tensões. Igualmente ao Método Gama, o carregamento transversal q_{0x} foi definido sem qualquer inclusão de aspectos de geometria e de rigidez dos painéis de MLCC. Todavia, na aplicação do Método κ , há uma grande desvantagem que não se apresenta nos demais métodos

unidimensionais, isto é, a não prescrição de uma forma para se determinar as tensões de cisalhamento transversais;

- c) O Método de Analogia ao Cisalhamento, por sua vez, tornou possível realizar os cálculos dos deslocamentos e das tensões levando-se em conta as deformações transversais de cisalhamento. Essa consideração foi possível devido ao fato de o método em questão prescrever formas para se determinar rigidezes efetivas à flexão e ao cisalhamento, estando ambas envolvidas na definição do carregamento transversal q_{0x} .

4.3 PROPOSTA DE UM MÉTODO ANALÍTICO UNIDIMENSIONAL PARA O CÁLCULO DE PAINÉIS DE MLCC SUJEITOS À FLEXÃO SIMPLES

Nesta subseção, será apresentada uma nova proposta para o cálculo das máximas tensões – normal e de cisalhamento – e do máximo deslocamento vertical (flecha), em painéis de MLCC submetidos à flexão simples, gerados pela aplicação de um carregamento transversal uniformemente distribuído por unidade de área.

O método proposto consiste em uma adaptação da Teoria de Rankine-Grasshoff ou Teoria das Grelhas, a qual tem seu uso consagrado no cálculo de lajes em concreto armado. A forma original dessa teoria, aplicada às lajes de concreto armado, pode ser consultada em Rocha (1972) ou em Araújo (2014).

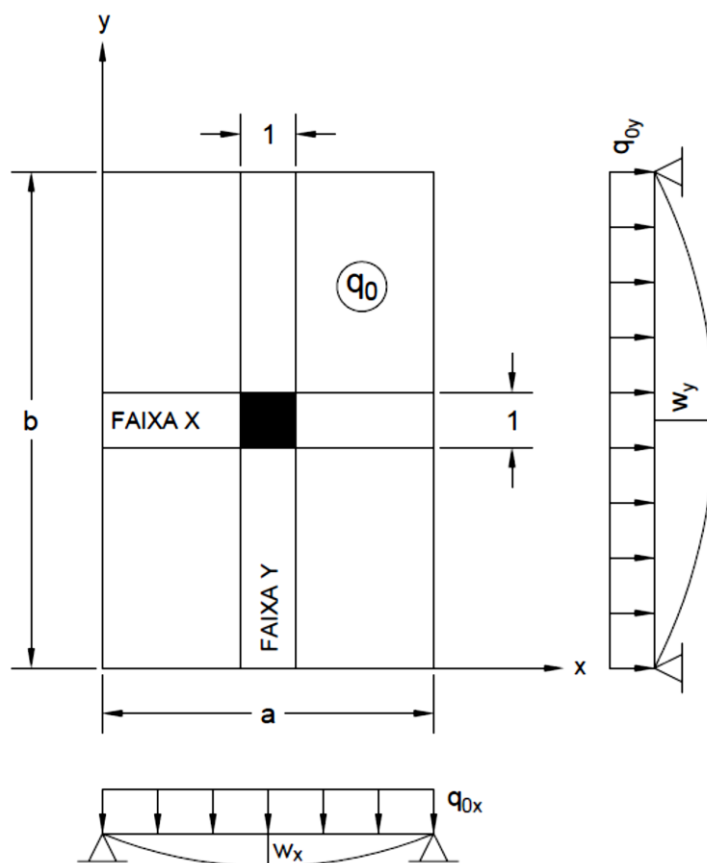
A seguir, são apresentadas as hipóteses simplificadoras adotadas para o desenvolvimento do método, bem como as expressões referentes ao carregamento a ser considerado para fins de dimensionamento, aos esforços solicitantes internos, às tensões – normal e de cisalhamento – e ao deslocamento vertical máximo.

4.3.1 Hipóteses simplificadoras para o método analítico proposto

Para que seja possível desenvolver expressões analíticas simplificadas para o cálculo das máximas tensões – normal e cisalhante – e do deslocamento vertical máximo, algumas hipóteses necessitam de ser assumidas. Neste caso, as seguintes hipóteses foram consideradas:

- a) O carregamento transversal uniformemente distribuído por unidade de área (q_0) é dividido segundo as direções x e y , contidas no plano do painel de MLCC, por meio de faixas de largura unitária que passam pelo centro do painel (Figura 4.41);

Figura 4.41 – Painel de MLCC apoiado nos quatro bordos: faixas de largura unitária, quinhões de carregamento e flechas



Fonte: O Autor

- b) O carregamento transversal uniformemente distribuído por unidade de área (q_0) é dado pela soma dos quinhões de carregamento q_{0x} e q_{0y} , os quais ficam distribuídos ao longo das faixas de larguras unitárias (Figura 4.41). Dessa forma:

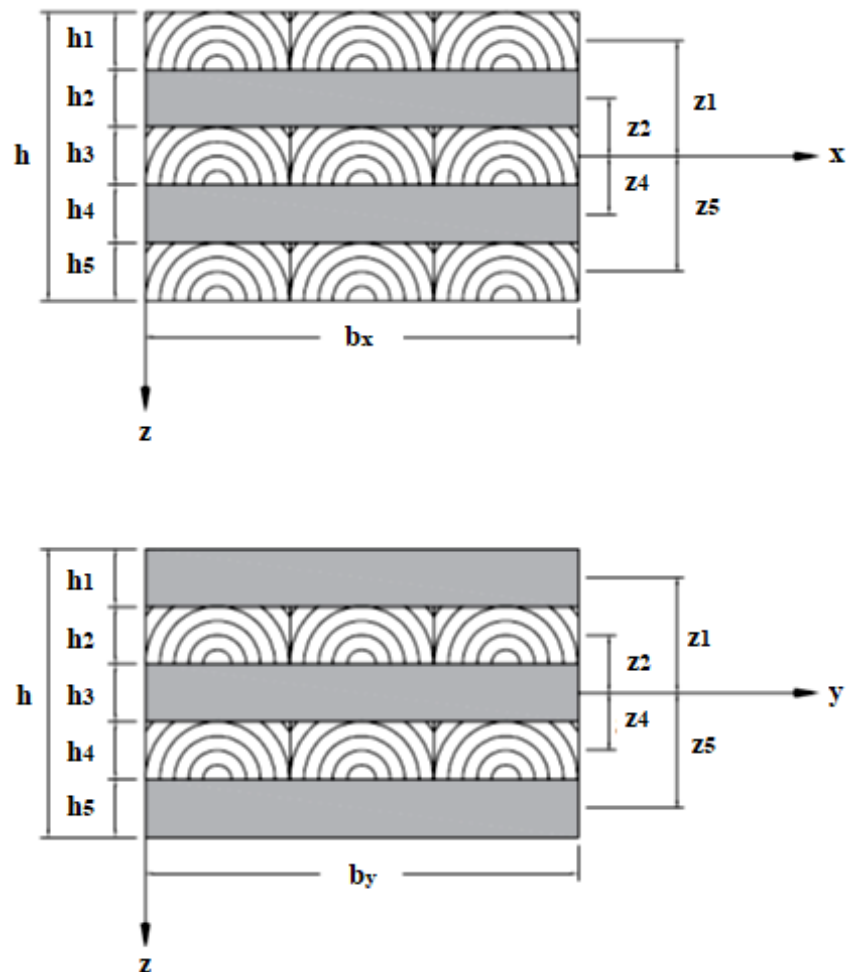
$$q_0 = q_{0x} + q_{0y} \quad (4.139)$$

- c) A flecha no centro do painel de MLCC assume valor único quando calculada para ambas as faixas de larguras unitárias, ou seja:

$$w_x = w_y \quad (4.140)$$

- d) A dimensão em planta “b” do painel de MLCC, ilustrado na Figura 4.41, é maior ou igual à dimensão em planta “a”;
- e) Para o cômputo das máximas tensões e do máximo deslocamento vertical, é empregado o quinhão de carregamento q_{0x} , o qual é definido pela faixa de largura unitária segundo a direção do menor vão (Figura 4.41);
- f) Para o cálculo das máximas tensões e do máximo deslocamento vertical, são consideradas as rigidezes à flexão e ao cisalhamento da seção transversal definida pelo plano x-z (Figura 4.42);

Figura 4.42 – Painel de MLCC apoiado nos quatro bordos: seções transversais contidas nos planos coordenados x-z e y-z



Fonte: O Autor

- g) A determinação dos máximos valores das tensões e da flecha é realizada considerando o material em regime elástico linear, ou seja, assume-se como válida a Lei de Hooke.

Para as hipóteses anteriores, cabem ainda algumas elucidações. Primeiramente, as considerações feitas nos itens a), b) e c) constituem a base da Teoria de Rankine-Grasshoff e são igualmente adotadas no cálculo das lajes de concreto armado. A consideração feita em d) é apenas para fins de padronização do problema e, dessa forma, evitar equívocos quando do cálculo das grandezas de interesse. Por fim, as hipóteses e), f) e g) foram definidas tomando-se como base os principais métodos unidimensionais existentes na literatura, sendo eles: Método Gama, Método κ e Método de Analogia ao Cisalhamento, os quais também dependem dessas simplificações.

4.3.2 Dedução da expressão do quinhão de carregamento q_{0x}

A dedução de uma expressão analítica para o quinhão de carregamento q_{0x} é possível por meio das Equações (4.139) e (4.140), juntamente com as expressões das flechas de vigas submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído por unidade de comprimento. Destarte, é possível encontrar duas expressões para o quinhão de carregamento q_{0x} , uma delas desprezando a influência das deformações de cisalhamento no cômputo das flechas e a outra considerando-as.

4.3.2.1 Dedução da expressão do quinhão de carregamento q_{0x} desprezando as deformações de cisalhamento

Como as vigas da Figura 4.41 são biapoiadas e submetidas a um carregamento transversal uniformemente distribuído, então:

$$w_x = \frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_x} \quad (4.141)$$

$$w_y = \frac{5}{384} \frac{q_{0y} b^4}{(EI)_y} \quad (4.142)$$

Em que:

- $(EI)_x$ – Rigidez à flexão efetiva em relação ao eixo x;
- $(EI)_y$ – Rigidez à flexão efetiva em relação ao eixo y.

As Equações (4.141) e (4.142) são provenientes da Resistência dos Materiais e podem ser consultadas em Timoshenko e Gere (1994). Levando essas equações à Equação (4.140), obtém-se:

$$\frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_x} = \frac{5}{384} \frac{q_{0y} b^4}{(EI)_y} \quad (4.143)$$

Entretanto, da Equação (4.139), vem:

$$q_{0y} = q_0 - q_{0x} \quad (4.144)$$

Ao substituir a Equação (4.144) na Equação (4.143) e, em seguida, explicitar o quinhão de carregamento q_{0x} , deduz-se que:

$$q_{0x} = \left(\frac{b^4}{\frac{(EI)_y}{(EI)_x} a^4 + b^4} \right) q_0 \quad (4.145)$$

4.3.2.2 Dedução da expressão do quinhão de carregamento q_{0x} considerando as deformações de cisalhamento

Quando da consideração das deformações de cisalhamento no cálculo das flechas em vigas sujeitas a um carregamento transversal uniformemente distribuído, Timoshenko e Gere (1994) prescrevem as expressões:

$$w_x = \frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_x} + \frac{1}{8} \frac{q_{0x} a^2 \kappa}{(GA)_{xz}} \quad (4.146)$$

$$w_y = \frac{5}{384} \frac{q_{0y} b^4}{(EI)_y} + \frac{1}{8} \frac{q_{0y} b^2 \kappa}{(GA)_{yz}} \quad (4.147)$$

Em que:

- $(GA)_{xz}$ – Rigidez ao cisalhamento efetiva na seção transversal contida no plano x-z;
- $(GA)_{yz}$ – Rigidez ao cisalhamento efetiva na seção transversal contida no plano y-z;
- $\kappa = 3/2$ – Fator de forma no cisalhamento para seções retangulares. Esse valor referente às seções retangulares provém também da Resistência dos Materiais.

Substituindo as Equações (4.146) e (4.147) na Equação (4.140), tem-se:

$$\frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_x} + \frac{1}{8} \frac{q_{0x} a^2 \kappa}{(GA)_{xz}} = \frac{5}{384} \frac{q_{0y} b^4}{(EI)_y} + \frac{1}{8} \frac{q_{0y} b^2 \kappa}{(GA)_{yz}} \quad (4.148)$$

Ao levar a Equação (4.144) na Equação (4.148) e explicitar q_{0x} , deduz-se uma expressão para esse quinhão de carregamento, levando-se em consideração as deformações de cisalhamento. Por esse procedimento, chega-se a:

$$q_{0x} = \left(\frac{\frac{5 b^4}{(EI)_y} + \frac{48 b^2 \kappa}{(GA)_{yz}}}{\frac{5 a^4}{(EI)_x} + \frac{5 b^4}{(EI)_y} + \frac{48 a^2 \kappa}{(GA)_{xz}} + \frac{48 b^2 \kappa}{(GA)_{yz}}} \right) q_0 \quad (4.149)$$

Se o painel de MLCC analisado for considerado infinitamente rígido ao cisalhamento, isto é, se $(GA)_{xz} \rightarrow \infty$ e $(GA)_{yz} \rightarrow \infty$, a Equação (4.149) assume a forma da Equação (4.145).

Além disso, é interessante também notar que, nas Equações (4.145) e (4.149), o quinhão de carregamento a ser adotado nos cálculos dos painéis de MLCC fica atrelado às dimensões em planta dos painéis, bem como as suas diferentes rigidezes efetivas à flexão e, quando for o caso, também as suas rigidezes efetivas ao cisalhamento.

4.3.3 Expressões para as rigidezes à flexão e ao cisalhamento efetivas

Para a determinação do quinhão de carregamento q_{0x} pela Equação (4.149), é necessário o conhecimento das rigidezes à flexão e ao cisalhamento efetivas. Caso esse quinhão de carregamento seja computado pela Equação (4.145), basta conhecer as rigidezes flexionais efetivas. As formas de se levantar as magnitudes dessas rigidezes estão demonstradas a seguir.

4.3.3.1 Expressões para as rigidezes à flexão efetivas

Para a determinação da rigidez à flexão efetiva, será considerado o Teorema de Steiner (ou Teorema dos Eixos Paralelos), o qual, em conformidade com Timoshenko e Gere (1994), pode ser anunciado como: o momento de inércia da área de uma dada seção transversal, em relação a um eixo qualquer, é dado pela soma do momento de inércia dessa área, em relação ao eixo centroidal, com o produto da área pelo quadrado da distância entre o eixo centroidal e o eixo qualquer de interesse. Com base no Teorema de Steiner, pode-se então definir as seguintes expressões para as rigidezes à flexão efetivas:

$$(EI)_x = \sum_{i=1}^n E_i b_x \frac{h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^n E_i b_x h_i z_i^2 \quad (4.150)$$

$$(EI)_y = \sum_{i=1}^n E_i b_y \frac{h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^n E_i b_y h_i z_i^2 \quad (4.151)$$

Ao considerar o caso particular de um painel de MLCC composto por cinco camadas de lamelas de uma mesma madeira (Figura 4.42), as Equações (4.150) e (4.151) assumem as formas:

$$\begin{aligned} (EI)_x &= \frac{E_0 b_x}{12} (h_1^3 + h_3^3 + h_5^3) + \frac{E_{90} b_x}{12} (h_2^3 + h_4^3) \\ &+ E_0 b_x (h_1 z_1^2 + h_5 z_5^2) + E_{90} b_x (h_2 z_2^2 + h_4 z_4^2) \end{aligned} \quad (4.152)$$

$$\begin{aligned} (EI)_y &= \frac{E_{90} b_y}{12} (h_1^3 + h_3^3 + h_5^3) + \frac{E_0 b_y}{12} (h_2^3 + h_4^3) \\ &+ E_{90} b_y (h_1 z_1^2 + h_5 z_5^2) + E_0 b_y (h_2 z_2^2 + h_4 z_4^2) \end{aligned} \quad (4.153)$$

4.3.3.2 Expressões para as rigidezes ao cisalhamento efetivas

A determinação das rigidezes ao cisalhamento efetivas, $(GA)_{xz}$ e $(GA)_{yz}$, pode ser feita por meio da Equação (2.350), a qual é referente ao Método de Analogia ao Cisalhamento. Neste caso, tem-se então:

$$(GA)_{xz} = \frac{\left(h - \frac{h_i}{2} - \frac{h_n}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_1 b_x} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{h_i}{G_i b_x}\right) + \frac{h_n}{2 G_n b_x}} \quad (4.154)$$

$$(GA)_{yz} = \frac{\left(h - \frac{h_i}{2} - \frac{h_n}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_1 b_y} + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} \left(\frac{h_i}{G_i b_y}\right) + \frac{h_n}{2 G_n b_y}} \quad (4.155)$$

Para a situação particular de um painel de MLCC composto por cinco camadas de lamelas de uma mesma madeira, conforme ilustra a Figura 4.42, pode-se reescrever as Equações (4.154) e (4.155) nas seguintes formas:

$$(GA)_{xz} = \frac{\left(h - \frac{h_1}{2} - \frac{h_5}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_0 b_x} + \frac{h_2}{G_{90} b_x} + \frac{h_3}{G_0 b_x} + \frac{h_4}{G_{90} b_x} + \frac{h_5}{2 G_0 b_x}} \quad (4.156)$$

$$(GA)_{yz} = \frac{\left(h - \frac{h_1}{2} - \frac{h_5}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_{90} b_y} + \frac{h_2}{G_0 b_y} + \frac{h_3}{G_{90} b_y} + \frac{h_4}{G_0 b_y} + \frac{h_5}{2 G_{90} b_y}} \quad (4.157)$$

4.3.4 Expressões para os esforços solicitantes internos

De posse do quinhão de carregamento q_{0x} , é possível proceder com os cálculos dos máximos esforços solicitantes internos de momento fletor e de esforço cortante que são desenvolvidos no painel de MLCC. Tais esforços são obtidos por meio da aplicação das equações de vigas biapoiadas com carregamento transversal uniformemente distribuído. Essas equações são provenientes da Estática Elementar e podem ser consultadas em Soriano (2013).

Para o máximo momento fletor, no centro do painel, tem-se:

$$M_{xx} = \frac{q_{0x} a^2}{8} \quad (4.158)$$

Já para o máximo esforço cortante, junto à região dos apoios, vem:

$$V_{xz} = \frac{q_{0x} a}{2} \quad (4.159)$$

4.3.5 Expressões para as máximas tensões normais e de cisalhamento e para o máximo deslocamento vertical

Os máximos valores das tensões normais e de cisalhamento podem ser obtidos por meio da aplicação das equações provenientes da Resistência dos Materiais, considerando o já consagrado processo de homogeneização de seções transversais.

4.3.5.1 Expressão para a máxima tensão normal

A máxima tensão normal ocorre na fibra do painel de MLCC mais distante do seu eixo neutro, ou seja, na cota $z = h/2$. Tomando-se como referência Timoshenko e Gere (1994), pode-se escrever a seguinte expressão para a máxima tensão normal:

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = n_E \frac{M_{xx} (h/2)}{I_x} \quad (4.160)$$

Em que:

- n_E – Razão modular;
- I_x – Momento de inércia da seção transversal homogeneizada (seção transformada) em relação ao eixo x .

A razão modular é definida pela relação entre o módulo de elasticidade da camada de lamelas onde se encontra a cota $z = h/2$ – neste caso, E_0 - e um módulo de elasticidade de referência E_{ref} , o qual pode ser considerado igual a E_0 ou a E_{90} . Portanto, pode-se escrever a razão modular como:

$$n_E = \frac{E_0}{E_{ref}} \quad (4.161)$$

Já para o momento de inércia I_x , tem-se, para um painel de MLCC de n camadas, a seguinte expressão:

$$I_x = \sum_{i=1}^n (I_{xc,i} + n_{E,i} A_i z_i^2) \quad (4.162)$$

Sendo:

$$A_i = b_x h_i \quad (4.163)$$

$$I_{xc,i} = \frac{(n_{E,i} b_x) h_i^3}{12} \quad (4.164)$$

A Equação (4.162) nada mais é que a expressão do Teorema de Steiner desenvolvida para seções transversais constituídas por diferentes módulos de elasticidade.

4.3.5.2 Expressões para a máxima tensão de cisalhamento

De forma contrária à máxima tensão normal, a máxima tensão de cisalhamento ocorre à altura do eixo neutro da seção transversal, ou seja, na cota $z = 0$. Novamente com base em Timoshenko e Gere (1994), escreve-se a expressão para máxima tensão de cisalhamento como sendo:

$$(\tau_{xz})_{\max} = n_E \frac{V_{xz} Q_x}{I_x b_x} \quad (4.165)$$

Na Equação (4.165), Q_x corresponde ao momento estático da seção transversal homogeneizada (seção transformada) em relação ao eixo x .

Para um painel de MLCC com 5 camadas de lamelas (Figura 4.42), o momento estático Q_x pode ser calculado pela expressão:

$$Q_x = n_{E,1} A_1 \left(\frac{h_1}{2} + h_2 + \frac{h_3}{2} \right) + n_{E,2} A_2 \left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \right) + n_{E,3} A_3 \frac{h_3}{4} \quad (4.166)$$

Ademais, caso seja de interesse um cálculo mais prático da máxima tensão de cisalhamento transversal, pode-se recorrer à expressão subsequente, constante em Timoshenko e Gere (1994), para seções transversais retangulares, a qual não necessita da determinação do momento estático Q_x .

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = \frac{3}{2} \frac{V_{xz}}{b_x h} \quad (4.167)$$

4.3.5.3 Expressões para o máximo deslocamento vertical

Para o cálculo do máximo valor do deslocamento vertical no centro do painel de MLCC, basta recorrer à Equação (4.141) ou à Equação (4.146), a depender da consideração ou não das deformações de cisalhamento.

4.4 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DA APLICAÇÃO DO MÉTODO ANALÍTICO PROPOSTO

Nesta subseção, estão reunidos os resultados relativos aos máximos deslocamentos verticais e às máximas tensões, normais e de cisalhamento, para o painel de MLCC objeto de estudo, bem como para suas variações paramétricas, que foram alcançados pela aplicação do método analítico proposto. De forma mais precisa, as subseções 4.4.1 e 4.4.2 abordam a aplicação do método mencionado às variações das razões b/a e h/b do painel de MLCC, respectivamente.

4.4.1 Método analítico proposto: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão b/a

Conforme demonstrado na subseção 4.3, o método analítico proposto pode ser aplicado aos painéis de MLCC com ou sem a consideração da contribuição das deformações de cisalhamento. Assim sendo, optou-se por apresentar, nas subseções 4.4.1.1 e 4.4.1.2, as análises

estruturais do painel de MLCC conduzidas conforme a versão mais simples e mais elaborada do método, respectivamente.

4.4.1.1 Método analítico proposto: aplicação para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$ (sem a consideração das deformações de cisalhamento)

A marcha de cálculos envolvida no emprego do método analítico proposto pode ser resumida na determinação sequencial das seguintes grandezas: propriedades mecânicas das seções transversais (rigidezes à flexão efetivas, rigidezes ao cisalhamento efetivas, momento de inércia e momento estático da seção transversal resistente homogeneizada), quinhão de carregamento utilizado para fins de dimensionamento, esforços solicitantes internos de momento fletor e esforço cortante, máximo deslocamento vertical, máxima tensão normal e máxima tensão de cisalhamento. Seguindo essa rotina, tem-se então:

a) Rigidezes à flexão efetivas:

As rigidezes à flexão efetivas em torno dos eixos x e y são dadas pelas Equações (4.150) e (4.151), respectivamente. Retomando essas equações, vem:

$$(EI)_x = \sum_{i=1}^{n=5} E_i b_x \frac{h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^{n=5} E_i b_x h_i z_i^2 \quad (4.168)$$

$$(EI)_y = \sum_{i=1}^n E_i b_y \frac{h_i^3}{12} + \sum_{i=1}^n E_i b_y h_i z_i^2 \quad (4.169)$$

Com o auxílio da Figura 4.1 e das Equações (4.168) e (4.169), é possível proceder com o preenchimento das Tabelas 4.67 e 4.68, as quais contemplam os cálculos de $(EI)_x$ e $(EI)_y$, respectivamente.

Tabela 4.67 – Método analítico proposto: $(EI)_x$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$

Camada	E_i	b_x	h_i	z_i	$E_i b_x t_i^3/12$	$E_i b_x t_i z_i^2$	$(EI)_{x,i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(N·mm ²)
1	11.000	1.000	20	40	7,333E+09	3,520E+11	3,593E+11
2	370	1.000	20	20	2,467E+08	2,960E+09	3,207E+09
3	11.000	1.000	20	0	7,333E+09	0,000E+00	7,333E+09
4	370	1.000	20	-20	2,467E+08	2,960E+09	3,207E+09
5	11.000	1.000	20	-40	7,333E+09	3,520E+11	3,593E+11
$(EI)_x = \Sigma(EI)_{x,i} =$							7,324E+11

Fonte: O Autor

Tabela 4.68 – Método analítico proposto: $(EI)_y$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$

Camada	E_i	b_y	h_i	z_i	$E_i b_y t_i^3/12$	$E_i b_y t_i z_i^2$	$(EI)_{y,i}$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm)	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(N·mm ²)
1	370	1.000	20	40	2,467E+08	1,184E+10	1,209E+10
2	11.000	1.000	20	20	7,333E+09	8,800E+10	9,533E+10
3	370	1.000	20	0	2,467E+08	0,000E+00	2,467E+08
4	11.000	1.000	20	-20	7,333E+09	8,800E+10	9,533E+10
5	370	1.000	20	-40	2,467E+08	1,184E+10	1,209E+10
$(EI)_y = \Sigma(EI)_{y,i} =$							2,151E+11

Fonte: O Autor

b) Rigidezes ao cisalhamento efetivas:

As rigidezes ao cisalhamento efetivas para as seções transversais contidas nos planos x-z e y-z são expressas pelas Equações (4.154) e (4.155), respectivamente. Retomando essas equações, tem-se:

$$(GA)_{xz} = \frac{\left(h - \frac{h_1}{2} - \frac{h_5}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_0 b_x} + \frac{h_2}{G_{90} b_x} + \frac{h_3}{G_0 b_x} + \frac{h_4}{G_{90} b_x} + \frac{h_5}{2 G_0 b_x}} \quad (4.170)$$

$$(GA)_{yz} = \frac{\left(h - \frac{h_1}{2} - \frac{h_5}{2}\right)^2}{\frac{h_1}{2 G_{90} b_y} + \frac{h_2}{G_0 b_y} + \frac{h_3}{G_{90} b_y} + \frac{h_4}{G_0 b_y} + \frac{h_5}{2 G_{90} b_y}} \quad (4.171)$$

A partir dos dados constantes na Figura 4.1 e das Equações (4.170) e (4.171), é possível calcular os valores de $(GA)_{xz}$ e $(GA)_{yz}$, estando os seus respectivos resultados relacionados nas Tabelas 4.69 e 4.70, respectivamente.

Tabela 4.69 – Método proposto: $(GA)_{xz}$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$

Camada	G_i	b_x	h_i	$h_i/2 G_i b_x$ ou $h_i/G_i b_x$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm ² /N)
1	690	1.000	20	1,449E-05
2	50	1.000	20	4,000E-04
3	690	1.000	20	2,899E-05
4	50	1.000	20	4,000E-04
5	690	1.000	20	1,449E-05
$(GA)_{xz} (N) =$				7,459E06

Fonte: O Autor

Tabela 4.70 – Método proposto: $(GA)_{yz}$ para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$

Camada	G_i	b_y	h_i	$h_i/2 G_i b_x$ ou $h_i/G_i b_x$
	(MPa)	(mm)	(mm)	(mm ² /N)
1	50	1.000	20	2,000E-04
2	690	1.000	20	2,899E-05
3	50	1.000	20	4,000E-04
4	690	1.000	20	2,899E-05
5	50	1.000	20	2,000E-04
$(GA)_{yz} (N) =$				7,459E06

Fonte: O Autor

c) Momento de inércia da seção transversal resistente:

O momento de inércia da seção transversal resistente, segundo o método proposto, é dado pelo Teorema de Steiner, expresso pela Equação (4.162). Recuperando essa equação, escreve-se:

$$I_x = \sum_{i=1}^{n=5} (I_{xc,i} + n_{E,i} A_i z_i^2) \quad (4.172)$$

Sendo:

$$A_i = b_x h_i \quad (4.173)$$

$$I_{xc,i} = \frac{(n_{E,i} b_x) h_i^3}{12} \quad (4.174)$$

As Equações (4.172) a (4.174), juntamente com o auxílio da Figura 4.1, permitem calcular o momento de inércia I_x , estando os resultados relacionados na Tabela 4.71.

Tabela 4.71 – Método proposto: momento de inércia da seção transformada para o painel de MLCC com razão $b/a = 1,0$

Lamela	b_x	h_i	E_i	$n_{E,i}$	z_i	$I_{xc,i}$	$n_{E,i} A_i z_i^2$	$I_{x,i}$
	(mm)	(mm)	(MPa)		(mm)	(mm ⁴)	(mm ⁴)	(mm ⁴)
1	1.000	20	11.000	1	40	6,667E+05	3,200E+07	3,267E+07
2	1.000	20	370	370/11.000	20	2,242E+04	2,691E+05	2,915E+05
3	1.000	20	11.000	1	0	6,667E+05	0,000E+00	6,667E+05
4	1.000	20	370	370/11.000	20	2,242E+04	2,691E+05	2,915E+05
5	1.000	20	11.000	1	40	6,667E+05	3,200E+07	3,267E+07
$I_x = \Sigma I_{x,i} =$								6,658E+07

Fonte: O Autor

d) Momento estático da seção transversal resistente:

O momento estático da seção transversal resistente tem seu cálculo realizado pela Equação (4.166). Retomando essa equação, tem-se:

$$Q_x = n_{E,1} A_1 \left(\frac{h_1}{2} + h_2 + \frac{h_3}{2} \right) + n_{E,2} A_2 \left(\frac{h_2}{2} + \frac{h_3}{2} \right) + n_{E,3} A_3 \frac{h_3}{4} \quad (4.175)$$

$$Q_x = 1 \cdot (1.000 \cdot 20) \cdot \left(\frac{20}{2} + 20 + \frac{20}{2} \right) + \frac{370}{11.000} \cdot (1.000 \cdot 20) \cdot \left(\frac{20}{2} + \frac{20}{2} \right) + 1 \cdot (1.000 \cdot 20) \cdot \frac{20}{4} \quad (4.176)$$

$$Q_x \cong 9,135 \cdot 10^5 \text{ mm}^3 \quad (4.177)$$

e) Quinhão de carregamento q_{0x} :

A Equação (4.145) permite o cálculo do quinhão de carregamento q_{0x} a ser utilizado para o dimensionamento do painel de MLCC. Por essa equação, vem:

$$q_{0x} = \left(\frac{b^4}{\frac{(EI)_y}{(EI)_x} a^4 + b^4} \right) q_0 \quad (4.178)$$

$$q_{0x} \cong \left(\frac{3.000^4}{\frac{2,151 \cdot 10^{11}}{7,324 \cdot 10^{11}} \cdot 3.000^4 + 3.000^4} \right) \cdot 5 \cong 3,865 \text{ N/mm} \quad (4.179)$$

De posse do quinhão de carregamento q_{0x} , torna-se possível a determinação do máximo deslocamento vertical pela Equação (4.141), dos esforços solicitantes internos pelas Equações (4.158) e (4.159), da tensão normal máxima pela Equação (4.160) e da tensão de cisalhamento máxima pela Equação (4.165) ou pela Equação (4.167). Todas essas equações são utilizadas nos tópicos subsequentes.

f) Máximo deslocamento vertical:

$$w_x = \frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_x} \quad (4.180)$$

$$w_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{3,865 \cdot 3.000^4}{7,324 \cdot 10^{11}} \cong 5,566 \text{ mm} \quad (4.181)$$

g) Máximo momento fletor:

$$M_{xx} = \frac{q_{0x} a^2}{8} \quad (4.182)$$

$$M_{xx} \cong \frac{3,865 \cdot 3.000^2}{8} \cong 4,348 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (4.183)$$

h) Máximo esforço cortante:

$$V_{xz} = \frac{q_{0x} a}{2} \quad (4.184)$$

$$V_{xz} \cong \frac{3,865 \cdot 3.000}{2} \cong 5,797 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (4.185)$$

i) Máxima tensão normal:

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = n_E \frac{M_{xx} (h/2)}{I_x} \quad (4.186)$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = 1 \cdot \frac{4,348 \cdot 10^6 \cdot (100/2)}{6,658 \cdot 10^7} \cong 3,265 \text{ MPa} \quad (4.187)$$

j) Máxima tensão de cisalhamento:

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = n_E \frac{V_{xz} Q_x}{I_x b_x} \quad (4.188)$$

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = 1 \cdot \frac{5,797 \cdot 10^3 \cdot 9,135 \cdot 10^5}{6,658 \cdot 10^7 \cdot 1.000} \cong 0,0795 \text{ MPa} \quad (4.189)$$

k) Máxima tensão de cisalhamento (fórmula aproximada):

$$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}} = \frac{3}{2} \frac{V_{xz}}{b_x h} \quad (4.190)$$

$$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5,797 \cdot 10^3}{1.000 \cdot 100} \cong 0,0870 \text{ MPa} \quad (4.191)$$

4.4.1.2 Método analítico proposto: aplicação para o painel de MLCC de referência com razão $b/a = 1,0$ (com a consideração das deformações de cisalhamento)

Quando da consideração das deformações de cisalhamento, basta utilizar a Equação (4.149) ao invés da Equação (4.145) para levantar o quinhão de carregamento q_{0x} a ser empregado no dimensionamento do painel de MLCC. O restante da rotina de cálculo permanece inalterada. Desta forma, pode-se dar prosseguimento aos seguintes cálculos:

a) Quinhão de carregamento q_{0x} :

$$q_{0x} = \left(\frac{\frac{5 b^4}{(EI)_y} + \frac{48 b^2 \kappa}{(GA)_{yz}}}{\frac{5 a^4}{(EI)_x} + \frac{5 b^4}{(EI)_y} + \frac{48 a^2 \kappa}{(GA)_{xz}} + \frac{48 b^2 \kappa}{(GA)_{yz}}} \right) q_0 \quad (4.192)$$

$$q_{0x} \cong \left(\frac{\frac{5 \cdot 3.000^4}{2,151 \cdot 10^{11}} + \frac{48 \cdot 3.000^2 \cdot 3/2}{7,459 \cdot 10^6}}{\frac{5 \cdot 3.000^4}{7,324 \cdot 10^{11}} + \frac{5 \cdot 3.000^4}{2,151 \cdot 10^{11}} + \frac{48 \cdot 3.000^2 \cdot 3/2}{7,459 \cdot 10^6} + \frac{48 \cdot 3.000^2 \cdot 3/2}{7,459 \cdot 10^6}} \right) \cdot 5 \cong 3,774 \text{ N/mm} \quad (4.193)$$

b) Máximo deslocamento vertical:

$$w_x = \frac{5}{384} \frac{q_{0x} a^4}{(EI)_x} + \frac{1}{8} \frac{q_{0x} a^2 \kappa}{(GA)_{xz}} \quad (4.194)$$

$$w_x = \frac{5}{384} \cdot \frac{3,774 \cdot 3.000^4}{7,324 \cdot 10^{11}} + \frac{1}{8} \cdot \frac{3,774 \cdot 3.000^2 \cdot 3/2}{7,459 \cdot 10^6} \cong 6,289 \text{ mm} \quad (4.195)$$

c) Máximo momento fletor:

$$M_{xx} = \frac{q_{0x} a^2}{8} \quad (4.196)$$

$$M_{xx} \cong \frac{3,774 \cdot 3.000^2}{8} \cong 4,246 \cdot 10^6 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (4.197)$$

d) Máximo esforço cortante:

$$V_{xz} = \frac{q_{0x} a}{2} \quad (4.198)$$

$$V_{xz} \cong \frac{3,774 \cdot 3.000}{2} \cong 5,661 \cdot 10^3 \text{ N} \quad (4.199)$$

e) Máxima tensão normal:

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = n_E \frac{M_{xx} (h/2)}{I_x} \quad (4.200)$$

$$(\sigma_{xx})_{\text{máx}} = 1 \cdot \frac{4,246 \cdot 10^6 \cdot (100/2)}{6,658 \cdot 10^7} \cong 3,188 \text{ MPa} \quad (4.201)$$

f) Máxima tensão de cisalhamento:

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = n_E \frac{V_{xz} Q_x}{I_x b_x} \quad (4.202)$$

$$(\tau_{xz})_{\text{máx}} = 1 \cdot \frac{5,661 \cdot 10^3 \cdot 9,135 \cdot 10^5}{6,658 \cdot 10^7 \cdot 1.000} \cong 0,0777 \text{ MPa} \quad (4.203)$$

g) Máxima tensão de cisalhamento (aproximada):

$$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}} = \frac{3}{2} \frac{V_{xz}}{b_x h} \quad (4.204)$$

$$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5,661 \cdot 10^3}{1.000 \cdot 100} \cong 0,0849 \text{ MPa} \quad (4.205)$$

4.4.1.3 Método analítico proposto: aplicação para o painel de MLCC de referência com razão b/a igual 1,5 e 2,0

Para as demais análises estruturais das variações paramétricas do painel de MLCC de referência, basta seguir uma rotina de cálculo semelhante a que fora exposta na subseção precedente. Portanto, para as razões b/a iguais a 1,5 e 2,0, serão apenas apresentados os resultados finais, os quais estão dispostos nas Tabelas 4.72 e 4.73.

Tabela 4.72 – Método proposto (sem deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão b/a

Razão b/a	q_{0x}	M_{xx}	V_{xz}	w	$(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}}$
	(N/mm)	(N·mm)	(N)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1,0	3,865	4,348E+06	5,797E+03	5,566	3,265	0,0795	0,0870
1,5	4,726	5,317E+06	7,089E+03	6,805	3,992	0,0973	0,106
2,0	4,910	5,524E+06	7,365E+03	7,070	4,148	0,101	0,110

Fonte: O Autor

Tabela 4.73 – Método proposto (com deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão b/a

Razão b/a	q_{0x}	M_{xx}	V_{xz}	w	$(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}}$
	(N/mm)	(N·mm)	(N)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1,0	3,774	4,246E+06	5,661E+03	6,289	3,188	0,0777	0,0849
1,5	4,691	5,278E+06	7,037E+03	7,817	3,963	0,0965	0,106
2,0	4,897	5,509E+06	7,346E+03	8,160	4,137	0,101	0,110

Fonte: O Autor

4.4.2 Método analítico proposto: cálculos do deslocamento vertical máximo $w_{\text{máx}}$, da tensão normal máxima $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e da tensão de cisalhamento máxima $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ do painel de MLCC de referência e suas variações paramétricas da razão h/b

Para realizar a avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC analisado, segue-se novamente a rotina de cálculos anteriormente explicitada na subseção 4.4.1.1. As equações a serem empregadas são exatamente as mesmas, devendo-se apenas utilizar como auxílio visual as Figuras 4.8 a 4.10. Devido à similaridade dos cálculos, apresenta-se, para todas as razões h/b do painel de MLCC, apenas uma relação dos resultados finais de interesse às análises estruturais. Em relação a esses resultados, tem-se, na Tabela 4.74, as propriedades mecânicas das seções transversais e, nas Tabelas 4.75 e 4.76, os quinhões de carregamento, os esforços solicitantes internos, o máximo deslocamento vertical e as máximas tensões normais e de cisalhamento. Mais precisamente, A Tabela 4.75 traz um compêndio dos resultados referentes ao método proposto sem a consideração das deformações de cisalhamento, ao passo que a Tabela 4.76 reúne os resultados da versão mais apurada do método.

Tabela 4.74 – Método proposto: propriedades mecânicas das seções transversais para a avaliação paramétrica da razão h/b

Razão h/b	$(EI)_x$	$(EI)_y$	$(GA)_{xz}$	$(GA)_{yz}$	I_x	Q_x
	(N·mm ²)	(N·mm ²)	(N)	(N)	(mm ⁴)	(mm ³)
1/30	7,324E+11	2,151E+11	7,459E+06	7,459E+06	6,658E+07	9,135E+05
1/20	2,472E+12	7,259E+11	1,119E+07	1,119E+07	2,252E+08	2,056E+06
1/15	5,859E+12	1,721E+12	1,492E+07	1,492E+07	5,327E+08	3,654E+06

Fonte: O Autor

Tabela 4.75 – Método proposto (sem deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão h/b

Razão h/b	q_{0x}	M_{xx}	V_{xz}	w	$(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}}$
	(N/mm)	(N·mm)	(N)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1/30	3,865	4,348E+06	5,797E+03	5,566	3,265	0,0795	0,0870
1/20	3,865	4,348E+06	5,797E+03	1,649	1,448	0,0529	0,0580
1/15	3,865	4,348E+06	5,797E+03	0,696	0,816	0,0398	0,0435

Fonte: O Autor

Tabela 4.76 – Método proposto (com deformações de cisalhamento): avaliação paramétrica da razão h/b

Razão h/b	q_{0x}	M_{xx}	V_{xz}	w	$(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx}}$	$(\tau_{xz})_{\text{máx,aprox}}$
	(N/mm)	(N·mm)	(N)	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)
1/30	3,774	4,246E+06	5,661E+03	6,289	3,188	0,0777	0,0849
1/20	3,676	4,136E+06	5,514E+03	2,123	1,380	0,0504	0,0551
1/15	3,562	4,007E+06	5,343E+03	1,044	0,752	0,0367	0,0401

Fonte: O Autor

4.4.3 Ponderações acerca da aplicação do método analítico proposto ao painel de MLCC analisado

Quando da aplicação do método analítico proposto ao painel de MLCC objeto estudo, assim como as suas variações paramétricas, algumas vantagens e limitações puderam ser melhor elucidadas.

De maneira análoga aos métodos analíticos unidimensionais anteriormente apresentados, o método proposto também não fez qualquer menção aos momentos de torção ou momentos volventes, caracterizando a não consideração da rigidez torcional dos painéis de MLCC. Entretanto, a invariabilidade das flechas e das tensões com a variação da razão b/a não mais ocorre, pois, em ambas as versões do método proposto, são levadas em consideração as dimensões em planta dos painéis de MLCC na definição do carregamento transversal q_{0x} . Em complemento, pode-se observar que a escolha pela consideração das deformações transversais de cisalhamento acabou por influir de forma mais significativa no cômputo das flechas e de forma menos relevante na determinação das tensões.

Por fim, foi possível verificar que a grande vantagem trazida pelo método proposto é a consideração de parâmetros geométricos e mecânicos na definição do carregamento transversal q_{0x} utilizado para análise estrutural dos painéis de MLCC. Em outras palavras, q_{0x} foi definido de forma a ser uma função das dimensões em planta, das rigidezes à flexão efetiva e das rigidezes ao cisalhamento efetivas dos painéis de MLCC.

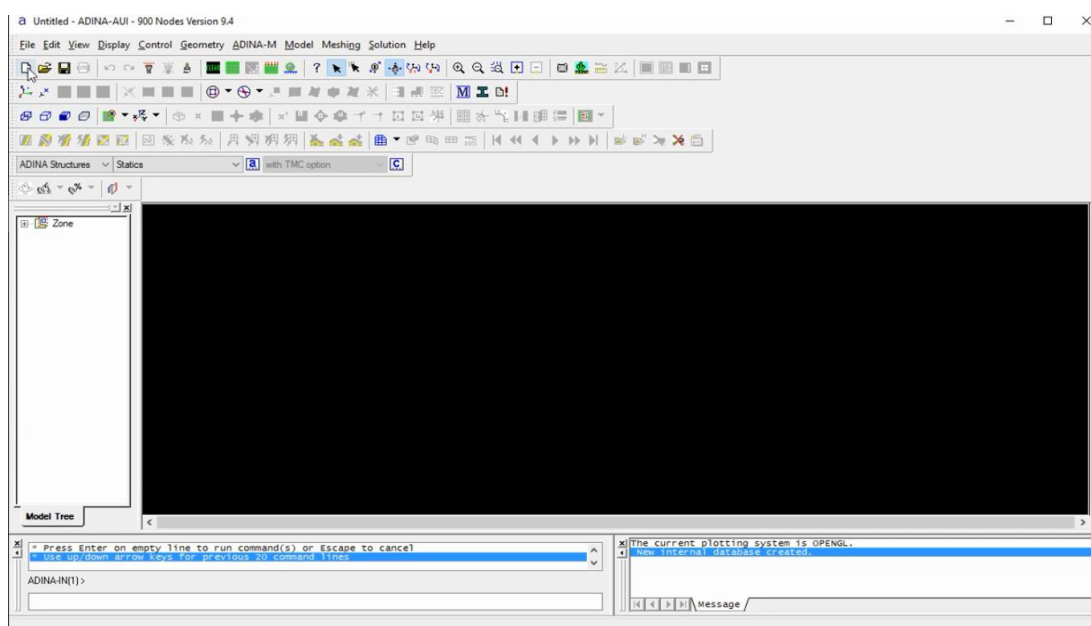
4.5 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES DECORRENTES DE MODELAGENS NO SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS

4.5.1 Modelagens em elementos finitos no *software* ADINA

Nesta subseção, são apresentados os valores dos máximos deslocamentos verticais, das máximas tensões normais e das máximas tensões de cisalhamento obtidas para o painel de MLCC de referência, bem como para suas variações paramétricas, quando da realização de modelagens em Elementos Finitos, utilizando-se a versão de 900 nós do *software* ADINA.

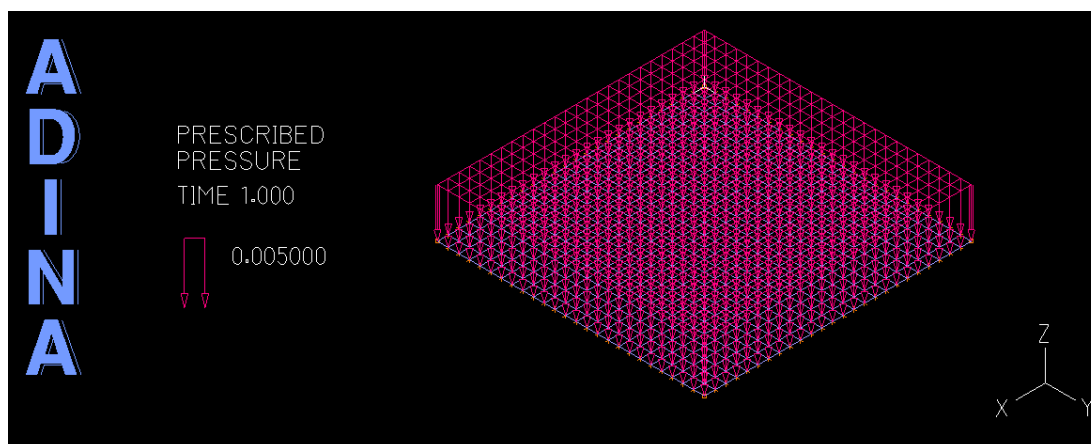
Primeiramente, tem-se, na Figura 4.43, uma reprodução da interface do *software* ADINA. Subsequentemente, a Figura 4.44 ilustra a modelagem do painel de MLCC de referência, em uma perspectiva isométrica, que permite visualizar o carregamento uniformemente distribuído atuante. Nota-se que o carregamento apresenta intensidade de 0,005 N/mm², a qual é equivalente a 5,0 kN/m².

Figura 4.43 – Interface do *software* ADINA



Fonte: *Printscreen* do *software* ADINA

Figura 4.44 – ADINA: perspectiva isométrica do painel de MLCC de referência

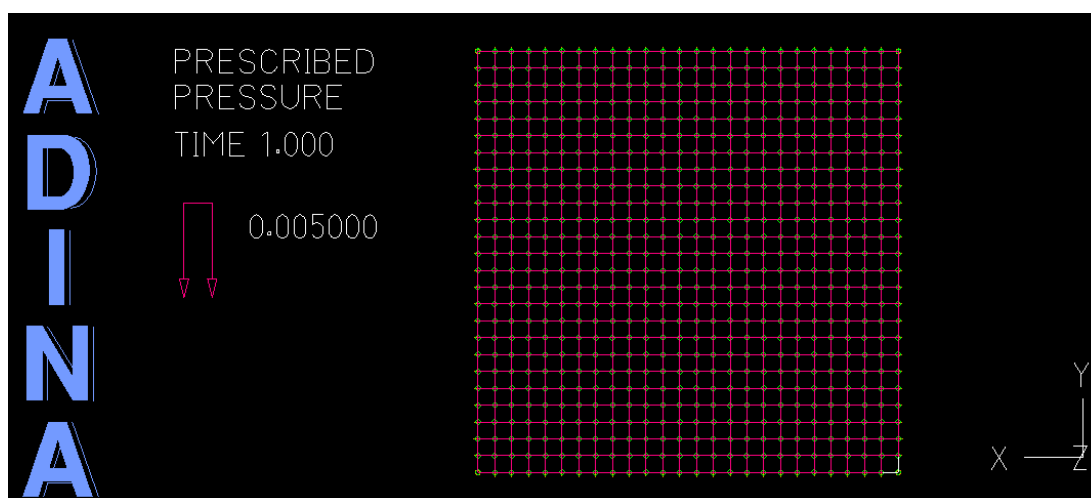


Fonte: *Printscreen do software ADINA*

A Figura 4.45, por sua vez, ilustra uma representação em planta do mesmo painel, na qual se nota uma malha de elementos finitos com 25 elementos quadriláteros de 4 nós tanto na direção x quanto na direção y. Essa malha foi empregada para as variações paramétricas $b/a = 1,0$, $h/b = 1/30$, $h/b = 1/20$ e $h/b = 1/15$. Já para as variações paramétricas b/a iguais a 1,5 e 2,0, as malhas de elementos finitos adotadas foram de:

- 22 elementos quadriláteros de 4 nós na direção x e 33 elementos quadriláteros de 4 nós na direção y;
- 20 elementos quadriláteros de 4 nós na direção x e 40 elementos quadriláteros de 4 nós na direção y.

Figura 4.45 – ADINA: malha de elementos finitos do painel de MLCC de referência



Fonte: *Printscreen do software ADINA*

As malhas supracitadas foram escolhidas tomando-se por base o trabalho de Erpen, Benincá e Morsch (2021), e, conforme demonstrado adiante, os resultados alcançados com as referidas malhas demonstraram-se condizentes com os resultados das teorias de placas.

O *software* ADINA apresenta uma opção que permite filtrar os máximos valores dos deslocamentos e das tensões normais e de cisalhamento, juntamente com a sua localização no painel. Com o auxílio dessa função, foi possível sintetizar os máximos valores das grandezas de interesse à análise estrutural e que estão relacionados nas Tabelas 4.77 e 4.78.

Tabela 4.77 – ADINA: avaliação paramétrica da razão b/a

Razão b/a	W _{máx}	(σ_{xx}) _{máx}	(σ_{yy}) _{máx}	(τ_{xy}) _{máx}	(τ_{xz}) _{máx}	(τ_{yz}) _{máx}	(σ_{zz}) _{máx}	Elementos finitos	
	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	Dir. x	Dir. y
1,0	6,002	3,172	1,823	0,487	0,0832	0,0732	0,000	25	25
1,5	7,831	4,183	1,283	0,500	0,0960	0,0664	0,000	22	33
2,0	8,153	4,364	1,243	0,491	0,0963	0,0650	0,000	20	40

Fonte: O Autor

Tabela 4.78 – ADINA: avaliação paramétrica da razão h/b

Razão h/b	W _{máx}	(σ_{xx}) _{máx}	(σ_{yy}) _{máx}	(τ_{xy}) _{máx}	(τ_{xz}) _{máx}	(τ_{yz}) _{máx}	(σ_{zz}) _{máx}	Elementos finitos	
	(mm)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	Dir. x	Dir. y
1/30	6,002	3,172	1,823	0,487	0,0832	0,0732	0,000	25	25
1/20	1,975	1,388	0,839	0,221	0,0549	0,0492	0,000	25	25
1/15	0,949	0,767	0,490	0,127	0,0407	0,0373	0,000	25	25

Fonte: O Autor

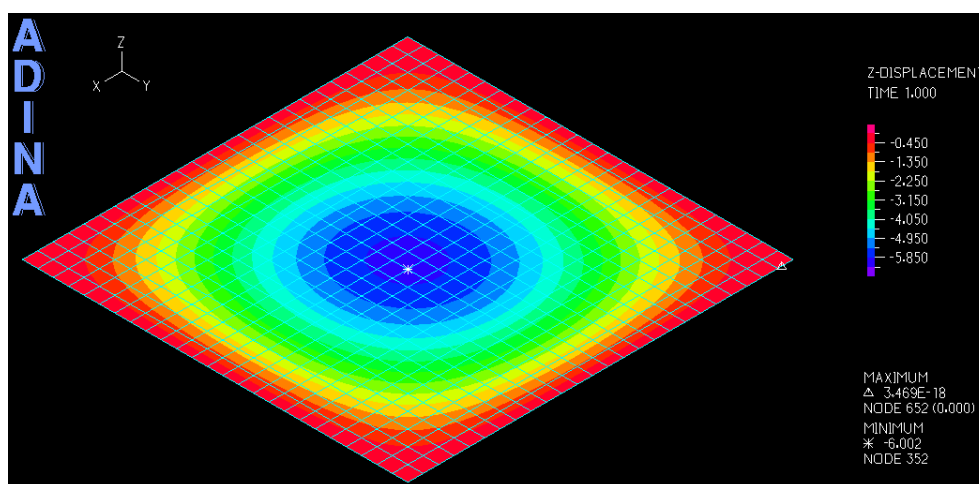
Com o intuito de melhor ilustrar os resultados sintetizados nas Tabelas 4.77 e 4.78, estão apresentadas a seguir as distribuições dos deslocamentos e das tensões, normais e de cisalhamento, nas regiões mais críticas dos painéis avaliados.

As Figuras 4.46 a 4.63 ilustram as referidas distribuições para as variações paramétricas b/a, ao passo que as Figuras 4.64 a 4.75 trazem as distribuições para as variações paramétricas h/b. Vale relembrar que os máximos deslocamentos verticais e as máximas tensões para as variações paramétricas b/a = 1,0 e h/b = 1/30 são os mesmos, pois ambas variações são relativas ao painel de MLCC de referência.

Faz-se também importante pontuar que o *software* ADINA considera as tensões de tração como negativas e as tensões de compressão positivas, diferentemente da convenção

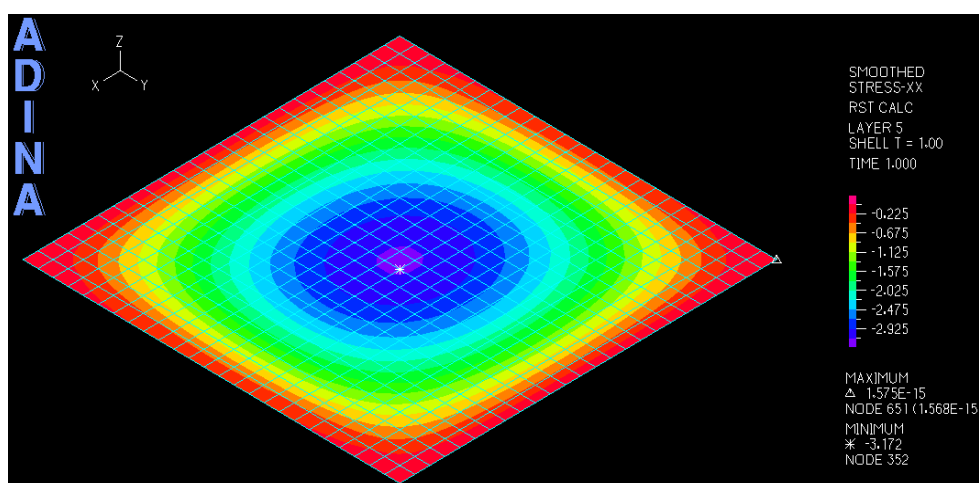
adotada para os métodos de análise anteriores. Contudo, como os painéis de MLCC analisados na presente pesquisa são simétricos – em termos de geometria, de propriedades mecânicas e de carregamento – as máximas tensões normais de tração e de compressão diferem entre si apenas quanto o sinal. Neste caso, optou-se por apresentar as tensões normais de tração nas figuras subsequentes. Além disso, podem ser verificados em cada uma das figuras supramencionadas os seguintes elementos: convenção de eixos adotada pelo *software* ADINA, escala de cores que traduz a escala de magnitude das grandezas avaliadas e valores máximos e mínimos de cada uma das grandezas na cota z de interesse.

Figura 4.46 – ADINA: deslocamentos verticais w para $b/a = 1,0$



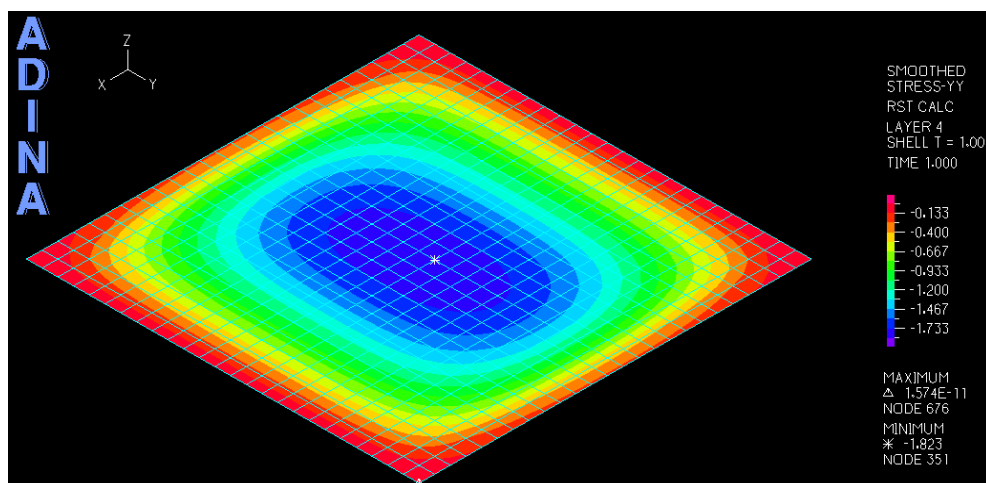
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.47 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,0$



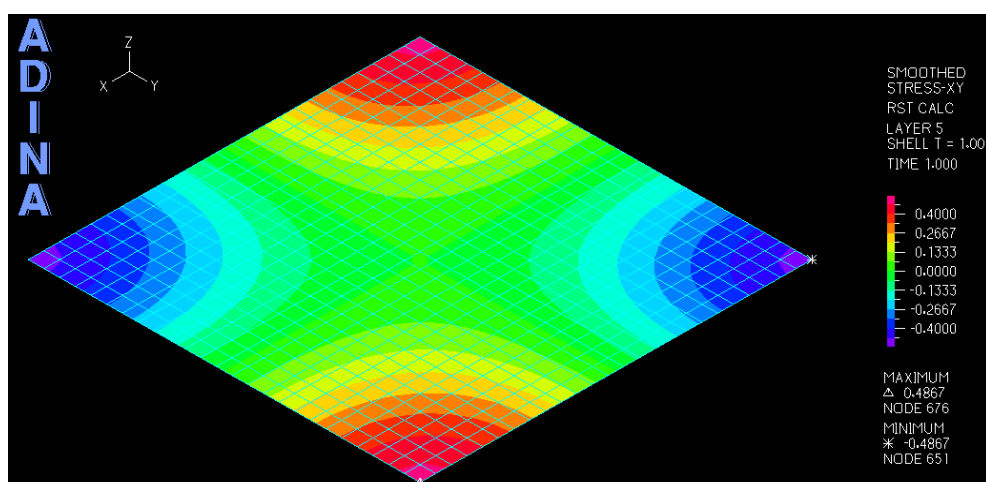
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.48 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $b/a = 1,0$



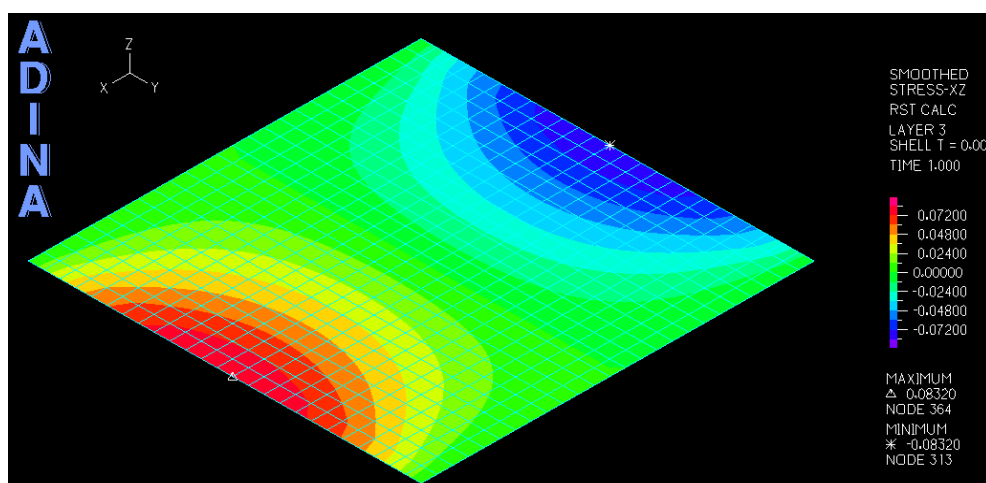
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.49 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,0$



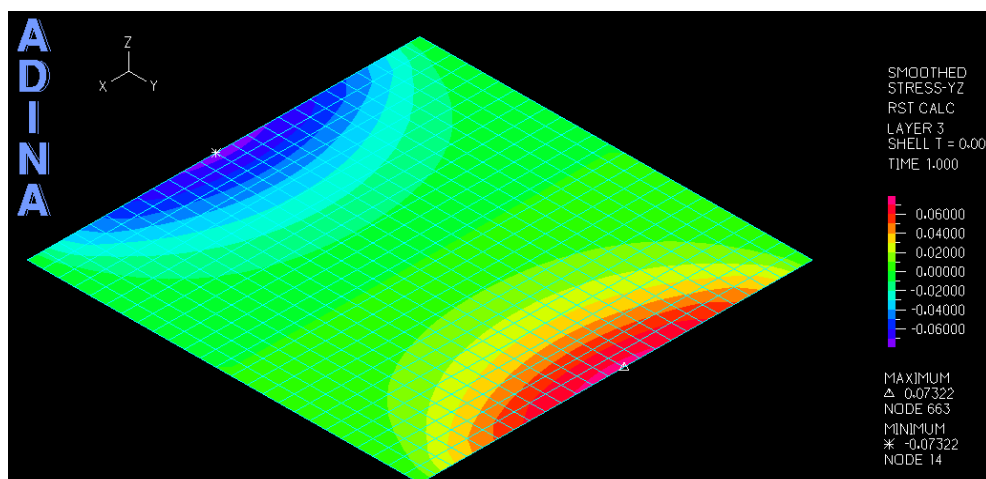
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.50 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,0$



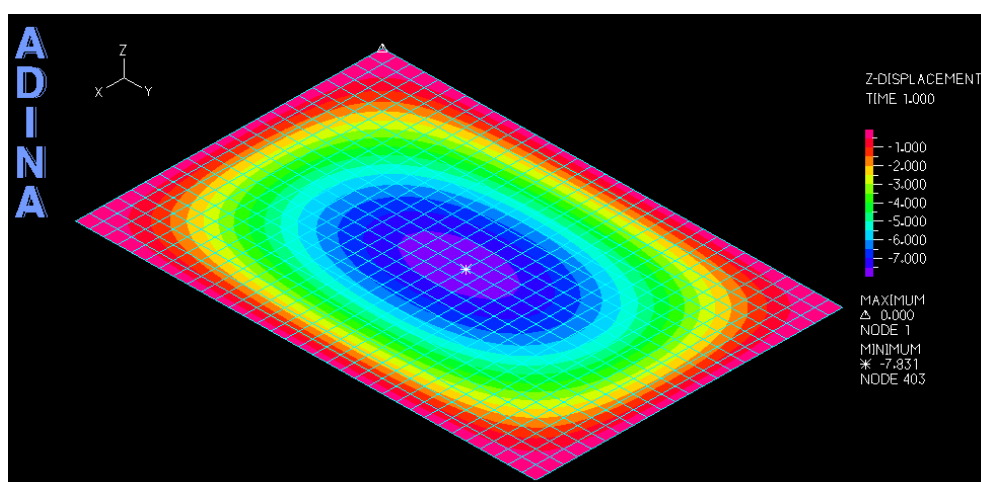
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.51 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,0$



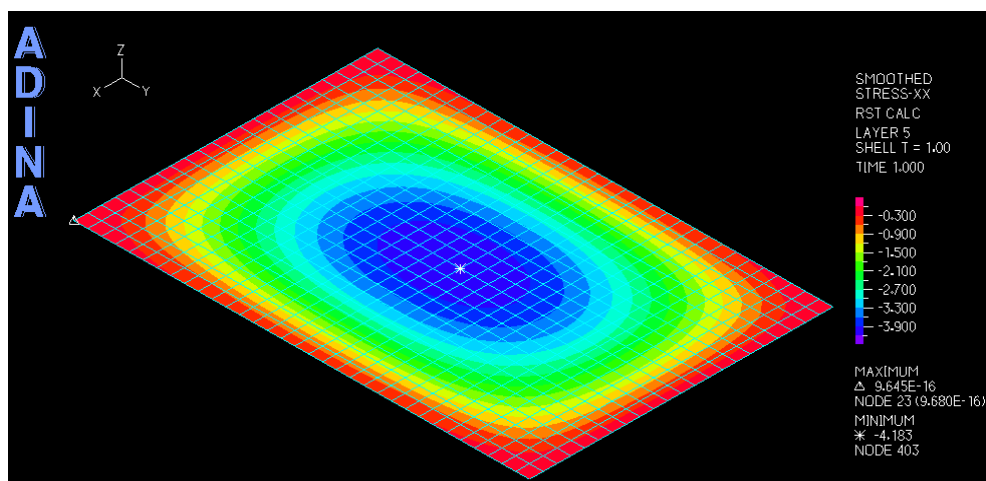
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.52 – ADINA: deslocamentos verticais w para $b/a = 1,5$



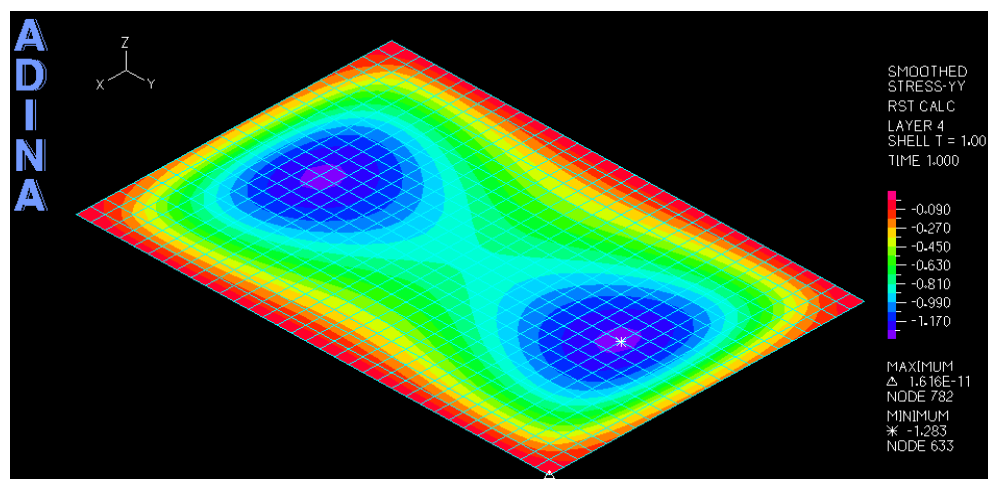
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.53 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,5$



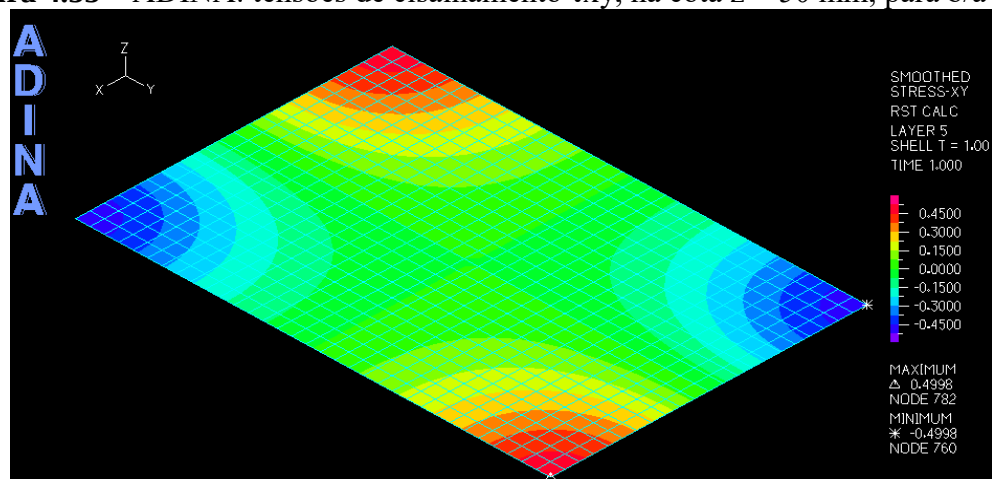
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.54 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $b/a = 1,5$



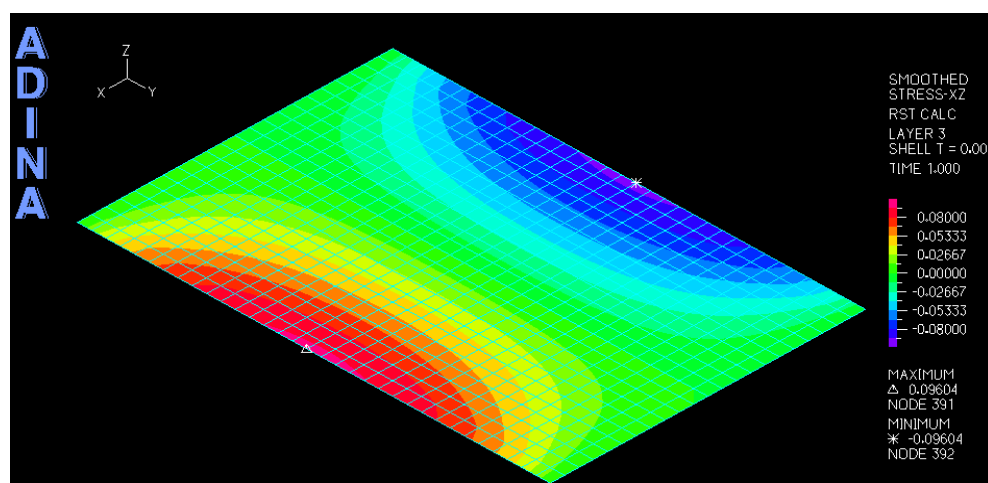
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.55 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 1,5$



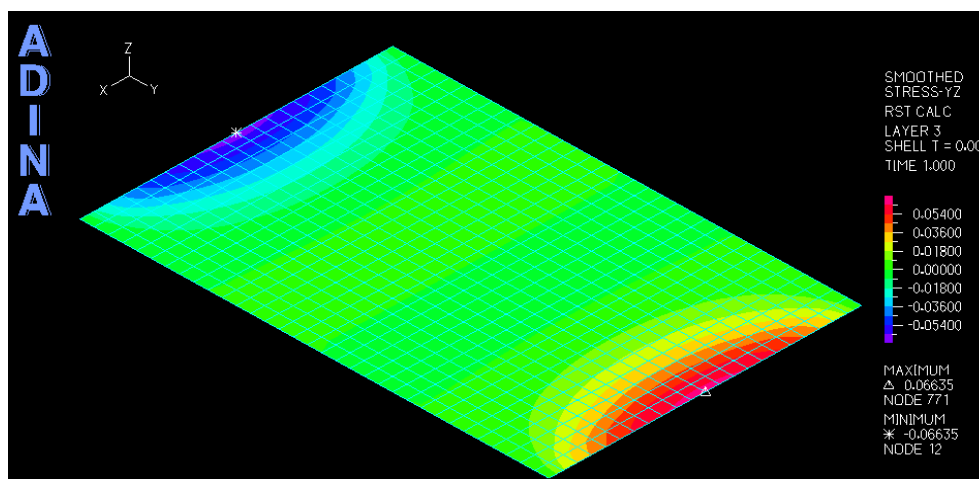
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.56 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,5$



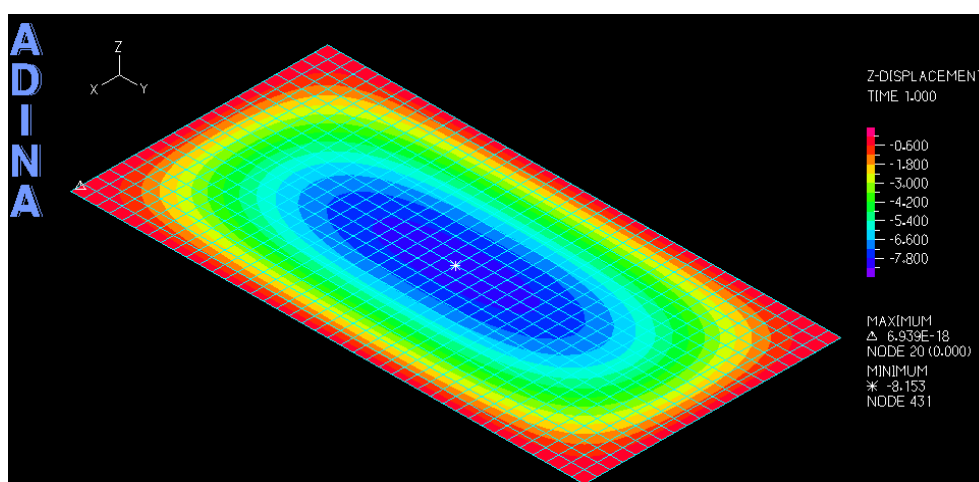
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.57 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 1,5$



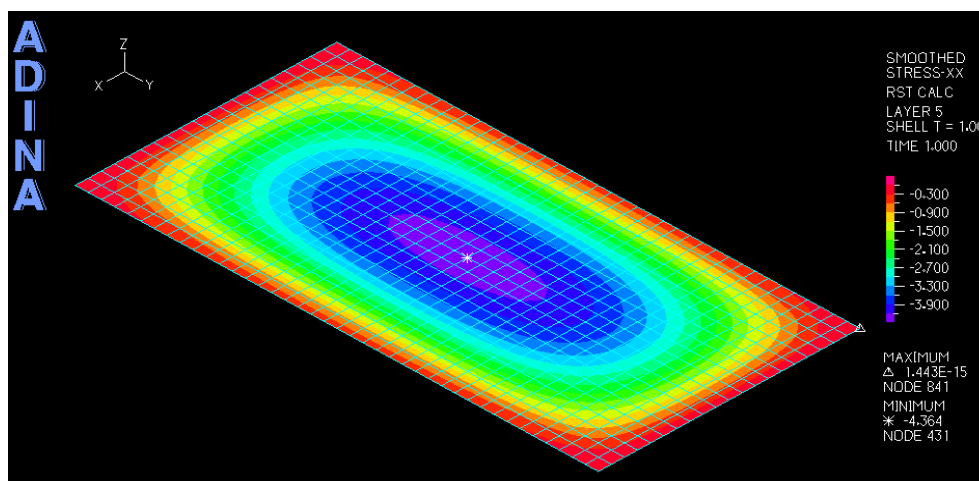
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.58 – ADINA: deslocamentos verticais w para $b/a = 2,0$



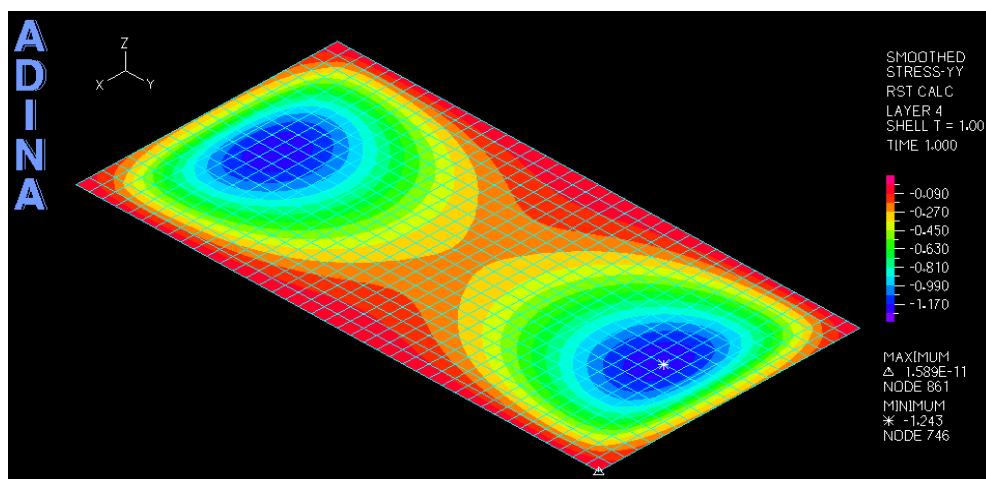
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.59 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 2,0$



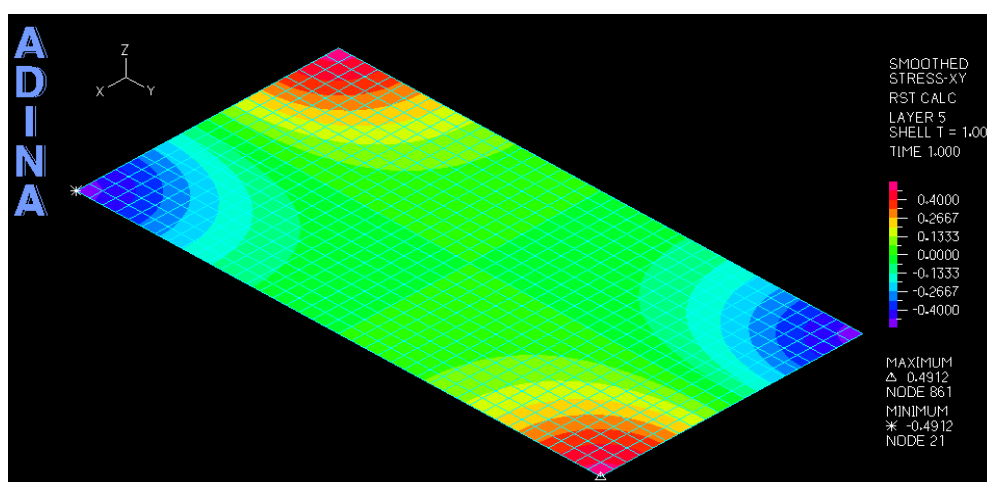
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.60 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $b/a = 2,0$



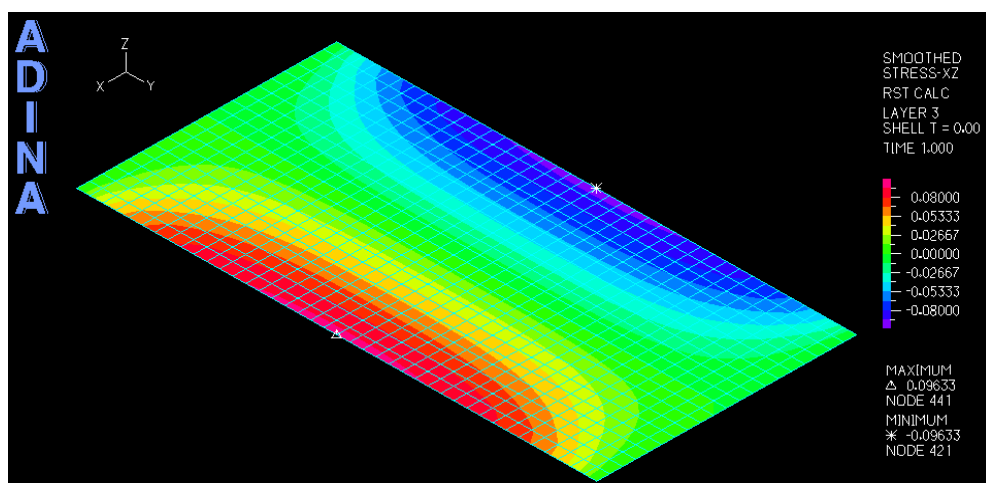
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.61 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $b/a = 2,0$



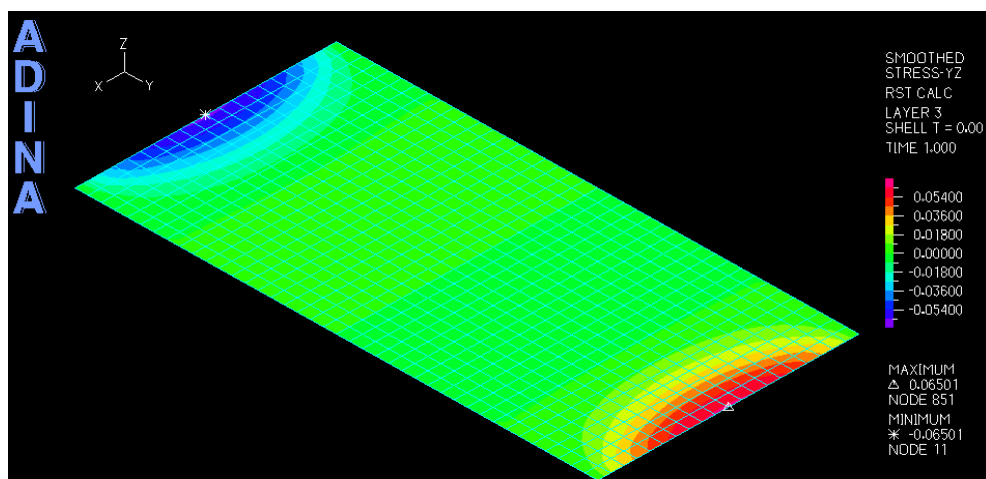
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.62 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 2,0$



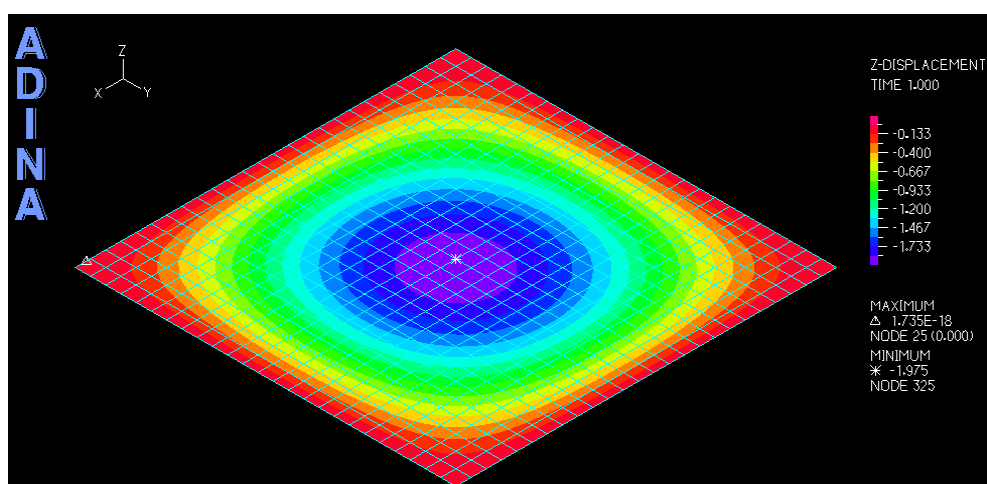
Fonte: Printscreen do software ADINA

Figura 4.63 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $b/a = 2,0$



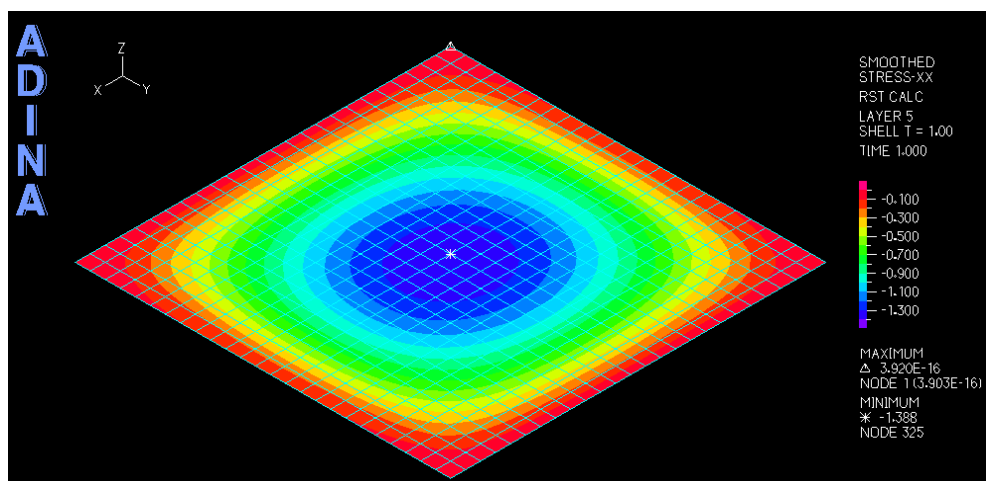
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.64 – ADINA: deslocamentos verticais w para $h/b = 1/20$



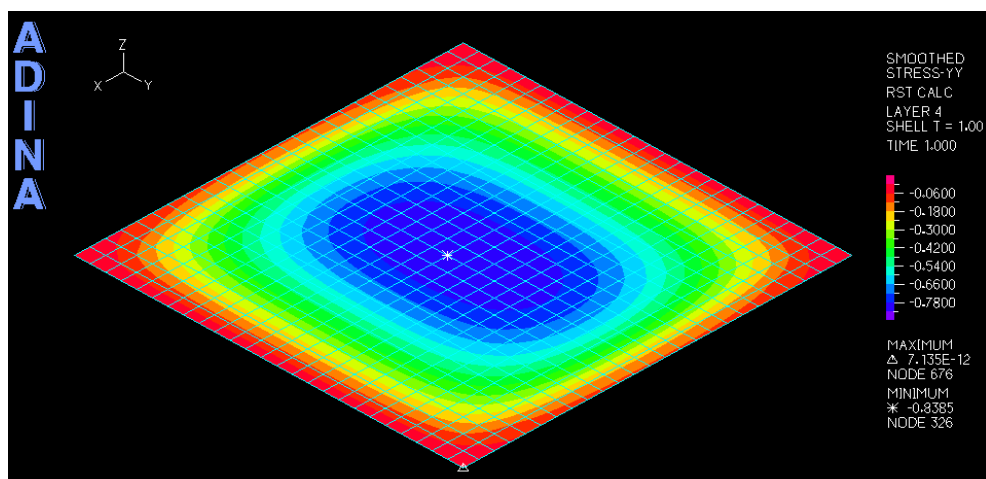
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.65 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/20$



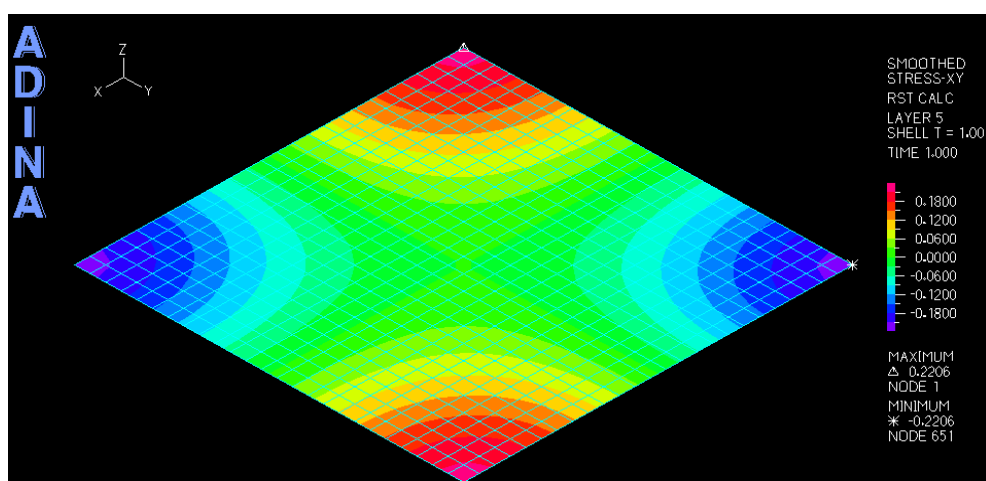
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.66 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 30$ mm, para $h/b = 1/20$



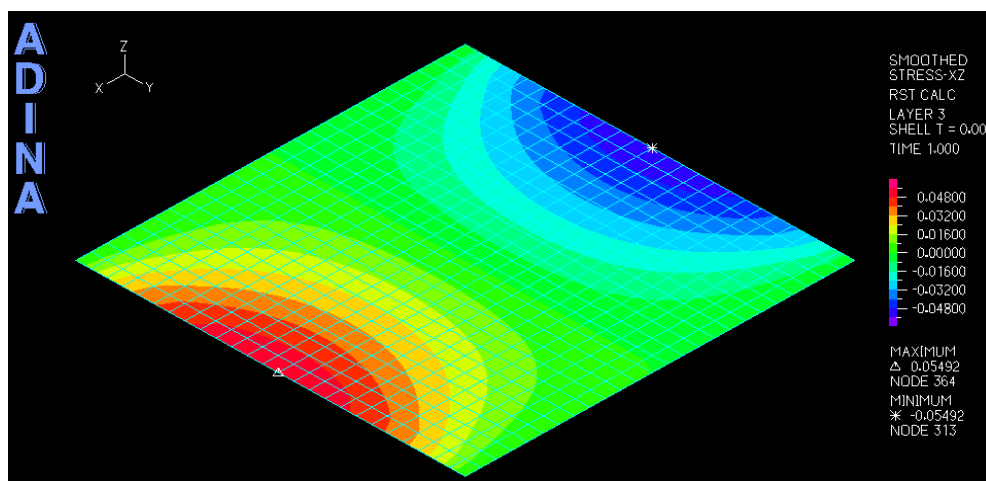
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.67 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/20$



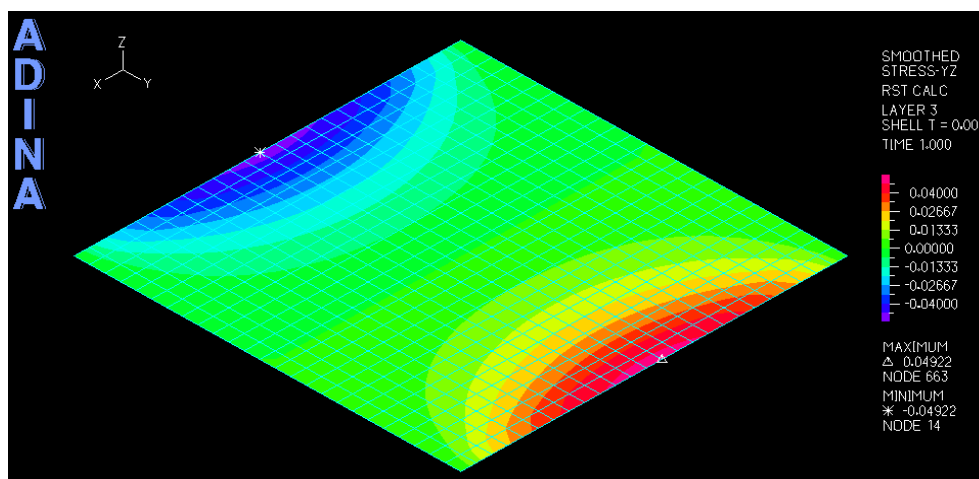
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.68 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/20$



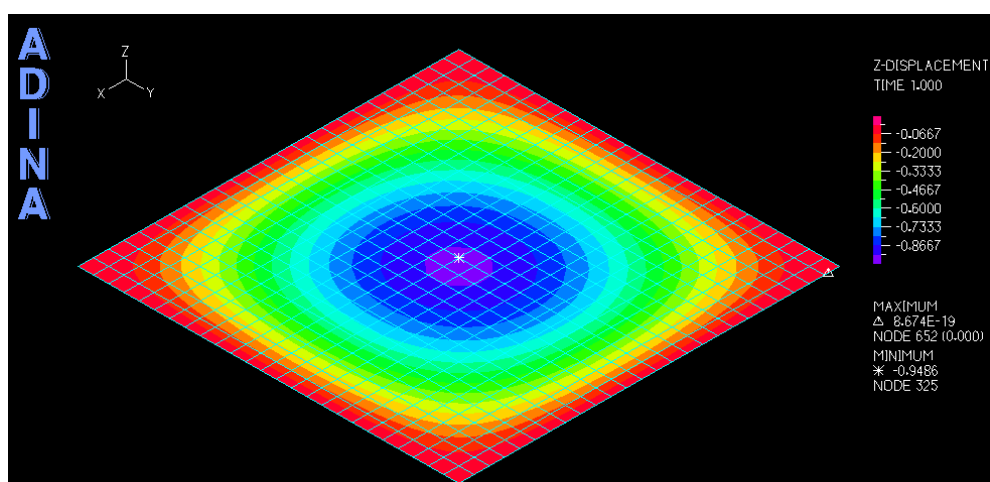
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.69 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/20$



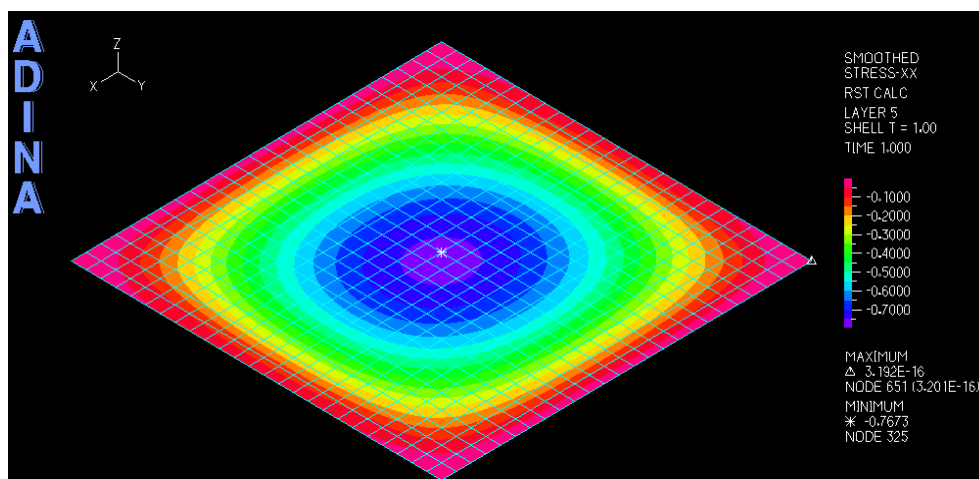
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.70 – ADINA: deslocamentos verticais w para $h/b = 1/15$



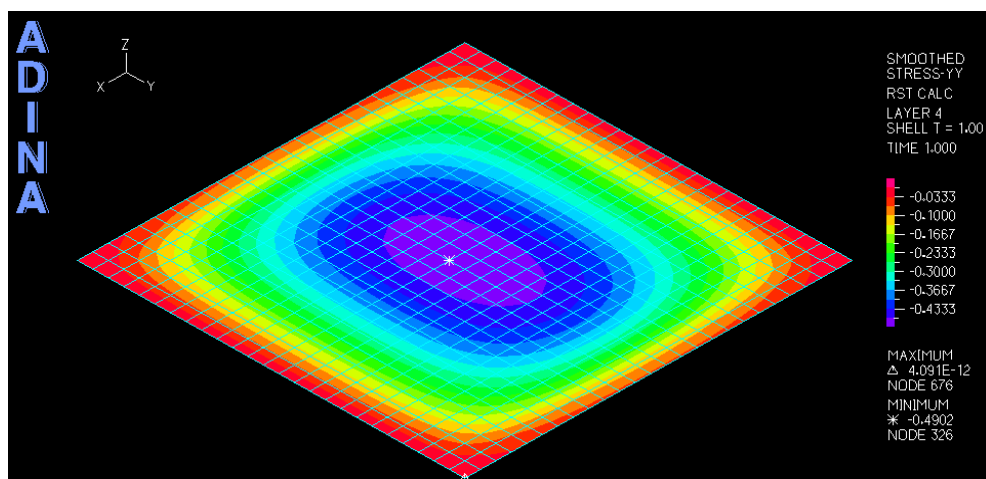
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.71 – ADINA: tensões normais σ_{xx} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/15$



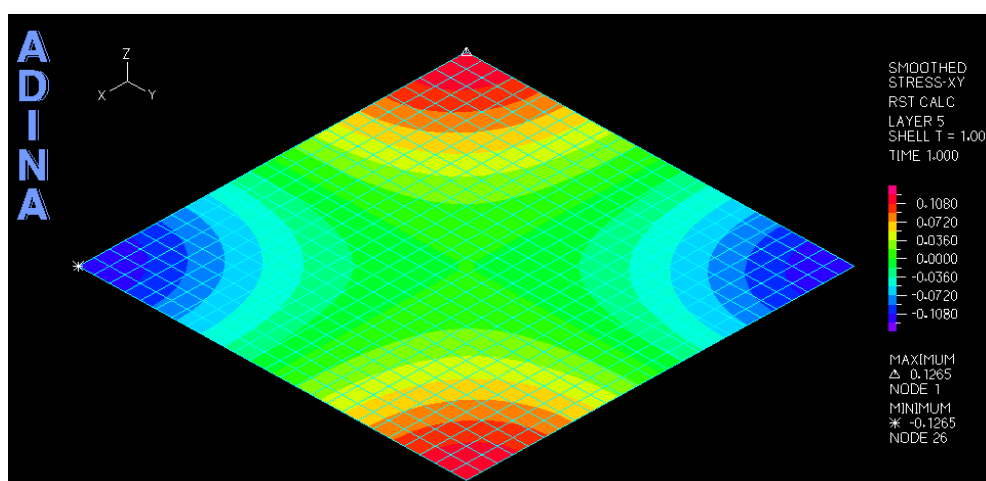
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.72 – ADINA: tensões normais σ_{yy} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/15$



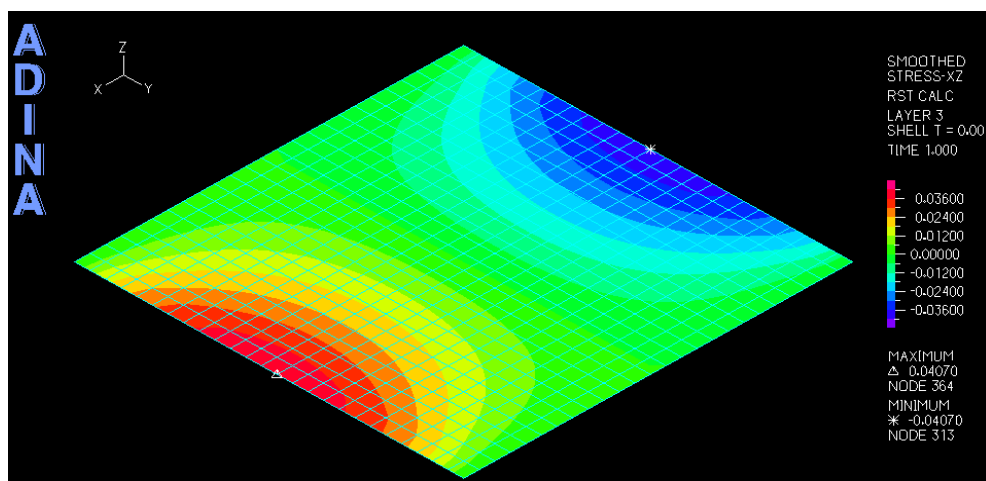
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.73 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xy} , na cota $z = 50$ mm, para $h/b = 1/15$



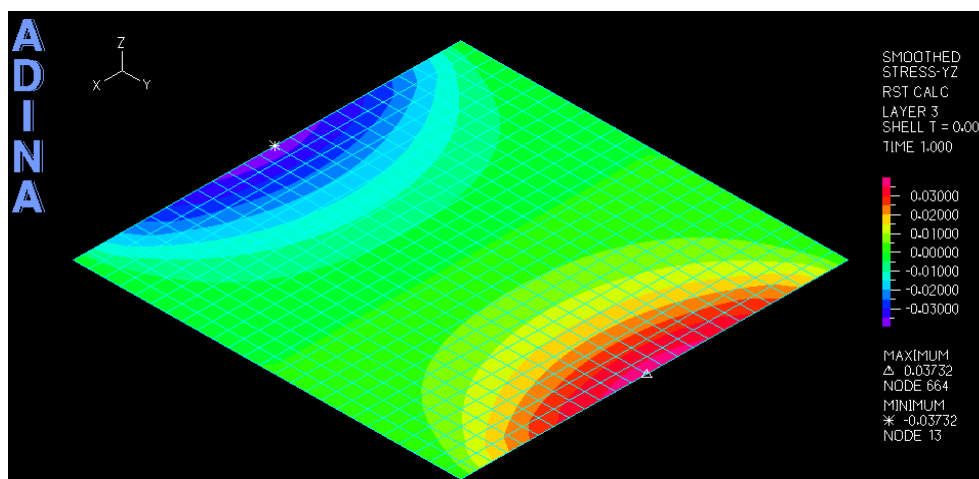
Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.74 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{xz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/15$



Fonte: *Printscreen do software ADINA*

Figura 4.75 – ADINA: tensões de cisalhamento τ_{yz} , na cota $z = 0$ mm, para $h/b = 1/15$



Fonte: *Printscreen do software ADINA*

4.5.2 Ponderações acerca da aplicação do Método dos Elementos Finitos por meio do software ADINA

A aplicação do Método dos Elementos Finitos via *software* ADINA permitiu obter, além dos valores críticos dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento, a forma como essas grandezas se distribuem no plano dos painéis. Com base nessas distribuições, é imediata a conclusão de que os pontos críticos (x,y) assumidos para as teorias de placas foram adequados, verificando-se como exceções os pontos críticos referentes às tensões normais σ_{yy} para as variações paramétricas $b/a = 1,5$ e $b/a = 2,0$ (Figuras 4.54 e 4.60). Os pontos críticos para as referidas situações não ocorrem no centro dos painéis de MLCC, conforme assunção feita quando da aplicação das teorias de placas. Contudo, os resultados obtidos não diferiram de forma significativa entre si e, além disso, as tensões normais σ_{yy} não constituem grandezas críticas ao dimensionamento.

4.6 DESLOCAMENTOS VERTICAIS E TENSÕES: COMPARAÇÃO E DISCUSSÃO ACERCA DOS DIFERENTES MÉTODOS

Posteriormente à apresentação dos deslocamentos verticais e das tensões, normais e de cisalhamento, calculados segundo os métodos propostos, serão agora efetuadas comparações entre os valores dos máximos deslocamentos verticais $w_{m\acute{a}x}$, das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{m\acute{a}x}$ e das máximas tensões de cisalhamento $(\tau_{xz})_{m\acute{a}x}$. A escolha dessas grandezas, para fins de comparação, foi motivada pelo fato de que todos os métodos abordados tornam possível as

suas aferições e também por se tratar de valores críticos ao dimensionamento dos painéis de MLCC. Ademais, também serão realizadas comparações entre as tensões de cisalhamento $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ que ocorrem no plano dos painéis de MLCC. Para essas tensões, é importante pontuar que elas assumem os mesmos valores das tensões transversais de cisalhamento $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$, quando da aplicação dos métodos analíticos unidimensionais, sendo esta uma consideração que pode ser encontrada em Beer e Johnston (2005).

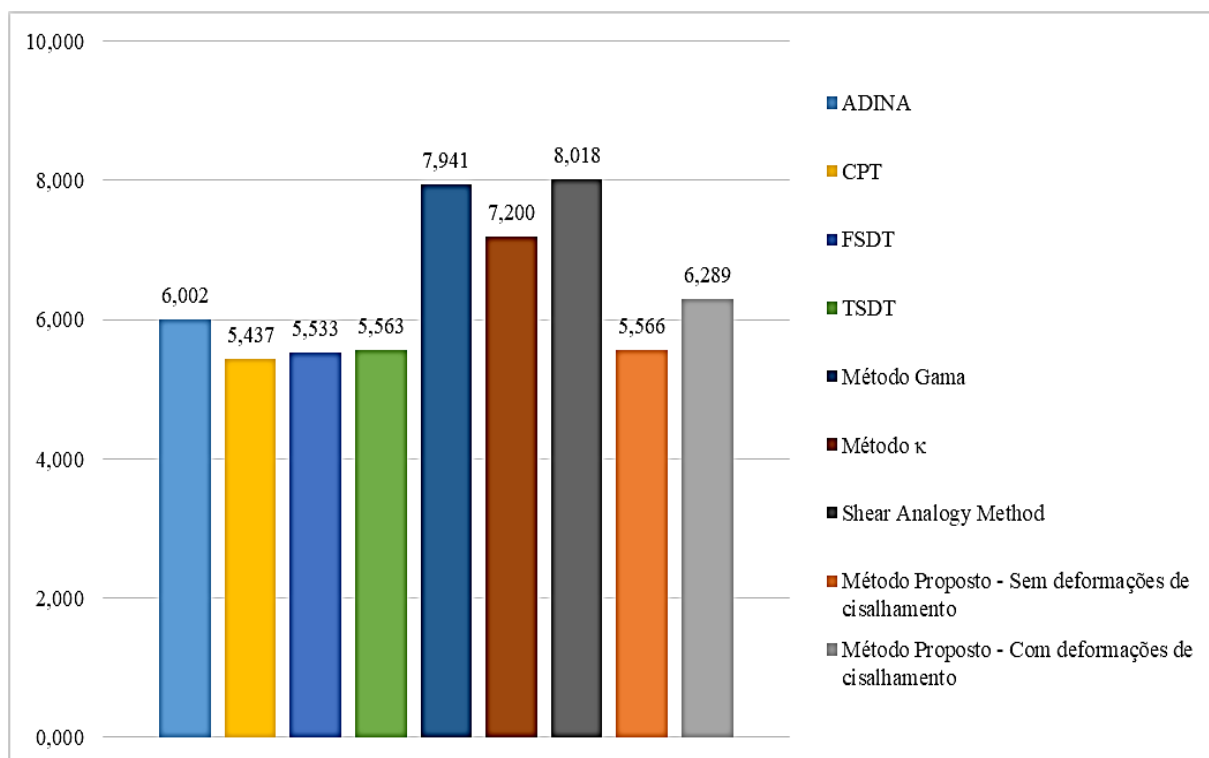
Com o intuito de facilitar as comparações e as discussões acerca dos resultados obtidos, aqueles que foram encontrados com o emprego da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem serão tomados como referência. A opção pela teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem como referência provém do fato desta teoria ser aquela que permite obter distribuições mais realistas para as tensões transversais de cisalhamento.

Ademais, enfatiza-se novamente nesta subseção que todos os resultados encontrados para os deslocamentos verticais e para as tensões – normais e de cisalhamento – foram obtidos considerando um regime elástico-linear.

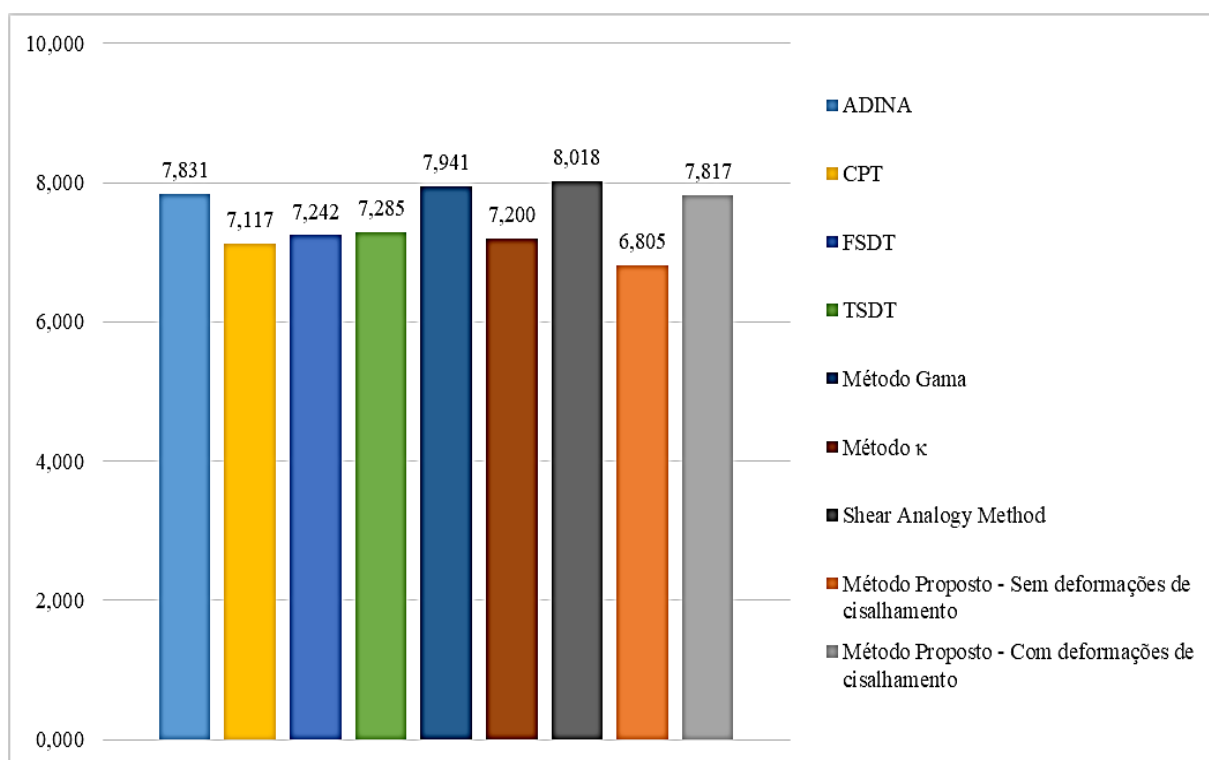
4.6.1 Comparação e discussão das análises estruturais referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC

4.6.1.1 Comparação e discussão dos máximos deslocamentos verticais $w_{\text{máx}}$ referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC

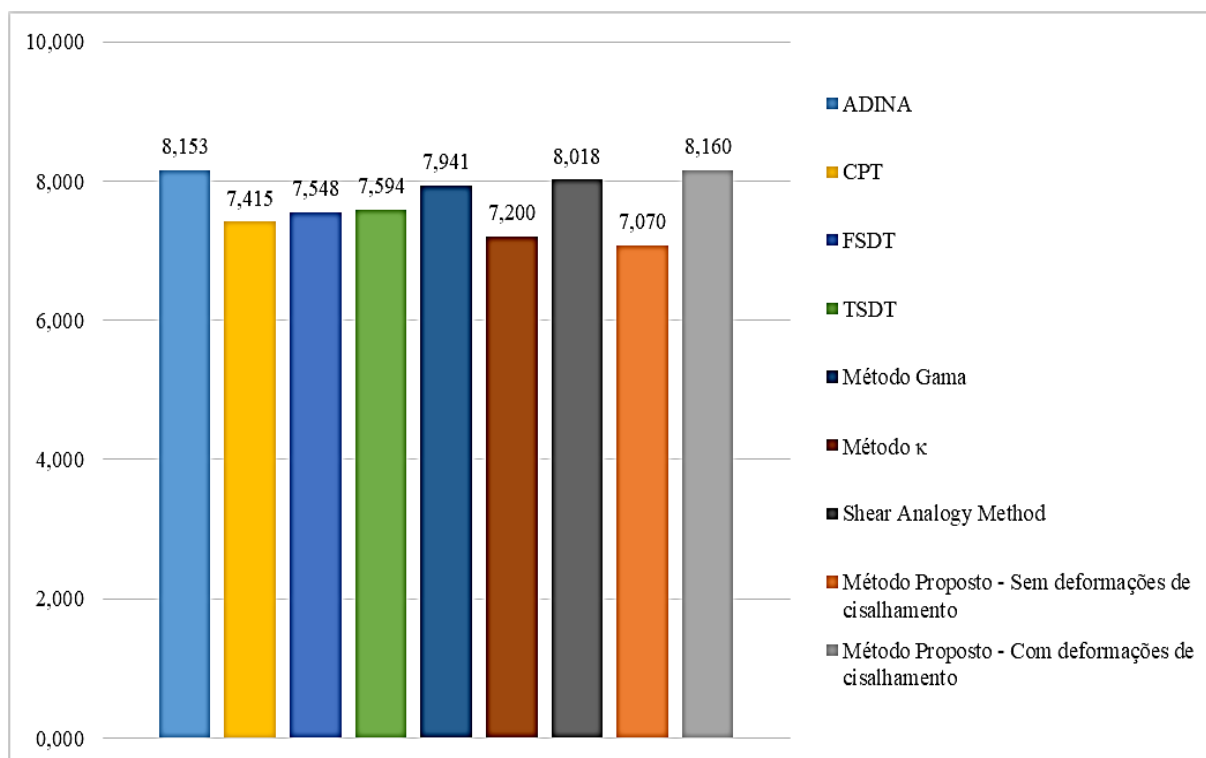
As Figuras 4.76 a 4.78 sintetizam todos os valores encontrados para os máximos deslocamentos verticais $w_{\text{máx}}$ considerando as distintas razões b/a avaliadas.

Figura 4.76 – Comparação das flechas $w_{\max}$ para a razão $b/a = 1,0$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.77 – Comparação das flechas $w_{\max}$ para a razão $b/a = 1,5$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.78 – Comparação das flechas $w_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 2,0$ 

Fonte: O Autor

A partir dos gráficos anteriores, algumas conclusões para o máximo deslocamento vertical $w_{\text{máx}}$ podem ser delineadas:

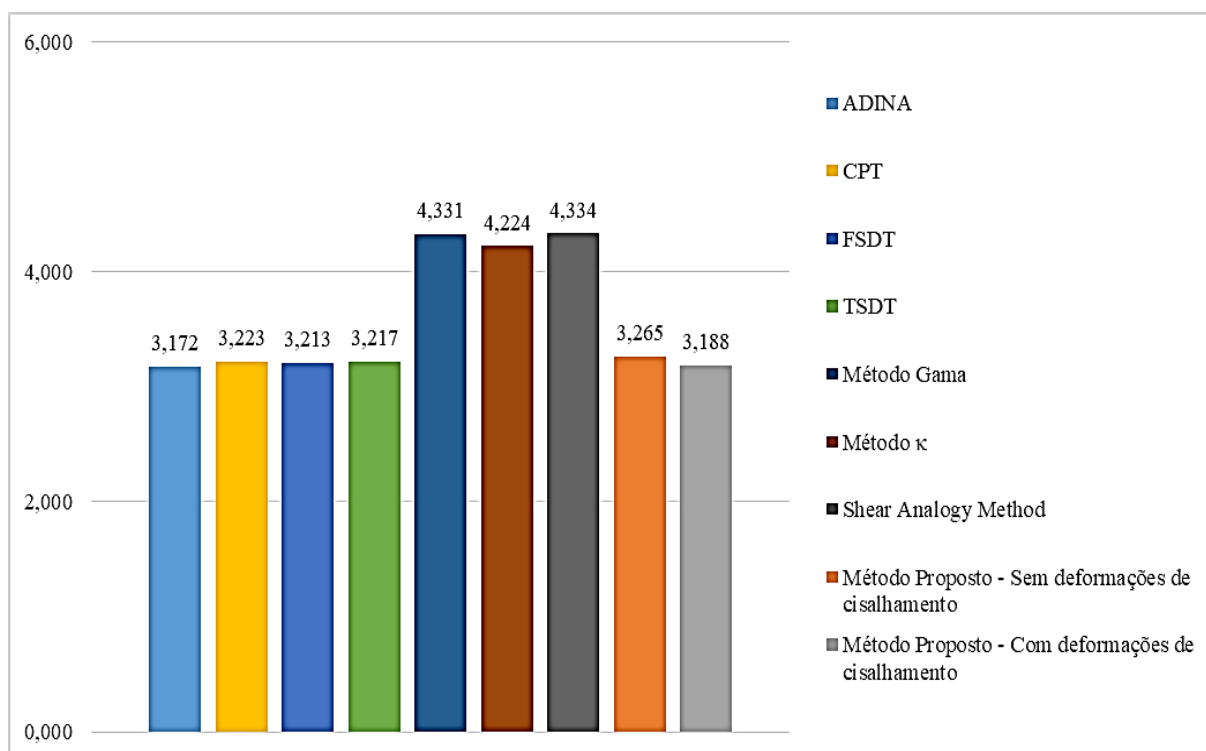
- Ao analisar todas as razões b/a , nota-se que as três teorias de placas forneceram valores muito próximos entre si. Para a teoria de placas CPT, a máxima diferença, em relação à teoria de placas TSDT, foi de -2,36%, sendo esta diferença relativa à razão $b/a = 2,0$. Já para a teoria de placas FSDT, tal diferença, também para a razão $b/a = 2,0$, foi de apenas -0,61%;
- Para os métodos analíticos unidimensionais, observa-se, para as razões b/a iguais a 1,5 e 2,0, boa aproximação com os resultados da teoria de placas TSDT, sendo verificadas diferenças máximas de 9,00% para o Método Gama (na razão $b/a = 1,5$), de -5,19% para o Método κ (na razão $b/a = 2,0$) e de 10,06 % para o Método de Analogia ao Cisalhamento (na razão $b/a = 1,5$). Para a razão b/a de valor 1,0, esses métodos superestimam de forma demasiada os valores do máximo deslocamento vertical $w_{\text{máx}}$, uma vez que essa configuração em planta faz com que o painel de MLCC tenha um comportamento bidirecional mais pronunciado;

- c) O método analítico proposto demonstrou-se bastante preciso, para todas as razões b/a avaliadas. Quando da não consideração das deformações transversais de cisalhamento, a máxima diferença observada foi de -6,90% para a razão $b/a = 2,0$. Entretanto, ao se considerar as referidas deformações, verifica-se uma divergência máxima de 13,05% para a razão $b/a = 1,0$;
- d) Os resultados do *software* ADINA também demonstraram boa concordância com aqueles da teoria de placas TSDT, sendo a maior diferença igual a 7,89% para a razão $b/a = 1,0$;

4.6.1.2 Comparação e discussão das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e de cisalhamento $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC

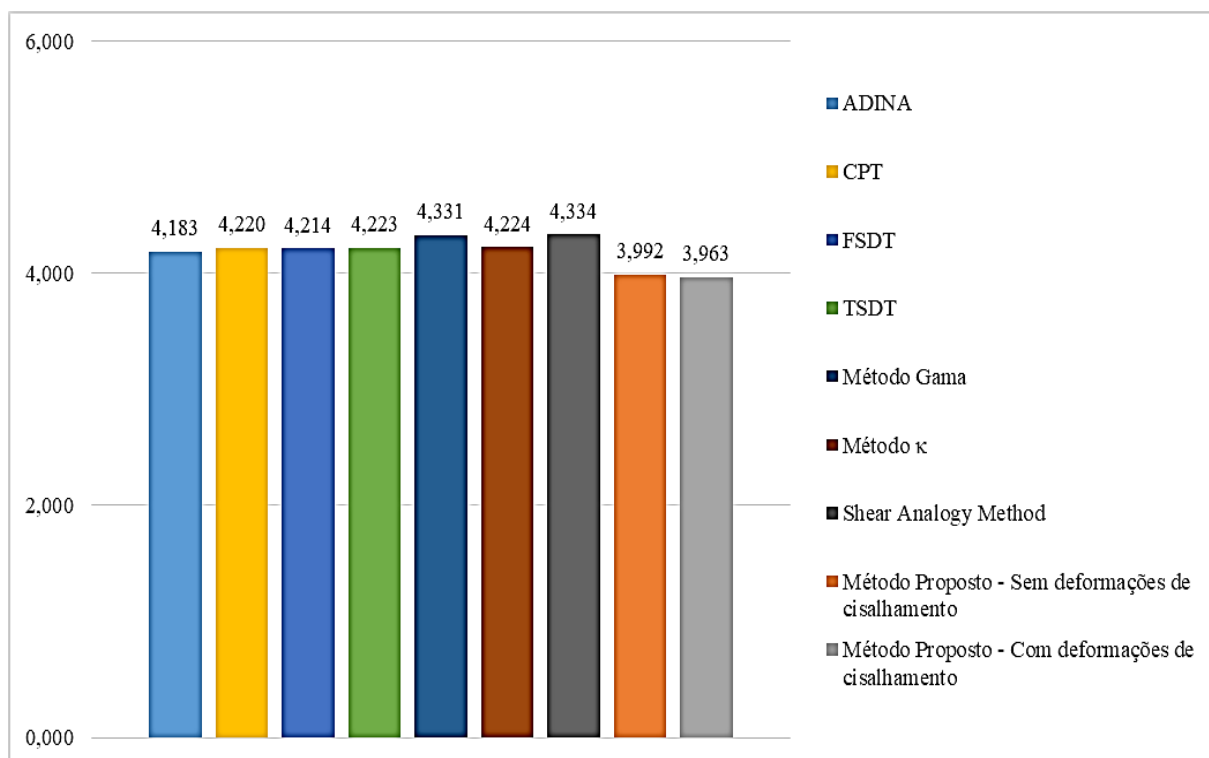
Os gráficos reproduzidos nas Figuras 4.79 a 4.81 estabelecem comparações entre as máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$, para as distintas razões b/a do painel de MLCC, que foram calculadas segundo cada um dos métodos apresentados. De maneira similar, tem-se, posteriormente, as Figuras 4.82 a 4.84, as quais tem por finalidade ilustrar os gráficos comparativos das máximas intensidades das tensões de cisalhamento transversais $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$.

Figura 4.79 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,0$



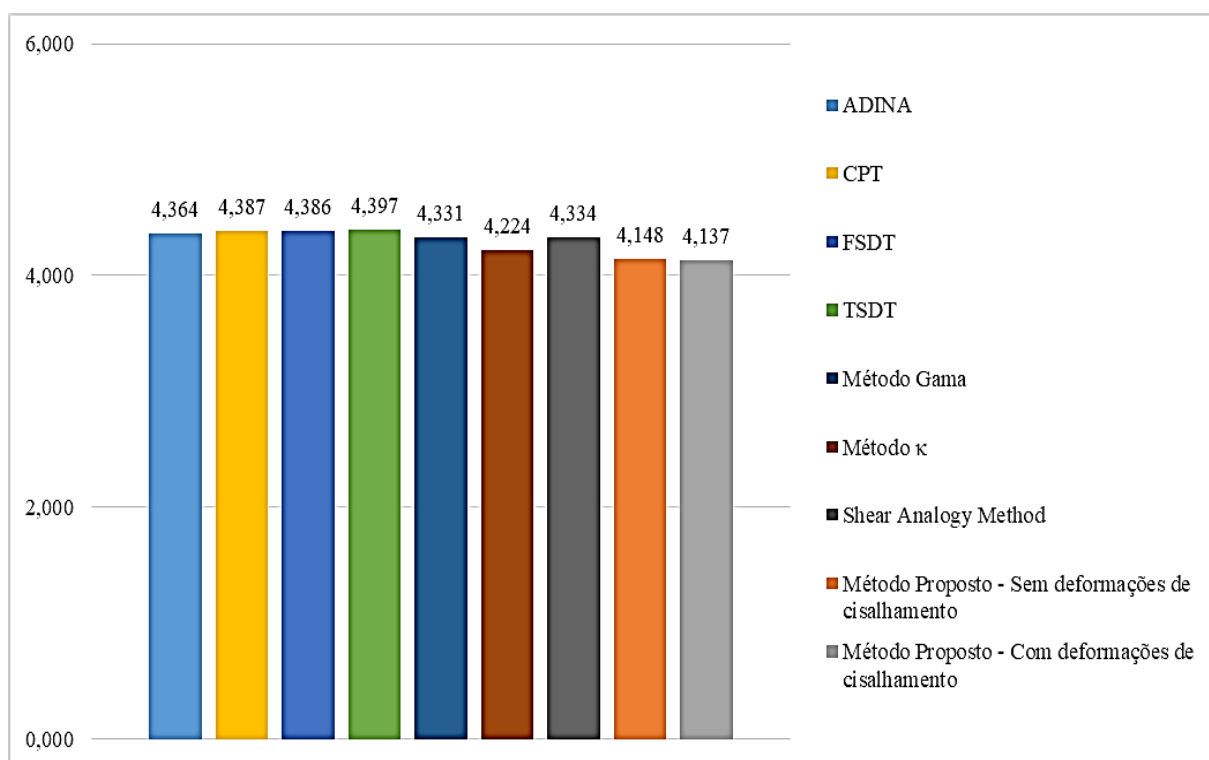
Fonte: O Autor

Figura 4.80 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\max}$ para a razão $b/a = 1,5$

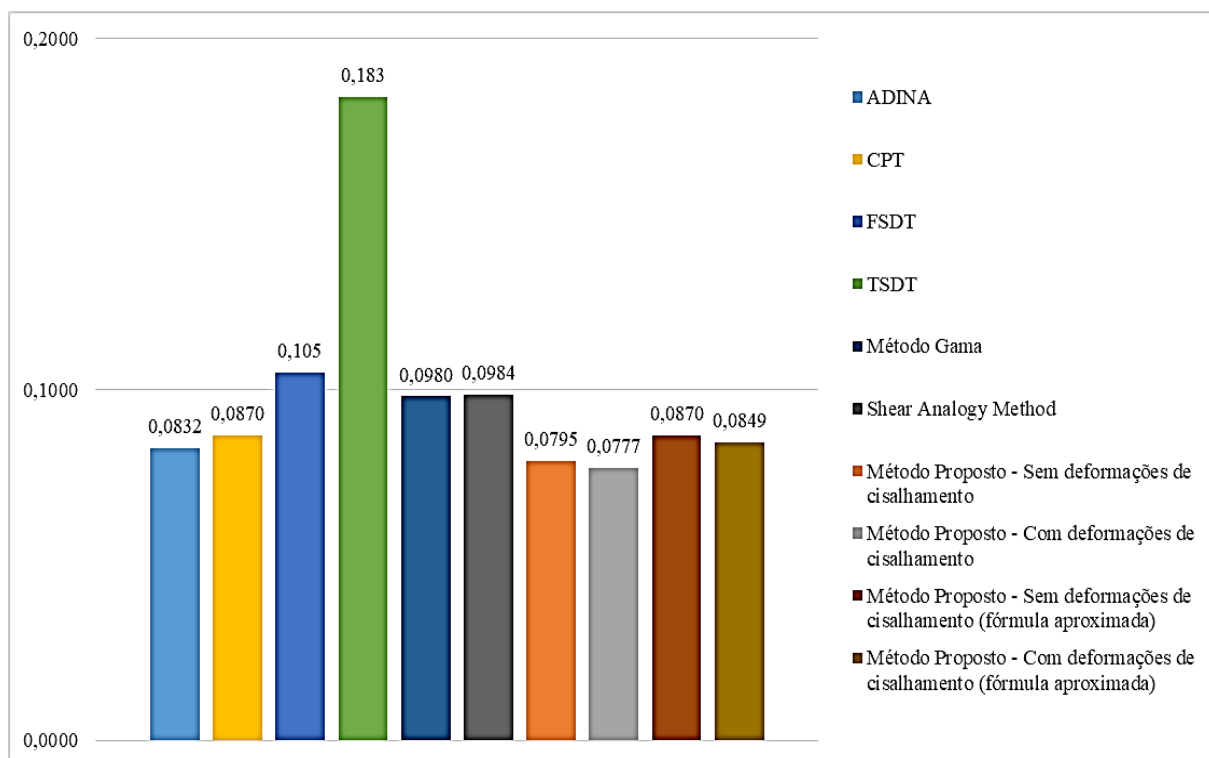


Fonte: O Autor

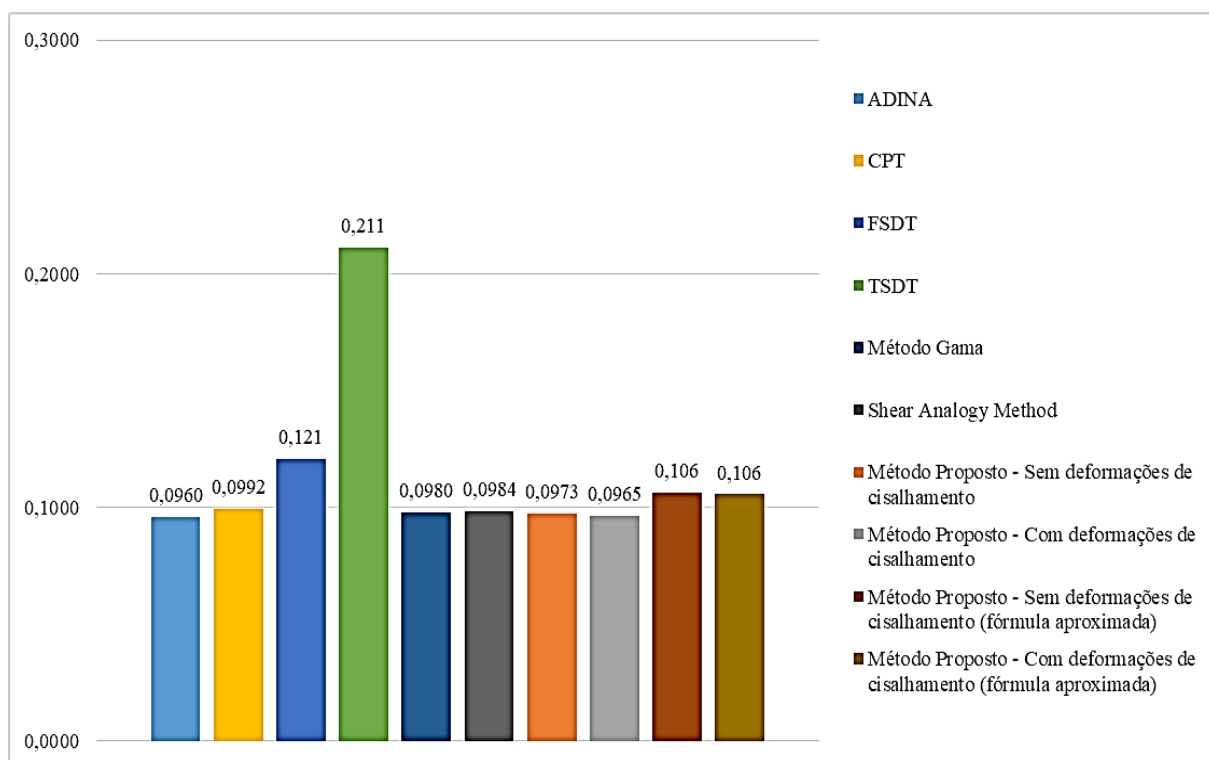
Figura 4.81 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\max}$ para a razão $b/a = 2,0$



Fonte: O Autor

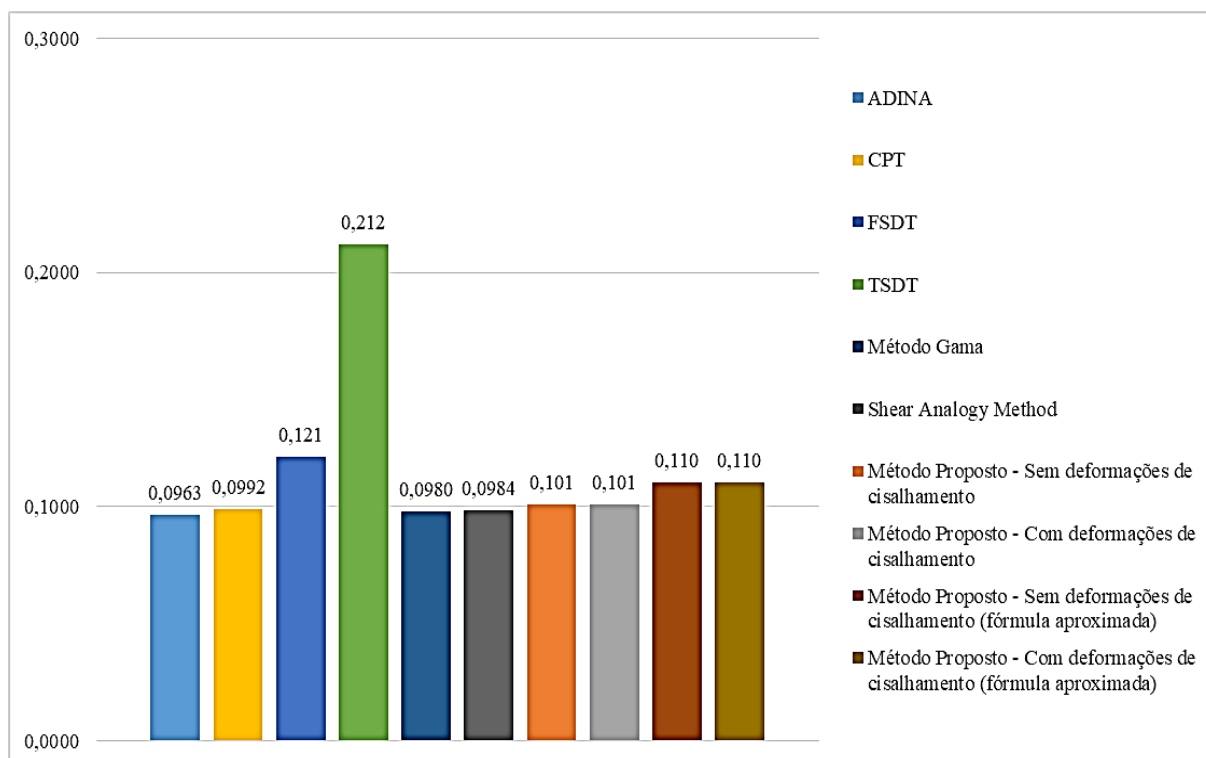
Figura 4.82 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\max}$ para a razão $b/a = 1,0$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.83 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\max}$ para a razão $b/a = 1,5$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.84 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\max}$ para a razão $b/a = 2,0$



Fonte: O Autor

Os gráficos das Figuras 4.79 a 4.84 permitem que sejam tecidas as seguintes observações acerca dos valores máximos das tensões normais e de cisalhamento transversais provenientes dos diferentes métodos de análise estrutural:

- As tensões normais $(\sigma_{xx})_{\max}$, calculadas pelas distintas teorias de placas, encontram-se bastante próximas entre si. Mais precisamente, a teoria de placas CPT forneceu, em comparação à teoria de placas TSDT, uma diferença máxima de -0,23%, sendo esta referente à razão $b/a = 2,0$. Por sua vez, para a teoria de placas FSDT, essa diferença, também referente à razão $b/a = 2,0$, foi de -0,25%;
- As tensões normais $(\sigma_{xx})_{\max}$, calculadas pelos diferentes métodos unidimensionais, também se aproximaram daquelas obtidas com a teoria de placas TSDT, excetuando-se as relativas à razão $b/a = 1,0$, haja vista que tal razão determina painéis com comportamento fortemente bidirecional. As máximas diferenças observadas, considerando as razões b/a iguais a 1,5 e 2,0, foram de 2,56% (na razão $b/a = 1,5$), -3,93% (na razão $b/a = 2,0$) e 2,63% (na razão $b/a = 1,5$) para o Método Gama, Método κ e Método de Analogia ao Cisalhamento, respectivamente;

- c) Pelo método analítico proposto, as tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ também resultaram muito próximas daquelas provenientes da teoria de placas TSDT. Para a versão mais simples do método, a máxima diferença foi de -5,66% (na razão $b/a = 2,0$), enquanto que, para a versão mais apurada deste, a diferença ficou limitada a -6,16% (na razão $b/a = 1,5$);
- d) As tensões de cisalhamento transversais $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$, calculadas pelas teorias de placas CPT e FSDT, pelos métodos unidimensionais e pelo método proposto, apesar de apresentarem valores próximos entre si, divergiram de forma significativa em relação aos resultados oriundos da teoria de placas TSDT. Mais especificamente, foram encontradas as seguintes diferenças máximas: -53,21% para a teoria de placas CPT (na razão $b/a = 2,0$), -42,92% para a teoria de placas FSDT (na razão $b/a = 2,0$), -53,77% para o Método Gama (na razão $b/a = 2,0$), -53,58% para o Método de Analogia ao Cisalhamento (na razão $b/a = 2,0$), -56,56% para o método proposto sem deformações de cisalhamento (na razão $b/a = 1,0$) e -57,54% para o método proposto com deformações de cisalhamento (na razão $b/a = 1,0$). Uma das hipóteses que justifique tal discrepância seja o fato de o campo de deslocamentos assumido, ao forçar uma distribuição parabólica das tensões de cisalhamento transversais, acaba por introduzir valores mais distintos para a teoria TSDT;
- e) Os resultados do *software* ADINA, para as tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$, também ficaram próximos daqueles provenientes da teoria de placas TSDT, sendo a máxima diferença percentual igual a -1,40% para a razão $b/a = 1,0$. Já para as tensões de cisalhamento transversais $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$, todos os valores fornecidos pelo *software* ADINA divergiram com percentuais acima de 50% em relação àqueles obtidos com a teoria de placas TSDT.

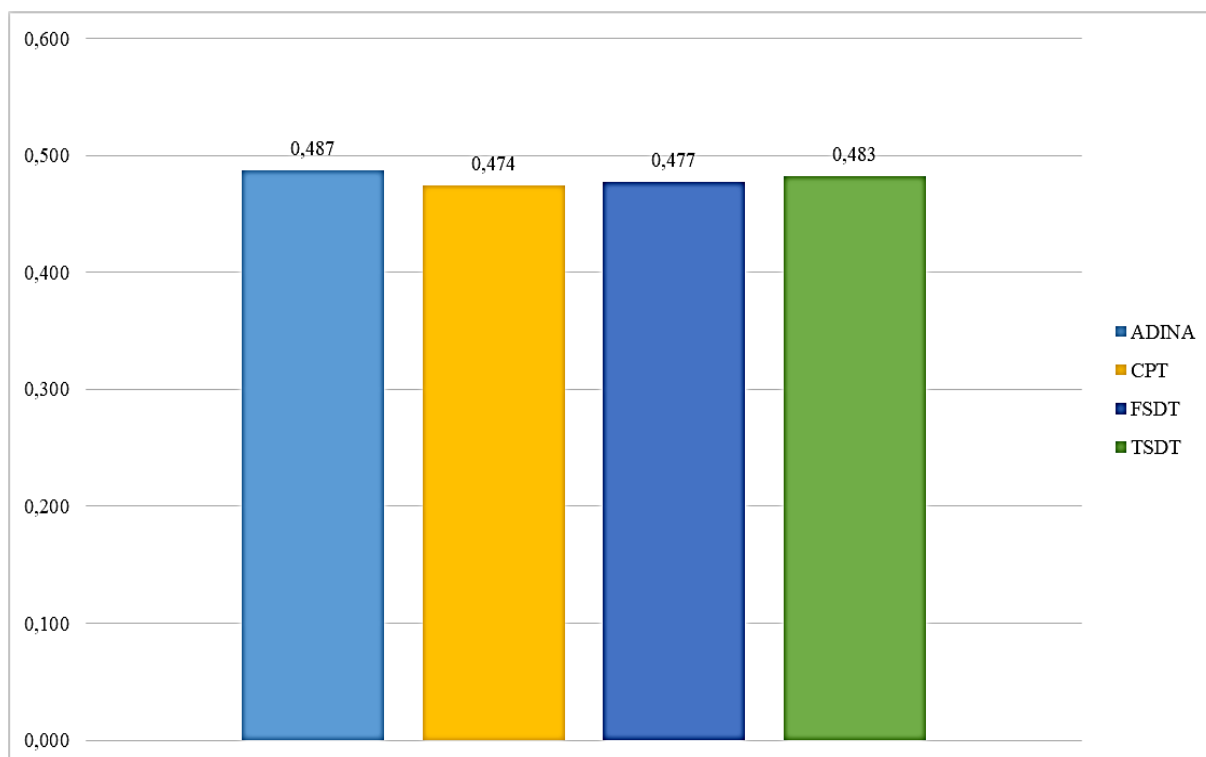
4.6.1.3 Comparação e discussão das máximas tensões de cisalhamento $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ referentes à avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC

Conforme fora pontuado no início da subseção 4.6, as tensões de cisalhamento τ_{xy} , que se desenvolvem no plano dos painéis de MLCC, para os métodos analíticos unidimensionais, devem ser tomadas iguais às tensões de cisalhamento transversais τ_{xz} , pois tais métodos constituem cálculos de vigas. Todavia os valores das tensões de cisalhamento τ_{xy} fornecidos pelas três teorias de placas e pelo Método dos Elementos Finitos são de ordem de grandeza

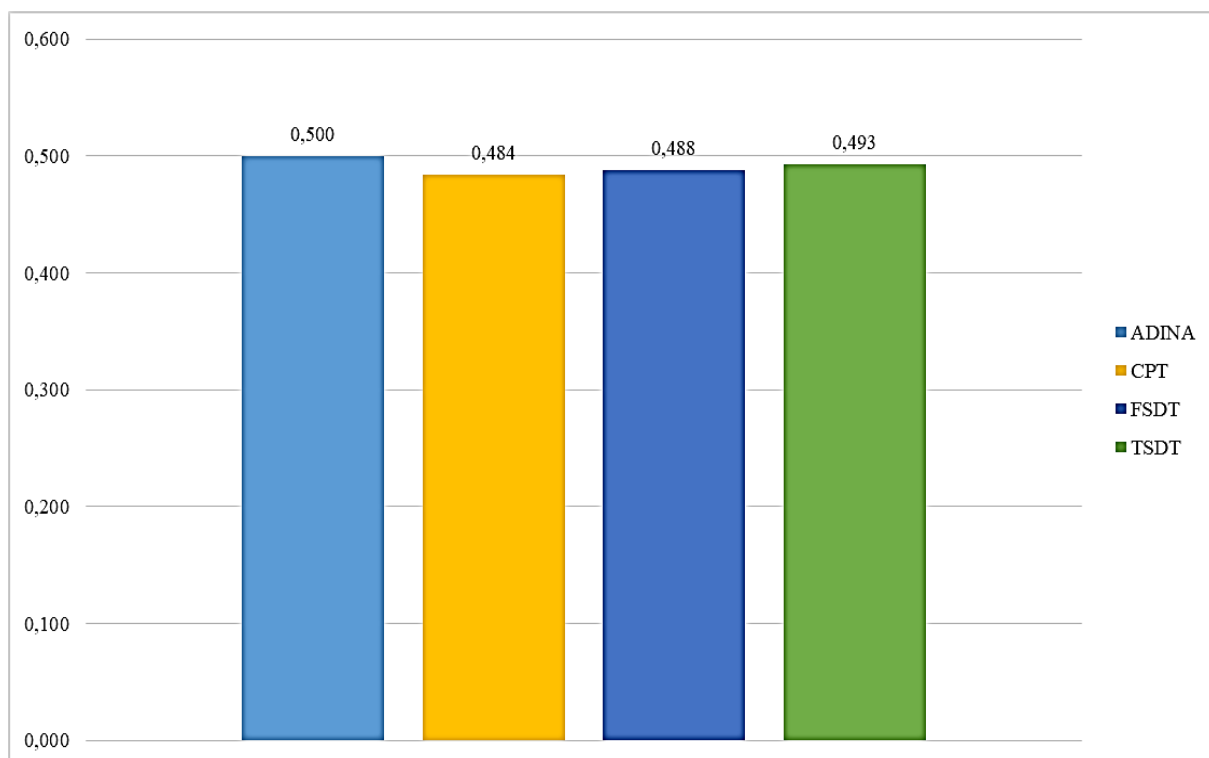
muito superior àqueles obtidos com os métodos analíticos unidimensionais. Por essa razão, esses métodos não devem ser utilizados para aferir as tensões de cisalhamento τ_{xy} e foram excluídos das comparações realizadas nesta subseção.

Dessa forma, os valores das tensões de cisalhamento τ_{xy} , referentes às variações paramétricas b/a e que foram obtidos com as distintas teorias de placas e com o Método dos Elementos Finitos estão elencados, de forma comparativa, nos gráficos das Figuras 4.85 a 4.87.

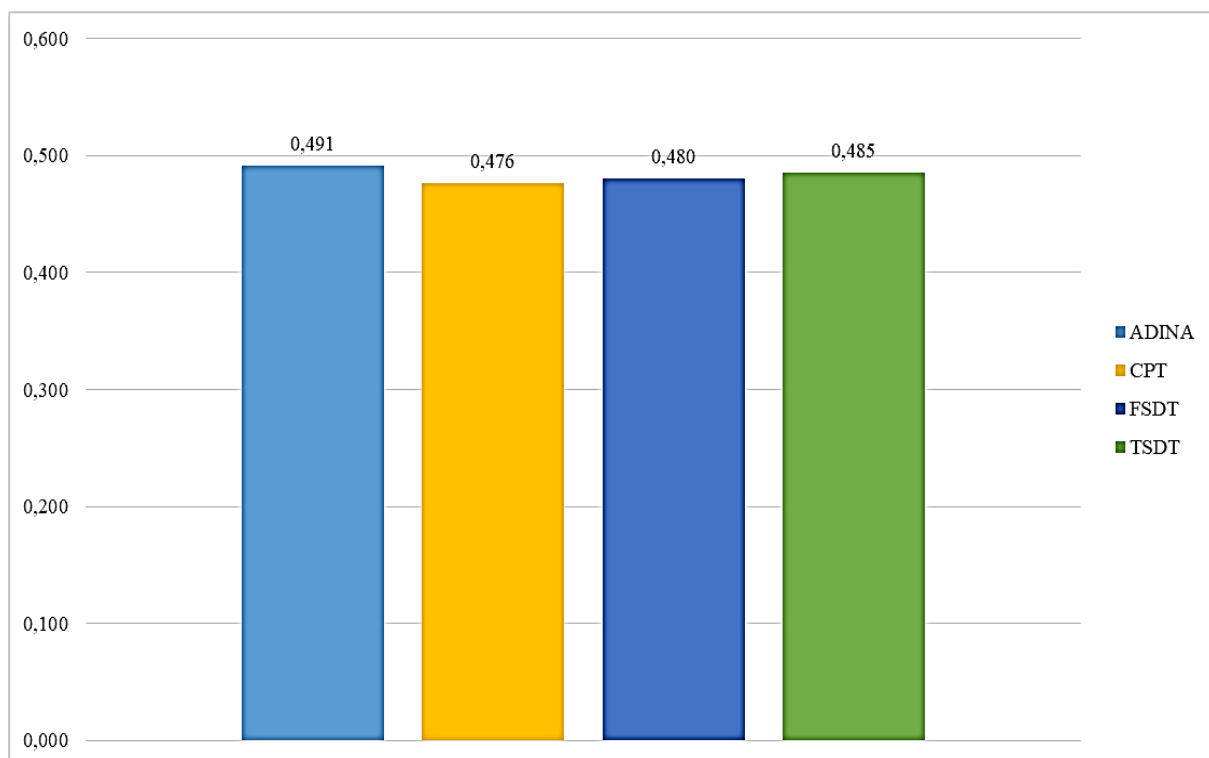
Figura 4.85 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,0$



Fonte: O Autor

Figura 4.86 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 1,5$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.87 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $b/a = 2,0$ 

Fonte: O Autor

A partir da interpretação dos gráficos das Figuras 4.85 a 4.87, algumas conclusões são possíveis de serem estabelecidas, sendo elas:

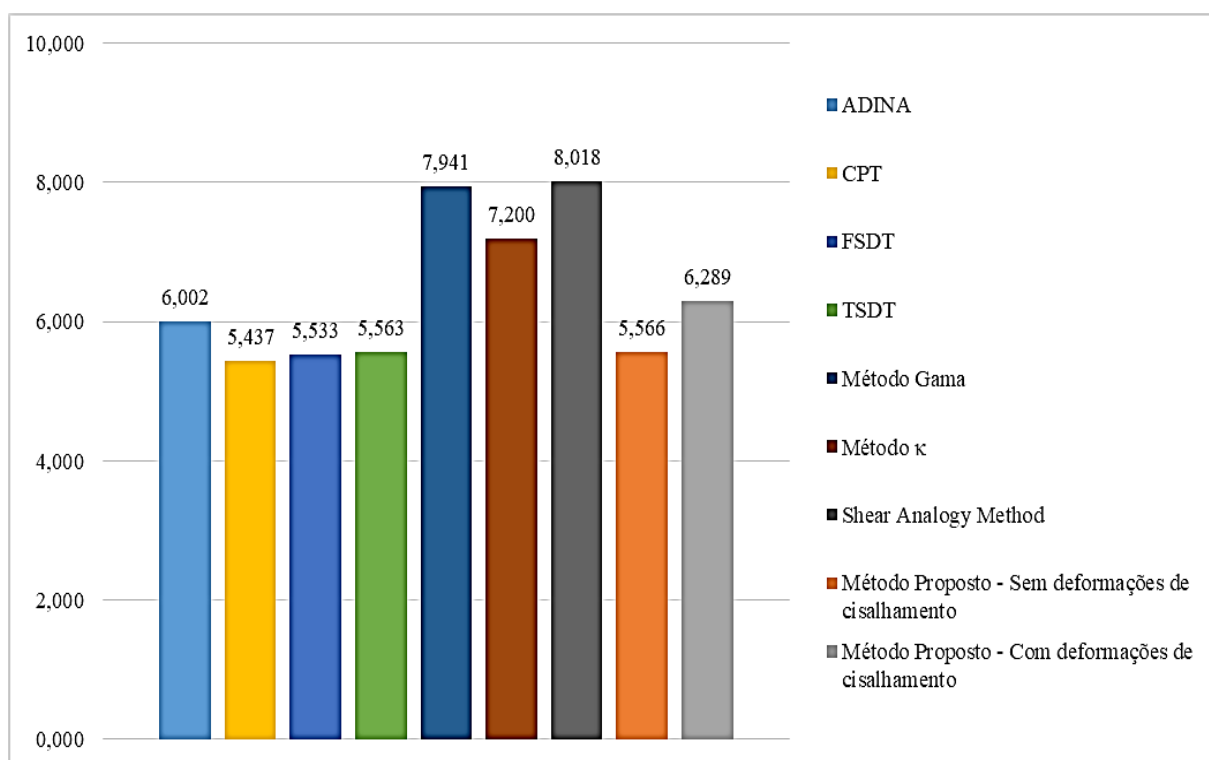
- a) Para qualquer razão b/a , verifica-se que as três teorias de placas proveram valores extremamente próximos entre si. Para a teoria de placas CPT, a máxima diferença, em relação à teoria de placas TSDT, foi de -1,86%, sendo esta atinente à razão $b/a = 1,0$. Já para a teoria de placas FSDT, essa diferença, igualmente para a razão $b/a = 1,0$, foi de -1,24%;
- b) Os resultados alcançados com o uso do *software* ADINA também apresentaram-se com diferenças ínfimas em relação àquelas da teoria de placas TSDT. A máxima divergência observada foi de 1,42% para a razão $b/a = 1,5$.

4.6.2 Comparação e discussão das análises estruturais referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC

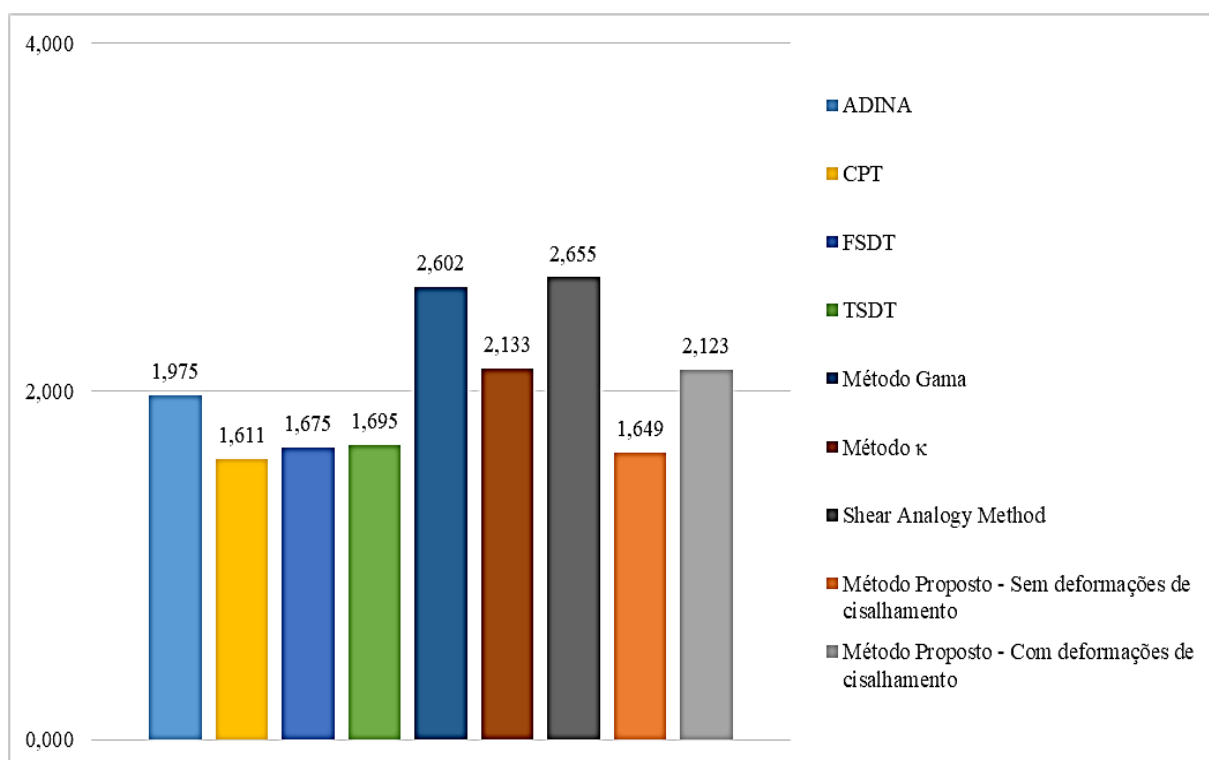
De maneira análoga ao que fora feito para a avaliação paramétrica da razão b/a do painel de MLCC, serão reproduzidos, nesta subseção, por meio de gráficos comparativos, os máximos valores assumidos pelos deslocamentos verticais e pelas tensões normais σ_{xx} e de cisalhamento transversais τ_{xz} quando da aplicação de todos os métodos de dimensionamento abordados.

4.6.2.1 Comparação e discussão dos máximos deslocamentos verticais $w_{máx}$ referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC

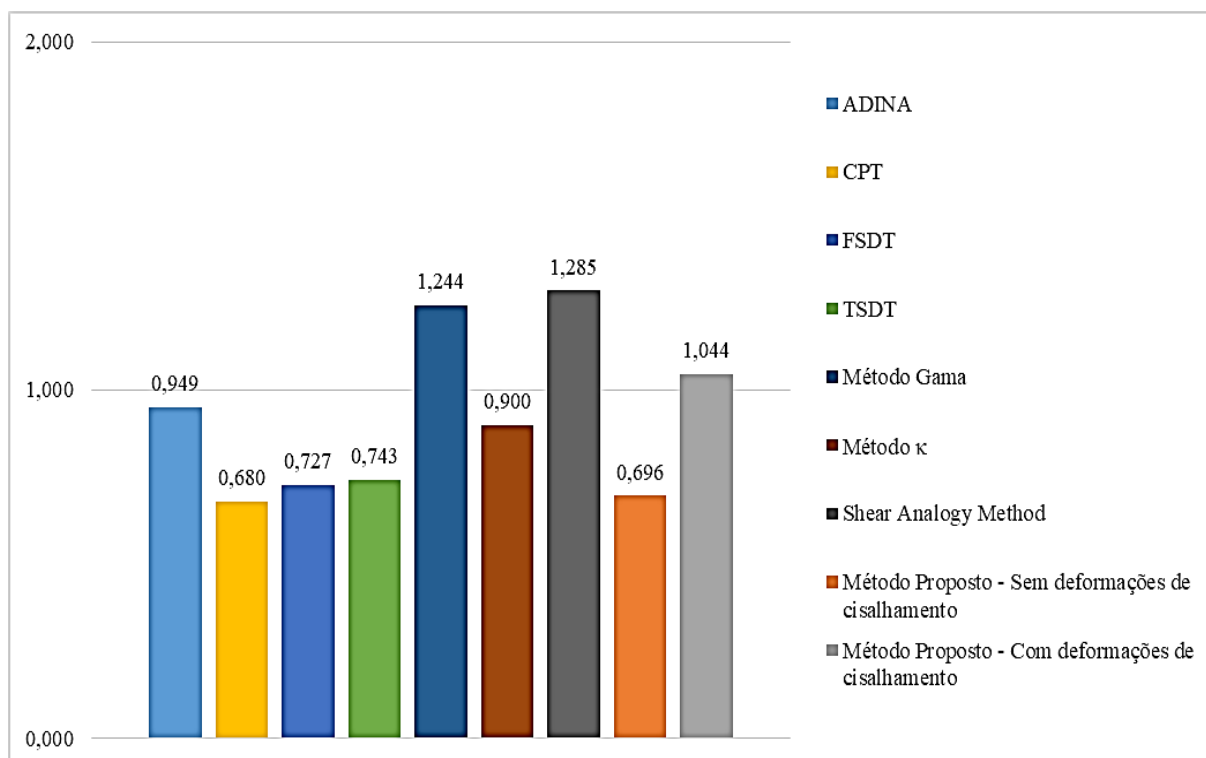
Seguindo uma organização dos resultados obtidos similar àquela adotada para as variações paramétricas da razão b/a , reproduziu-se, nas Figuras 4.88 a 4.90, os gráficos comparativos dos valores críticos dos deslocamentos verticais do painel de MLCC de referência e de suas variações paramétricas da razão h/b . Mais precisamente, as Figuras 4.88, 4.89 e 4.90 trazem as comparações das flechas para as razões h/b iguais a 1/30, 1/20 e 1/15, respectivamente.

Figura 4.88 – Comparação das flechas $w_{\max}$ para a razão $h/b = 1/30$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.89 – Comparação das flechas $w_{\max}$ para a razão $h/b = 1/20$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.90 – Comparação das flechas $w_{\max}$ para a razão $h/b = 1/15$ 

Fonte: O Autor

Interpretando os gráficos das Figuras 4.88 a 4.90, é possível pontuar as seguintes considerações para o máximo deslocamento vertical $w_{\max}$:

- Os resultados provenientes das três teorias de placas são próximos entre si para todas as razões h/b estudadas. Mais especificamente, as teorias de placas CPT e FSDT apresentaram diferenças máximas, em relação à teoria de placas TSDT, de -8,48% (na razão $h/b = 1/15$) e -2,15% (na razão $h/b = 1/15$), respectivamente;
- Para os métodos analíticos unidimensionais, em todas as razões h/b avaliadas, foram verificadas diferenças significativas, em relação à teoria de placas TSDT, sendo todas elas superiores a 20%. Contudo, pode-se notar uma tendência de diminuição das diferenças quando do aumento da razão h/b , sobretudo para o Método κ ;
- Os resultados do método analítico proposto, sem consideração das deformações de cisalhamento, apresentaram boa concordância com aqueles advindos da teoria de placas TSDT, verificando-se uma diferença máxima de -6,33%, sendo esta referente à razão $h/b = 1/15$. Para a versão do método proposto com a consideração das

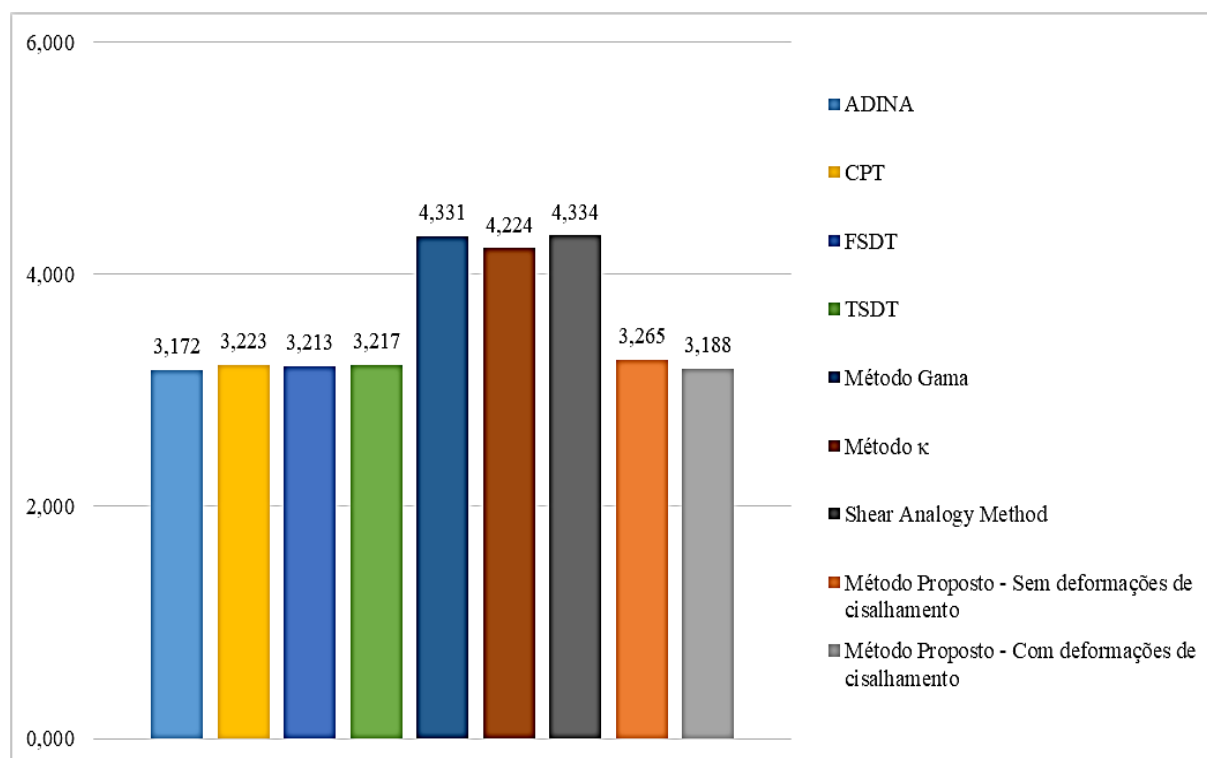
deformações de cisalhamento, a máxima diferença foi de 40,51%, a qual ocorreu também para a razão $h/b = 1/15$;

- d) Em relação à teoria de placas TSDT, o *software* ADINA forneceu, para as flechas, valores com divergência abaixo de 10% apenas para a razão $h/b = 1/30$, sendo tal divergência igual a 7,89%. Para as razões h/b iguais a 1/20 e 1/15 as diferenças percentuais verificadas foram de 16,52% e 27,73%, respectivamente.

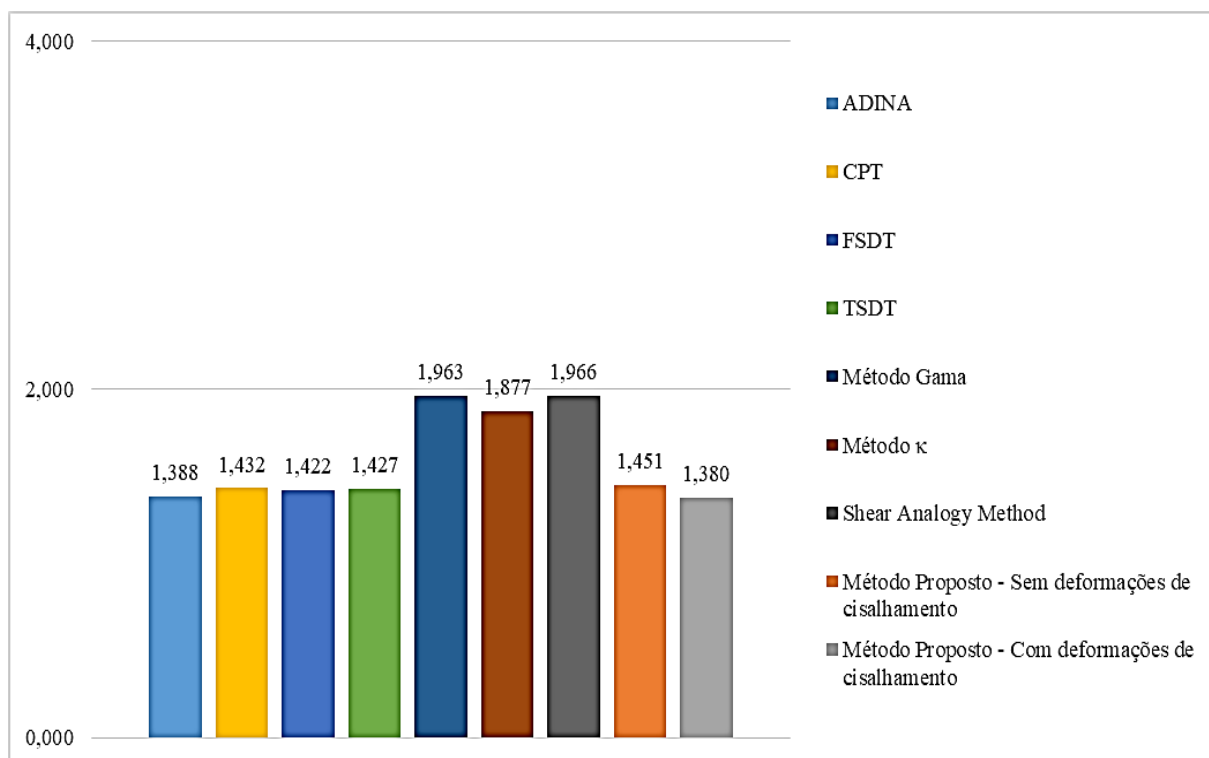
4.6.2.2 Comparação e discussão das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ e de cisalhamento $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC

No que se refere às máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$, as Figuras 4.91 a 4.93 trazem os gráficos comparativos de seus valores, obtidos pelos diferentes métodos de análise estrutural, para cada uma das razões h/b do painel de MLCC de referência. Em seguida, para essas mesmas variações paramétricas, tem-se também os gráficos comparativos das Figuras 4.94 a 4.96, os quais reúnem os valores das tensões de cisalhamento transversais $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$.

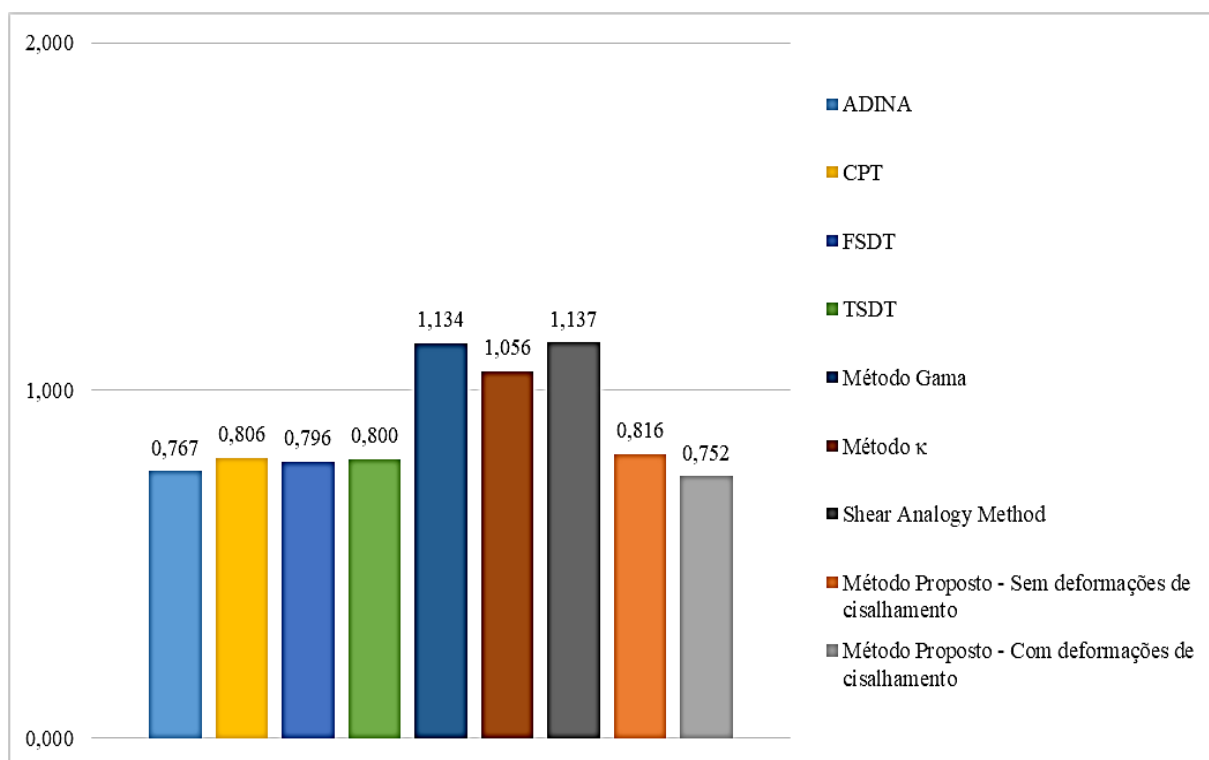
Figura 4.91 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/30$



Fonte: O Autor

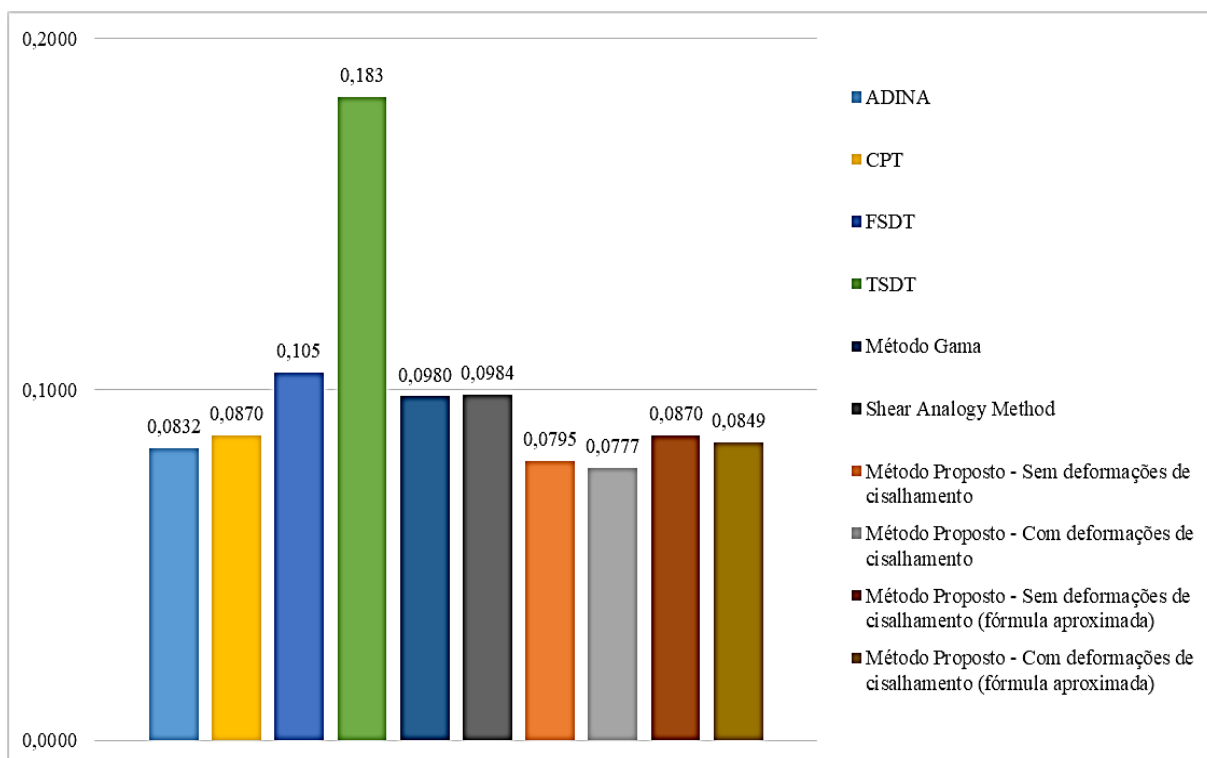
Figura 4.92 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\max}$ para a razão $h/b = 1/20$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.93 – Comparação das máximas tensões normais $(\sigma_{xx})_{\max}$ para a razão $h/b = 1/15$ 

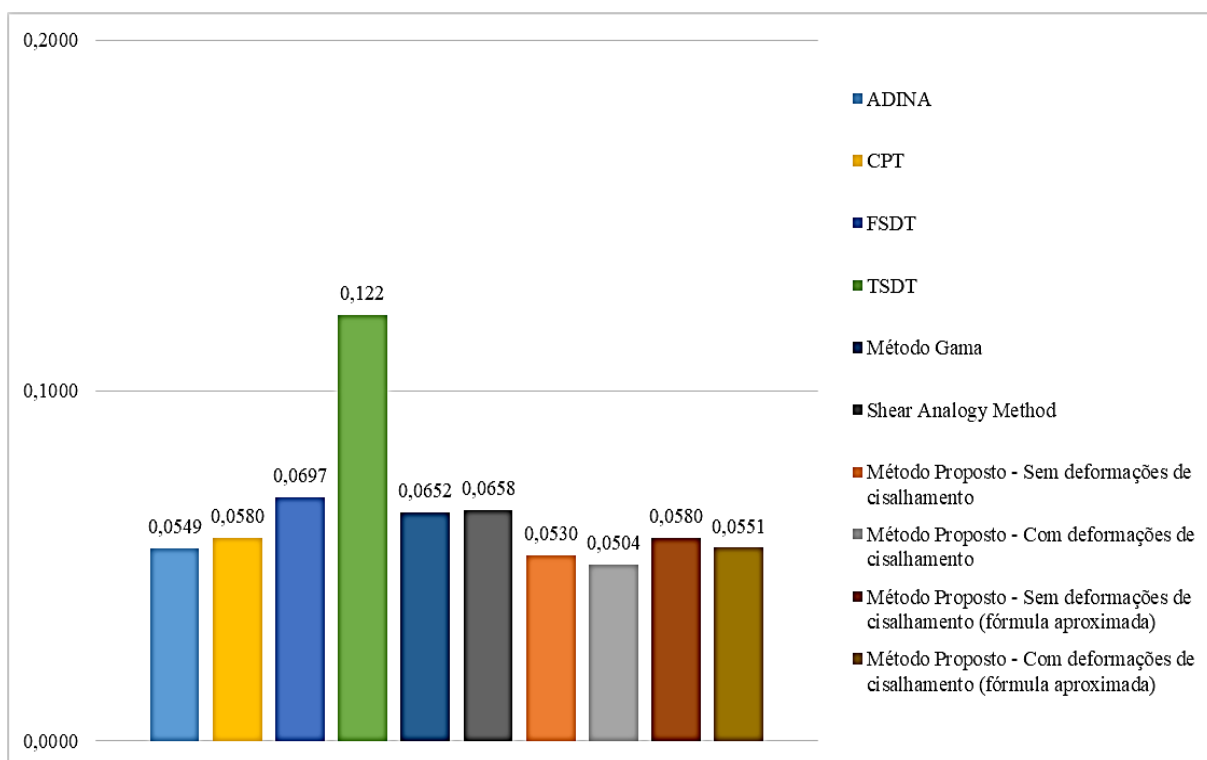
Fonte: O Autor

Figura 4.94 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\max}$ para a razão $h/b = 1/30$



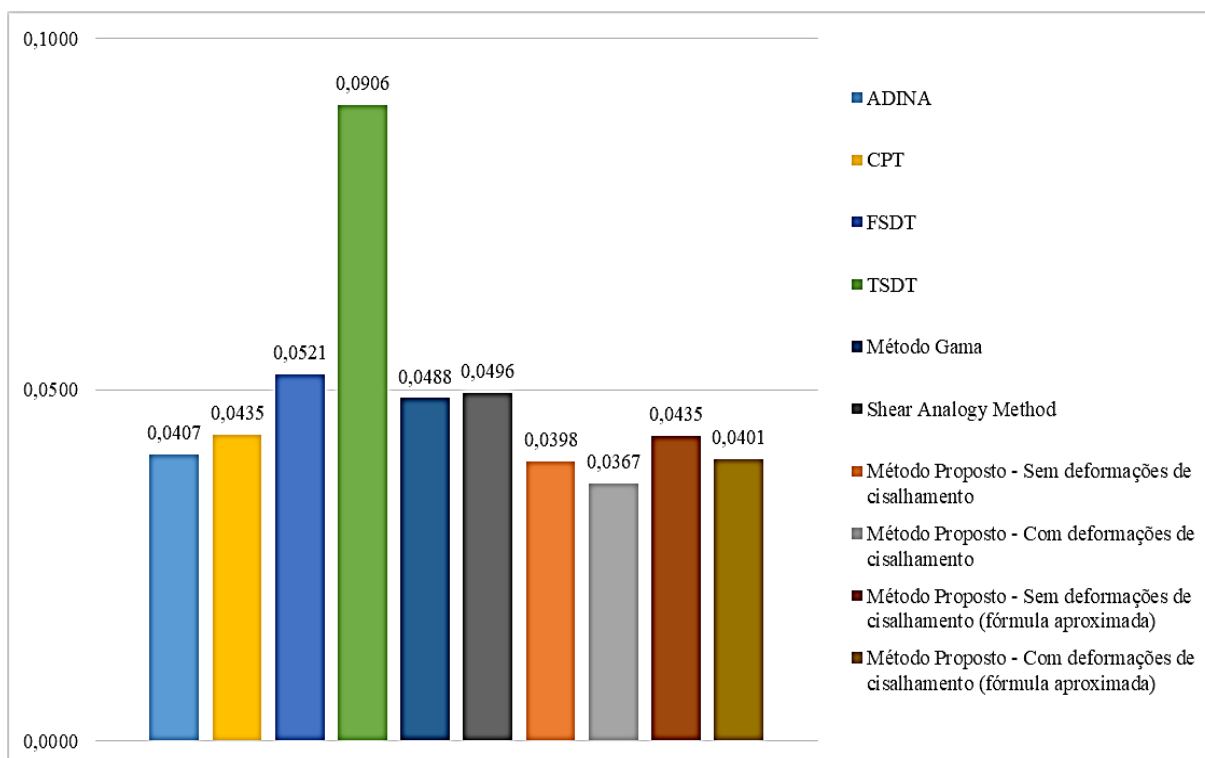
Fonte: O Autor

Figura 4.95 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\max}$ para a razão $h/b = 1/20$



Fonte: O Autor

Figura 4.96 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/15$



Fonte: O Autor

Ao analisar os gráficos comparativos das Figuras 4.91 a 4.96, as subseqüentes conclusões acerca dos valores críticos das tensões normais σ_{xx} e de cisalhamento transversais τ_{xz} são possíveis de serem feitas:

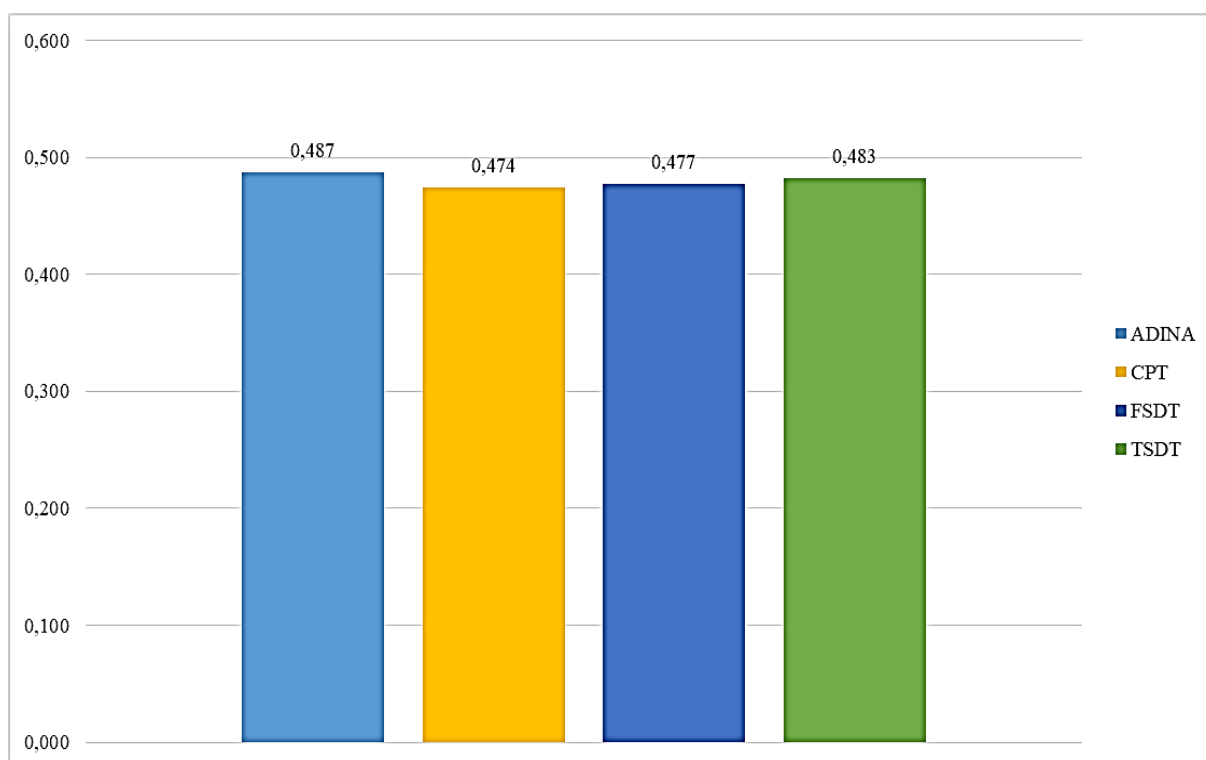
- As tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$, calculadas pelas teorias de placas, resultaram novamente bastante próximas entre si. As teorias de placas CPT e FSDT divergiram da teoria de placas TSDT com valores de, no máximo, 0,75% (na razão $h/b = 1/15$) e -0,50% (na razão $h/b = 1/15$), respectivamente;
- As tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$, calculadas pelos métodos analíticos unidimensionais, mostraram-se um tanto díspares, em termos percentuais, daquelas obtidas com a teoria de placas TSDT. Para todos os casos, foram verificadas diferenças superiores a 30%;
- O método analítico proposto forneceu valores de tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$ muito próximos daqueles alcançados com a teoria de placas TSDT. Para a versão mais simples do método, a máxima diferença foi de 2,00% (na razão $h/b = 1/15$), enquanto

que, para a versão mais apurada do método, tal diferença foi de -6,00% (na razão $h/b = 1/15$);

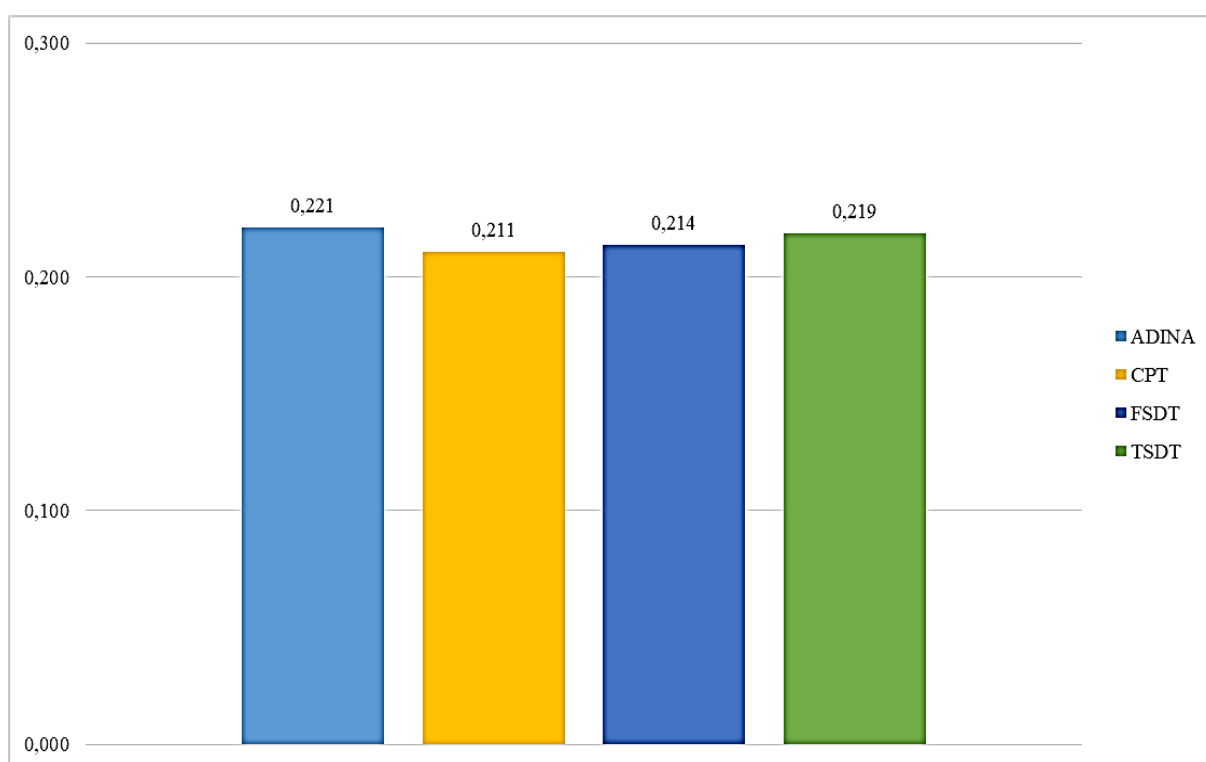
- d) De maneira análoga às variações paramétricas da razão b/a , novamente as tensões de cisalhamento transversais $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$, calculadas pelas teorias de placas CPT e FSDT, pelos métodos analíticos unidimensionais e pelo método analítico proposto, divergiram de forma expressiva em relação aos resultados obtidos com a teoria de placas TSDT. Em termos percentuais, foram verificadas as seguintes diferenças máximas: -52,46% para a teoria de placas CPT (nas razões $h/b = 1/30$ e $h/b = 1/20$), -42,87% para a teoria de placas FSDT (na razão $h/b = 1/20$), -46,56% para o Método Gama (na razão $h/b = 1/20$), -46,23% para o Método de Analogia ao Cisalhamento (na razão $h/b = 1/30$), -56,56% para o método proposto sem deformações de cisalhamento (na razão $h/b = 1/30$) e -59,49% para o método proposto com deformações de cisalhamento (na razão $h/b = 1/15$);
- e) Para as tensões normais $(\sigma_{xx})_{\text{máx}}$, o *software* ADINA possibilitou a obtenção de valores bastante próximos daqueles provenientes da teoria de placas TSDT, sendo a máxima diferença percentual igual a -4,13% para a razão $h/b = 1/15$. Já para as tensões de cisalhamento transversais $(\tau_{xz})_{\text{máx}}$, todos os valores advindos do *software* ADINA divergiram com percentuais acima de 50% em relação àqueles obtidos com a teoria de placas TSDT.

4.6.2.3 Comparação e discussão das máximas tensões de cisalhamento $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ referentes à avaliação paramétrica da razão h/b do painel de MLCC

Para as variações paramétricas da razão h/b , os valores das tensões de cisalhamento τ_{xy} , que se desenvolvem nos planos dos painéis de MLCC, estão reunidos nas Figuras 4.97 a 4.99. Vale ressaltar novamente que as tensões de cisalhamento τ_{xy} comparadas são tão somente aquelas calculadas segundo as teorias de placas e o Método dos Elementos Finitos, pelo mesmo motivo posto na subseção 4.6.1.3. Mais precisamente, as Figuras 4.97, 4.98 e 4.99 trazem os gráficos comparativos dos valores críticos da grandeza em questão para as razões h/b iguais a $1/30$, $1/20$ e $1/15$, respectivamente.

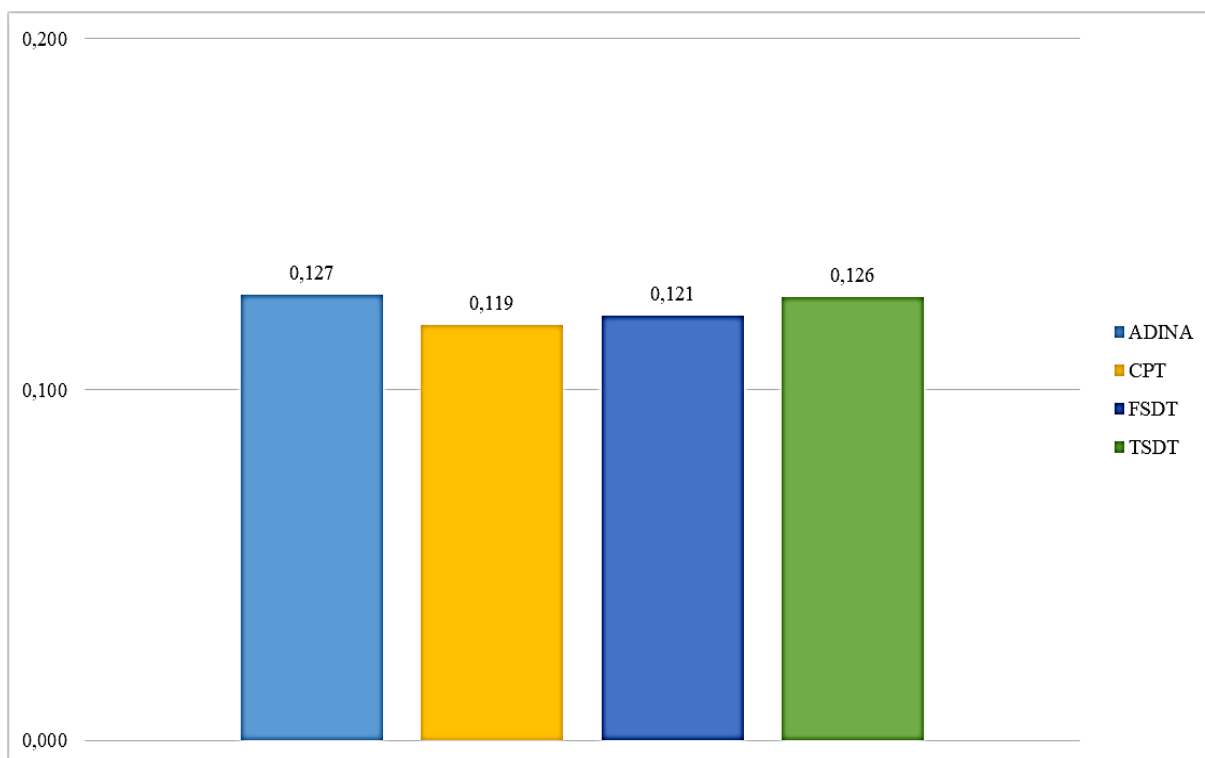
Figura 4.97 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/30$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.98 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/20$ 

Fonte: O Autor

Figura 4.99 – Comparação das máximas tensões cisalhantes $(\tau_{xy})_{\text{máx}}$ para a razão $h/b = 1/15$



Fonte: O Autor

Da interpretação dos gráficos comparativos das Figuras 4.97 a 4.99, seguem as seguintes conclusões:

- Para todas as razões b/a avaliadas, conclui-se que as distintas teorias de placas forneceram valores muito próximos entre si. Para a teoria de placas CPT, a máxima diferença percentual, em relação à teoria de placas TSDT, foi de -5,56%, sendo esta relativa à razão $h/b = 1/15$. Já para a teoria de placas FSDT, a diferença em questão, igualmente para a razão $h/b = 1/15$, foi de -3,97%;
- Os resultados provenientes do *software* ADINA também apresentaram pequenas diferenças em relação àqueles obtidos com a teoria de placas TSDT. A máxima diferença observada foi de 0,91% para a razão $h/b = 1/20$.

4.7 VERIFICAÇÃO DOS PAINÉIS DE MLCC SEGUNDO OS CRITÉRIOS DO PROJETO DE REVISÃO DA ABNT NBR 7190:2020

Para finalizar a análise dos resultados obtidos, os deslocamentos verticais e as tensões normais e de cisalhamento apresentados na subseção 4.6 serão comparados com os valores limites especificados pelo projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020.

4.7.1 Verificação do Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas

Conforme pontuado na subseção 2.5, o Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas é averiguado fazendo-se uso do carregamento quase-permanente, o qual é dado pela Equação (2.362). Retomando esta equação, tem-se:

$$F_{d, serv} = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \sum_{i=1}^m \psi_{2j} F_{Qi,k} \quad (4.206)$$

Na seção 3, ressaltou-se que os painéis de MLCC analisados foram supostos como sendo componentes de áreas comuns de um edifício residencial. Para esses edifícios, verifica-se, pela Tabela 2.1, que o fator de redução ψ_2 assume o valor de 0,3. Assim sendo, ao se considerar $\psi_2 = 0,3$, bem como as ações adotadas na seção 3, é possível escrever que:

$$\sum_{i=1}^m F_{Gi,k} = [(4,20 \text{ kN/m}^3) \cdot (0,10\text{m})] + (1,20 \text{ kN/m}^2) = 1,62 \text{ kN/m}^2 \quad (4.207)$$

$$\sum_{i=1}^m \psi_{2j} F_{Qi,k} = 0,3 \cdot (3,00 \text{ kN/m}^2) = 0,90 \text{ kN/m}^2 \quad (4.208)$$

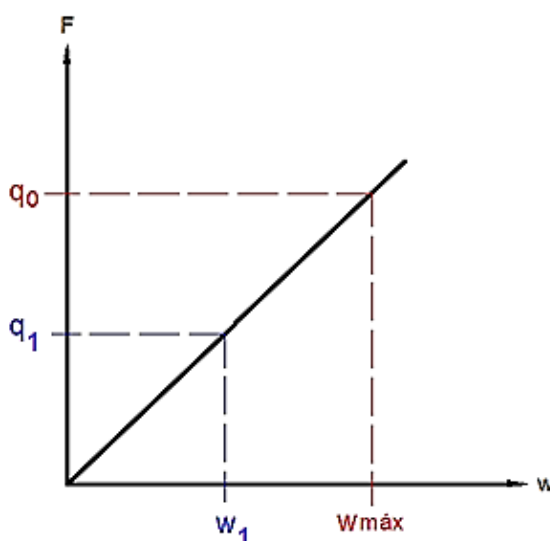
Logo:

$$F_{d, serv} = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \sum_{i=1}^m \psi_{2j} F_{Qi,k} = 1,62 \text{ kN/m}^2 + 0,90 \text{ kN/m}^2 = 2,52 \text{ kN/m}^2 \quad (4.209)$$

Todavia, os deslocamentos verticais foram calculados considerando um carregamento transversal uniformemente distribuído de $q_0 = 5,0 \text{ kN/m}^2$. Além disso, durante as análises estruturais, os módulos de elasticidade e elasticidade transversal não foram ponderados pelos coeficientes de modificação da madeira. Portanto, é preciso efetuar duas correções nos valores de $w_{\text{máx}}$, para que seja possível avaliar o Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas à luz do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020.

Primeiramente, sabe-se que todas as análises dos painéis de MLCC foram conduzidas considerando o regime elástico-linear e, portanto, assumindo como válida a proporcionalidade entre carregamentos e deslocamentos. Essa proporcionalidade está ilustrada na Figura 4.100.

Figura 4.100 – Proporcionalidade entre carregamentos e flechas



Fonte: O Autor

Com base na Figura 4.100, é possível escrever que:

$$w_1 = \left(\frac{q_1}{q_0} \right) w_{\text{máx}} \quad (4.210)$$

Em que:

- q_1 : carregamento qualquer e que pode ser tomado, por exemplo, como sendo $\Sigma F_{Gi,k}$, $\Sigma \psi_{2j} F_{Qk,j}$ ou $F_{d,\text{serv}}$;
- w_1 : flecha com a primeira correção e que decorre do carregamento q_1 .

A Equação (4.210) traz a primeira correção necessária às flechas, restando então a correção relacionada aos coeficientes de modificação da madeira. Para efetuar tal correção, é necessário pontuar que os deslocamentos verticais são inversamente proporcionais ao módulo de elasticidade. Essa proporção inversa entre as grandezas aludidas pode ser verificada considerando duas faixas de largura unitária no plano dos painéis de MLCC e retomando as expressões clássicas da Resistência dos Materiais acerca dos deslocamentos em vigas retas. Segundo Beer e Johnston (2005), essas expressões são:

$$\frac{d^4 w_x}{dx^4} = \frac{q_x}{(EI)_x} \quad (4.211)$$

E:

$$\frac{d^4 w_y}{dy^4} = \frac{q_y}{(EI)_y} \quad (4.212)$$

Ao realizar quatro integrações nas Equações (4.211) e (4.212), é possível reescrevê-las nas formas:

$$(EI)_x w_x = \int dx \int dx \int dx \int q_x dx + \frac{1}{6} C_1 x^3 + \frac{1}{2} C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad (4.213)$$

E:

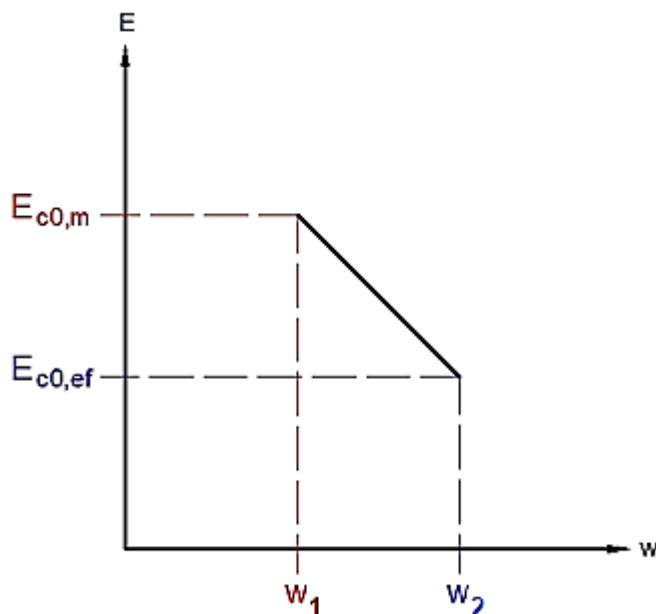
$$(EI)_y w_y = \int dy \int dy \int dy \int q_y dy + \frac{1}{6} C_1 y^3 + \frac{1}{2} C_2 y^2 + C_3 y + C_4 \quad (4.214)$$

Em que:

- $\int dx \int dx \int dx \int q_x dx$: quatro operações sucessivas de integração de q_x ;
- $\int dy \int dy \int dy \int q_y dy$: quatro operações sucessivas de integração de q_y ;
- C_1, C_2, C_3 e C_4 : constantes de integração.

Nota-se então, pelas Equações (4.213) e (4.214), que os módulos de elasticidade e as flechas são inversamente proporcionais. Levando-se em conta o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, é possível então elaborar o gráfico da Figura 4.101.

Figura 4.101 – Proporcionalidade inversa entre módulos de elasticidade e flechas



Fonte: O Autor

Na Figura 4.101, a grandeza w_2 corresponde à flecha com ambas as correções necessárias e que pode ser igual a w_g , w_q ou w_{serv} , as quais são decorrentes de $\Sigma F_{Gi,k}$, $\Sigma F_{Qk,j}$ ou $F_{d,serv}$, respectivamente. Ainda com base nessa figura, bem como no conceito de proporcionalidade inversa entre grandezas, tem-se a seguinte relação:

$$E_{c0,m} w_1 = E_{c0,ef} w_2 \quad (4.215)$$

Portanto:

$$w_2 = w_1 \frac{E_{c0,m}}{E_{c0,ef}} = w_1 \frac{E_{c0,m}}{k_{mod} E_{c0m}} = \frac{1}{k_{mod}} w_1 \quad (4.216)$$

Por fim, ao se considerar conjuntamente as Equações (4.210) e (4.216), chega-se à expressão a ser empregada para avaliar as flechas à luz do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, ou seja:

$$w_2 = \frac{1}{k_{\text{mod}}} \left(\frac{q_1}{q_0} \right) w_{\text{máx}} \quad (4.217)$$

O coeficiente de modificação k_{mod} , conforme já pontuado na subseção 2.5, é calculado pelo emprego das Equações (2.365) e (2.366). Resgatando simultaneamente ambas as equações, tem-se:

$$k_{\text{mod}} = k_{\text{mod},1} k_{\text{mod},2} k_{\text{mod},3} = k_{\text{mod},1} k_{\text{mod},2} (C_e C_c C_t) \quad (4.218)$$

Em que:

- $k_{\text{mod},1} = 0,70$ (valor extraído da Tabela 2.2 para ação variável principal de longa duração e madeira do tipo lamelada colada);
- $k_{\text{mod},2} = 0,90$ (valor extraído da Tabela 2.3 para classe de umidade 2 e madeira do tipo lamelada colada);
- $C_e = 1,00$ (peças sem emendas longitudinais do tipo *fingerjoints*);
- $C_c = 1,00$ (peças sem curvaturas);
- $C_t = 1,00$ (valor extraído da Tabela 2.5 para temperatura ambiente inferior a 38 °C, madeira seca e destinado à avaliação do módulo de elasticidade).

Logo:

$$k_{\text{mod}} = 0,70 \cdot 0,90 \cdot (1,00 \cdot 1,00 \cdot 1,00) = 0,63 \quad (4.219)$$

Além dos valores máximos dos deslocamentos verticais e do coeficiente de modificação, é necessário estabelecer o coeficiente de fluência. Para o estudo aqui desenvolvido, tem-se $\varphi = 0,80$, sendo este valor lido na Tabela 2.6 para carregamentos permanentes ou de longa duração e classe de umidade 2.

Destarte, as verificações referentes ao Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas podem ser realizadas ao retomar as Equações (2.371) e (2.373), as quais são para os casos de dispensa e de necessidade de contraflecha, respectivamente.

$$w_{ef} = (1 + \varphi) (w_g + \psi_2 w_q) \leq w_{lim} = \frac{L}{300} \quad (4.220)$$

$$w_{ef}^* = (1 + \varphi) [(w_g - w_{cf}) + \psi_2 w_q] \leq w_{lim} = \frac{L}{300} \quad (4.221)$$

Nas Equações (4.220) e (4.221), o valor de L a ser empregado, para todos os painéis de MLCC estudados, é igual a 3.000 mm, uma vez que esta dimensão será sempre a menor dimensão em planta, para qualquer painel avaliado. Quando mostrou-se necessária, a contraflecha foi escolhida com base na Equação (2.372). No presente trabalho, as contraflechas foram escolhidas com base na equação:

$$w_{cf} \cong w_{ef} - w_{lim} \leq \frac{2}{3} w_g \quad (4.222)$$

Por fim, as Tabelas 4.79 a 4.83 reúnem os seguintes valores de deslocamentos verticais: $w_{máx}$, w_g , w_q , w_{ef} , w_{lim} , w_{cf} e w_{ef}^* , bem como uma indicação de atendimento ou não do Estado Limite de Utilização de Deformações Excessivas para as variações paramétricas b/a e h/b dos painéis de MLCC analisados.

Nas tabelas supracitadas, o método proposto sem e com deformações de cisalhamento está identificado, respectivamente, por método proposto 01 e método proposto 02, apenas para fins de melhor disposição dos resultados.

Tabela 4.79 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $b/a = 1,0$ e $h/b = 1/30$

Método	$W_{m\acute{a}x}$	W_g	W_q	W_{ef}	W_{lim}	$W_{ef} \leq$	W_{cf}	W_{ef}^*	$W_{ef}^* \leq$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	$W_{lim} ?$	(mm)	(mm)	$W_{lim} ?$
ADINA	6,002	3,087	5,716	8,643	10	Sim	-	-	-
CPT	5,437	2,796	5,178	7,829	10	Sim	-	-	-
FSDT	5,533	2,846	5,270	7,969	10	Sim	-	-	-
TSDT	5,563	2,861	5,298	8,011	10	Sim	-	-	-
Método Gama	7,941	4,084	7,563	11,435	10	Não	1,50	8,735	Sim
Método κ	7,200	3,703	6,857	10,368	10	Não	0,40	9,648	Sim
Shear Analogy Method	8,018	4,124	7,636	11,547	10	Não	1,60	8,667	Sim
Método proposto 01	5,566	2,863	5,301	8,016	10	Sim	-	-	-
Método proposto 02	6,289	3,234	5,990	9,056	10	Sim	-	-	-

Fonte: O Autor

Tabela 4.80 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $b/a = 1,5$

Método	$W_{m\acute{a}x}$	W_g	W_q	W_{ef}	W_{lim}	$W_{ef} \leq$	W_{cf}	W_{ef}^*	$W_{ef}^* \leq$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	$W_{lim} ?$	(mm)	(mm)	$W_{lim} ?$
ADINA	7,831	4,027	7,458	11,276	10	Não	1,30	8,936	Sim
CPT	7,117	3,660	6,778	10,248	10	Não	0,30	9,708	Sim
FSDT	7,242	3,724	6,897	10,428	10	Não	0,50	9,528	Sim
TSDT	7,285	3,747	6,938	10,491	10	Não	0,50	9,591	Sim
Método Gama	7,941	4,084	7,563	11,435	10	Não	1,50	8,735	Sim
Método κ	7,200	3,703	6,857	10,368	10	Não	0,40	9,648	Sim
Shear Analogy Method	8,018	4,124	7,636	11,547	10	Não	1,60	8,667	Sim
Método proposto 01	6,805	3,500	6,481	9,800	10	Sim	-	-	-
Método proposto 02	7,817	4,020	7,445	11,256	10	Não	1,30	8,916	Sim

Fonte: O Autor

Tabela 4.81 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $b/a = 2,0$

Método	$w_{m\acute{a}x}$	w_g	w_q	w_{ef}	w_{lim}	$w_{ef} \leq$	w_{cf}	w_{ef}^*	$w_{ef}^* \leq$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	$w_{lim} ?$	(mm)	(mm)	$w_{lim} ?$
ADINA	8,153	4,193	7,765	11,741	10	Não	1,80	8,501	Sim
CPT	7,415	3,813	7,062	10,677	10	Não	0,70	9,417	Sim
FSDT	7,548	3,882	7,189	10,870	10	Não	0,90	9,250	Sim
TSDT	7,594	3,905	7,232	10,934	10	Não	1,00	9,134	Sim
Método Gama	7,941	4,084	7,563	11,435	10	Não	1,50	8,735	Sim
Método κ	7,200	3,703	6,857	10,368	10	Não	0,40	9,648	Sim
Shear Analogy Method	8,018	4,124	7,636	11,547	10	Não	1,60	8,667	Sim
Método proposto 01	7,070	3,636	6,733	10,181	10	Não	0,20	9,821	Sim
Método proposto 02	8,160	4,197	7,771	11,751	10	Não	1,80	8,511	Sim

Fonte: O Autor

Tabela 4.82 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $h/b = 1/20$

Método	$w_{m\acute{a}x}$	w_g	w_q	w_{ef}	w_{lim}	$w_{ef} \leq$	w_{cf}	w_{ef}^*	$w_{ef}^* \leq$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	$w_{lim} ?$	(mm)	(mm)	$w_{lim} ?$
ADINA	1,975	1,016	1,881	2,845	10	Sim	-	-	-
CPT	1,611	0,829	1,534	2,321	10	Sim	-	-	-
FSDT	1,675	0,861	1,595	2,411	10	Sim	-	-	-
TSDT	1,695	0,872	1,614	2,441	10	Sim	-	-	-
Método Gama	2,602	1,338	2,478	3,747	10	Sim	-	-	-
Método κ	2,133	1,097	2,031	3,071	10	Sim	-	-	-
Shear Analogy Method	2,655	1,365	2,529	3,823	10	Sim	-	-	-
Método proposto 01	1,649	0,848	1,570	2,374	10	Sim	-	-	-
Método proposto 02	2,123	1,092	2,022	3,057	10	Sim	-	-	-

Fonte: O Autor

Tabela 4.83 – Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas para $h/b = 1/15$

Método	$w_{m\acute{a}x}$	w_g	w_q	w_{ef}	w_{lim}	$w_{ef} \leq$	w_{cf}	w_{ef}^*	$w_{ef}^* \leq$
	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	(mm)	$w_{lim} ?$	(mm)	(mm)	$w_{lim} ?$
ADINA	0,949	0,488	0,904	1,367	10	Sim	-	-	-
CPT	0,680	0,350	0,648	0,980	10	Sim	-	-	-
FSDT	0,727	0,374	0,692	1,047	10	Sim	-	-	-
TSDT	0,743	0,382	0,708	1,070	10	Sim	-	-	-
Método Gama	1,244	0,640	1,185	1,792	10	Sim	-	-	-
Método κ	0,900	0,463	0,857	1,296	10	Sim	-	-	-
Shear Analogy Method	1,285	0,661	1,224	1,851	10	Sim	-	-	-
Método proposto 01	0,696	0,358	0,663	1,002	10	Sim	-	-	-
Método proposto 02	1,044	0,537	0,994	1,503	10	Sim	-	-	-

Fonte: O Autor

Para todas as variações paramétricas b/a e h/b avaliadas, o Estado Limite de Serviço de Deformações Excessivas, à luz do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020, pode ser atendido, com ou sem a consideração de contraflechas.

4.7.2 Verificação do Estado Limite Último

No final da subseção 2.5, foi posto que o projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020 especifica, para a avaliação do Estado Limite de Último, as combinações últimas normais. Para se obter tais combinações, basta retomar a Equação (2.380), ou seja:

$$F_d = \sum_{i=1}^m \gamma_{Gi} F_{Gi,k} + \gamma_Q \left(F_{Q1,k} + \sum_{j=1}^n \psi_{0j} F_{Qj,k} \right) \quad (4.223)$$

Para os painéis de MLCC abordados no presente trabalho, nota-se que todos apresentam eixo neutro à altura do centro de gravidade e, portanto, em termos de tensões normais, será feita apenas a verificação da tensão normal de compressão paralela às fibras da madeira, haja vista

que a resistência à tração nessa direção é superior a de compressão. Para efetuar a referida verificação, basta retomar as Equações (2.374) e (4.218). Escreve-se então:

$$\sigma_{cd} = \gamma_f \sigma_{ck} \leq f_{c0,d} = k_{mod1} k_{mod2} k_{mod3} \frac{f_{c0,k}}{\gamma_{wc}} \quad (4.224)$$

E:

$$k_{mod} = k_{mod,1} k_{mod,2} k_{mod,3} = k_{mod,1} k_{mod,2} (C_e C_c C_t) \quad (4.225)$$

Em que:

- $\gamma_f = 1,4$;
- $\gamma_{wc} = 1,4$;
- $k_{mod,1} = 0,70$ (valor extraído da Tabela 2.2 para ação variável principal de longa duração e madeira do tipo lamelada colada);
- $k_{mod,2} = 0,90$ (valor extraído da Tabela 2.3 para classe de umidade 2 e madeira do tipo lamelada colada);
- $C_e = 1,00$ (peças sem emendas longitudinais do tipo *fingerjoints*);
- $C_c = 1,00$ (peças sem curvaturas);
- $C_t = 1,00$ (valor extraído da Tabela 2.5 para temperatura ambiente inferior a 38 °C, madeira seca e destinado à avaliação da resistência à compressão).

Logo:

$$k_{mod} = 0,70 \cdot 0,90 \cdot (1,00 \cdot 1,00 \cdot 1,00) = 0,63 \quad (4.226)$$

E:

$$f_{c0,d} = 0,63 \cdot \frac{24}{1,4} = 10,800 \text{ MPa} \quad (4.227)$$

Os valores, característicos e de cálculo, das tensões normais solicitantes e sua comparação com o valor de $f_{c0,d}$ estão reunidos nas Tabelas 4.84 a 4.88. Nestas tabelas, também estão dispostos os valores, característicos e de cálculo, das tensões de cisalhamento transversais, os quais devem satisfazer a subsequente desigualdade:

$$\tau_d = \gamma_f \tau_k \leq f_{v0,d} = 0,12 f_{c0,d} \quad (4.228)$$

Também é importante a seguinte consideração: nas Tabelas 4.84 a 4.88, novamente o método proposto sem e com deformações de cisalhamento está identificado, respectivamente, por método proposto 01 e método proposto 02. Além disso, nas referidas tabelas, os valores característicos das tensões normais ($\sigma_{c0,k}$) e de cisalhamento (τ_k) correspondem aos valores máximos das tensões σ_{xx} e τ_{xz} , respectivamente, os quais estão elencados nas Figuras 4.79 a 4.84 – para as variações paramétricas b/a – e nas Figuras 4.91 a 4.96, para as variações paramétricas h/b . Vale lembrar que as tensões σ_{yy} e τ_{yz} não necessitam de ser verificadas, pois elas possuem magnitude inferiores às tensões σ_{xx} e τ_{xz} , respectivamente.

Tabela 4.84 – Estado Limite de Último para as variações paramétricas $b/a = 1,0$ e $h/b = 1/30$

Método	$\sigma_{c0,k}$	$\sigma_{c0,d}$	$f_{c0,d}$	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificações
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	3,172	4,441	10,800	0,0832	0,116	1,296	Atendidas
CPT	3,223	4,512	10,800	0,0870	0,122	1,296	Atendidas
FSDT	3,213	4,498	10,800	0,105	0,147	1,296	Atendidas
TSDT	3,217	4,504	10,800	0,183	0,256	1,296	Atendidas
Método Gama	4,331	6,063	10,800	0,0980	0,137	1,296	Atendidas
Método κ	4,224	5,914	10,800	-	-	-	Atendidas
Shear Analogy Method	4,334	6,068	10,800	0,0984	0,138	1,296	Atendidas
Método proposto 01	3,265	4,571	10,800	0,0795	0,111	1,296	Atendidas
Método proposto 02	3,188	4,463	10,800	0,0777	0,109	1,296	Atendidas
Método proposto 01 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,0870	0,122	1,296	Atendidas
Método proposto 02 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,0849	0,119	1,296	Atendidas

Fonte: O Autor

Tabela 4.85 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $b/a = 1,5$

Método	$\sigma_{c0,k}$	$\sigma_{c0,d}$	$f_{c0,d}$	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificações
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	4,183	5,856	10,800	0,0960	0,134	1,296	Atendidas
CPT	4,220	5,908	10,800	0,0992	0,139	1,296	Atendidas
FSDT	4,214	5,900	10,800	0,121	0,169	1,296	Atendidas
TSDT	4,223	5,912	10,800	0,211	0,295	1,296	Atendidas
Método Gama	4,331	6,063	10,800	0,0980	0,137	1,296	Atendidas
Método κ	4,224	5,914	10,800	-	-	-	Atendidas
Shear Analogy Method	4,334	6,068	10,800	0,0984	0,138	1,296	Atendidas
Método proposto 01	3,992	5,589	10,800	0,0973	0,136	1,296	Atendidas
Método proposto 02	3,963	5,548	10,800	0,0965	0,135	1,296	Atendidas
Método proposto 01 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,106	0,148	1,296	Atendidas
Método proposto 02 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,106	0,148	1,296	Atendidas

Fonte: O Autor

Tabela 4.86 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $b/a = 2,0$

Método	$\sigma_{c0,k}$	$\sigma_{c0,d}$	$f_{c0,d}$	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificações
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	4,364	6,110	10,800	0,0963	0,135	1,296	Atendidas
CPT	4,387	6,142	10,800	0,0992	0,139	1,296	Atendidas
FSDT	4,386	6,140	10,800	0,121	0,169	1,296	Atendidas
TSDT	4,397	6,156	10,800	0,212	0,297	1,296	Atendidas
Método Gama	4,331	6,063	10,800	0,0980	0,137	1,296	Atendidas
Método κ	4,224	5,914	10,800	-	-	-	Atendidas
Shear Analogy Method	4,334	6,068	10,800	0,0984	0,138	1,296	Atendidas
Método proposto 01	4,148	5,807	10,800	0,101	0,141	1,296	Atendidas
Método proposto 02	4,137	5,792	10,800	0,101	0,141	1,296	Atendidas
Método proposto 01 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,110	0,154	1,296	Atendidas
Método proposto 02 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,110	0,154	1,296	Atendidas

Fonte: O Autor

Tabela 4.87 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $h/b = 1/20$

Método	$\sigma_{c0,k}$	$\sigma_{c0,d}$	$f_{c0,d}$	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificações
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	1,388	1,943	10,800	0,0549	0,0769	1,296	Atendidas
CPT	1,432	2,005	10,800	0,0580	0,0812	1,296	Atendidas
FSDT	1,422	1,991	10,800	0,0697	0,0976	1,296	Atendidas
TSDT	1,427	1,998	10,800	0,122	0,171	1,296	Atendidas
Método Gama	1,963	2,748	10,800	0,0652	0,0913	1,296	Atendidas
Método κ	1,877	2,628	10,800	-	-	-	Atendidas
Shear Analogy Method	1,966	2,752	10,800	0,0658	0,0921	1,296	Atendidas
Método proposto 01	1,451	2,031	10,800	0,0530	0,0742	1,296	Atendidas
Método proposto 02	1,380	1,932	10,800	0,0504	0,0706	1,296	Atendidas
Método proposto 01 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,0580	0,0812	1,296	Atendidas
Método proposto 02 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,0551	0,0771	1,296	Atendidas

Fonte: O Autor

Tabela 4.88 – Estado Limite de Último para a variação paramétrica $h/b = 1/15$

Método	$\sigma_{c0,k}$	$\sigma_{c0,d}$	$f_{c0,d}$	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificações
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	0,767	1,074	10,800	0,0407	0,0570	1,296	Atendidas
CPT	0,806	1,128	10,800	0,0435	0,0609	1,296	Atendidas
FSDT	0,796	1,114	10,800	0,0521	0,0729	1,296	Atendidas
TSDT	0,800	1,120	10,800	0,0906	0,127	1,296	Atendidas
Método Gama	1,134	1,588	10,800	0,0488	0,0683	1,296	Atendidas
Método κ	1,056	1,478	10,800	-	-	-	Atendidas
Shear Analogy Method	1,137	1,592	10,800	0,0496	0,0694	1,296	Atendidas
Método proposto 01	0,816	1,142	10,800	0,0398	0,0557	1,296	Atendidas
Método proposto 02	0,752	1,053	10,800	0,0367	0,0514	1,296	Atendidas
Método proposto 01 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,0435	0,0609	1,296	Atendidas
Método proposto 02 (fórmula aproximada)	-	-	-	0,0401	0,0561	1,296	Atendidas

Fonte: O Autor

Ao analisar as Tabelas 4.84 a 4.88, verifica-se então que, para todas as variações paramétricas b/a e h/b , o Estado Limite de Último foi atendido, pois foram satisfeitos os requisitos do projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020.

Por fim, verificam-se agora as tensões de cisalhamento τ_{xy} que se manifestam no plano dos painéis de MLCC. Essas tensões necessitam de ser verificadas, haja vista que elas resultaram superiores às tensões de cisalhamento transversais. Desta forma, foram elaboradas as Tabelas 4.89 a 4.93, que, por sua vez, reúnem tais verificações.

As tabelas supracitadas trazem, para os valores característicos das tensões de cisalhamento (τ_k), os valores máximos das tensões de cisalhamento τ_{xy} apresentadas nas Figuras 4.85 a 4.87 – para as variações paramétricas b/a – e nas Figuras 4.97 a 4.99, para as variações paramétricas h/b .

Tabela 4.89 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $b/a = 1,0$ e $h/b = 1/30$

Método	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificação
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	0,487	0,682	1,296	Atendida
CPT	0,474	0,664	1,296	Atendida
FSDT	0,477	0,668	1,296	Atendida
TSDT	0,483	0,676	1,296	Atendida

Fonte: O Autor

Tabela 4.90 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $b/a = 1,5$

Método	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificação
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	0,500	0,700	1,296	Atendida
CPT	0,484	0,678	1,296	Atendida
FSDT	0,488	0,683	1,296	Atendida
TSDT	0,493	0,690	1,296	Atendida

Fonte: O Autor

Tabela 4.91 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $b/a = 2,0$

Método	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificação
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	0,491	0,687	1,296	Atendida
CPT	0,476	0,666	1,296	Atendida
FSDT	0,480	0,672	1,296	Atendida
TSDT	0,485	0,679	1,296	Atendida

Fonte: O Autor

Tabela 4.92 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $h/b = 1/20$

Método	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificação
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	0,221	0,309	1,296	Atendida
CPT	0,211	0,295	1,296	Atendida
FSDT	0,214	0,300	1,296	Atendida
TSDT	0,219	0,307	1,296	Atendida

Fonte: O Autor

Tabela 4.93 – Verificação das tensões de cisalhamento τ_{xy} para $h/b = 1/15$

Método	τ_k	τ_d	$f_{v0,d}$	Verificação
	(MPa)	(MPa)	(MPa)	
ADINA	0,127	0,178	1,296	Atendida
CPT	0,119	0,167	1,296	Atendida
FSDT	0,121	0,169	1,296	Atendida
TSDT	0,126	0,176	1,296	Atendida

Fonte: O Autor

O Estado Limite de Último associado às tensões de cisalhamento τ_{xy} no plano dos painéis também foi atendido para todas as variações paramétricas b/a e h/b . Portanto, uma madeira de classe C24, com as propriedades mecânicas da Tabela 3.1, demonstrou-se suficiente para atender os Estados Limites de Serviço e Último em painéis de MLCC sujeitos à flexão simples e com dimensões e carregamentos condizentes com aqueles empregados nas estruturas usuais.

Por fim, para que o dimensionamento dos painéis de MLCC fique completo, faz-se necessário avaliar o Estado Limite Último associado ao fenômeno *rolling shear*, o qual

necessita de ser melhor explorado em trabalhos futuros, sobretudo no que tange ao valor da resistência ao cisalhamento relativa a essa forma de ruptura. Outras questões que também devem ser consideradas em casos da prática de projeto são a presença de emendas *fingerjoints* e o Estado Limite de Serviço de Vibrações Excessivas, estando todas elas fora do escopo deste trabalho.

5 CONCLUSÃO

Os painéis de madeira lamelada colada cruzada (MLCC), sob a forma de placas ou de chapas, vêm tendo seu uso cada vez mais difundido, sobretudo em países da Europa e da América do Norte. O maior emprego desses painéis fez surgir a necessidade de desenvolvimento de métodos de análise estrutural que fornecessem resultados de forma prática, mas que simultaneamente garantisse às estruturas segurança e economia. Nesse contexto, as principais normas e literaturas técnicas procuram prescrever aos projetistas métodos analíticos simplificados, que reduzem um problema originalmente tridimensional a um problema unidimensional, isto é, permitem um cálculo baseado na teoria de vigas. Dentre esses métodos, destacam-se o Método Gama, o Método κ e o Método de Analogia ao Cisalhamento.

Além dos métodos unidimensionais e do Método dos Elementos Finitos, também pode-se analisar os painéis de MLCC por meio das teorias de placas, que são teorias com origem na Teoria da Elasticidade e cuja grande vantagem está em permitir a simplificação de um problema tridimensional a um problema bidimensional, fazendo-se a definição de campos de deslocamentos.

No presente trabalho, buscou-se conceituar todos os métodos supracitados e aplicá-los a um painel de MLCC com diferentes dimensões em planta e espessuras, estando esse painel com articulações junto aos apoios e submetido a um carregamento transversal uniformemente distribuído. Quando da definição do painel de MLCC, buscou-se escolher dimensões, carregamento e vinculações que apresentassem consonância com a prática de projetos.

Ademais, esta pesquisa também procurou dar uma maior contribuição ao estudo da mecânica dos painéis de MLCC ao propor uma nova abordagem de cálculo unidimensional simplificada, sendo essa abordagem uma adaptação da consagrada Teoria de Rankine-Grasshoff ou Teoria das Grelhas.

Quando da aplicação dos diferentes métodos de análise estrutural ao painel de MLCC de referência, bem como as suas variações, pôde-se observar, em termos gerais, que os métodos tendem a fornecer valores críticos de deslocamentos verticais e tensões normais com considerável proximidade entre si. Têm-se, como exceções, os resultados obtidos, com os métodos unidimensionais, para o painel de MLCC de lados iguais. Já no tocante às máximas tensões de cisalhamento transversais, há uma concordância razoável entre os valores fornecidos pelos diferentes métodos, excetuando-se os valores fornecidos pela teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem. Todavia, faz-se importante enfatizar que, embora as diferenças

percentuais entre os valores das grandezas de interesse – em alguns casos – seja elevada, em valores absolutos, tais diferenças não são significativas na prática de projetos.

Outro ponto que merece destaque é a notável proximidade entre os valores fornecidos pelo Método dos Elementos Finitos – via *software* ADINA – e os resultados decorrentes da aplicação do método analítico proposto. Essa proximidade, muito provavelmente, deu-se por razão da consideração das influências dos vãos e das rigidezes do painel de MLCC na definição do quinhão de carregamento considerado nos cálculos. Tais considerações permitiram transpor a limitação de emprego dos métodos unidimensionais prescritos comumente na literatura técnica. Conforme posto nesta pesquisa, os referidos métodos fornecem resultados muito conservadores para os deslocamentos verticais e para as tensões normais em painéis de MLCC com comportamento bidirecional pronunciado.

Ainda em relação à avaliação mecânica dos painéis de MLCC, verificou-se que as tensões de cisalhamento que se manifestam no plano dos painéis tão somente puderam ser computadas de forma satisfatória fazendo-se uso das teorias de placas e do Método dos Elementos Finitos. Soma-se a isso, o fato de que essas tensões apresentaram valores superiores às tensões de cisalhamento transversais, evidenciando assim outra limitação dos métodos analíticos unidimensionais.

Após a determinação dos deslocamentos verticais e das tensões – normais e de cisalhamento – o painel de MLCC, com todas as suas variações paramétricas, foi verificado quanto aos Estados Limites Último e de Serviço, segundo os critérios estabelecidos pelo projeto de revisão da ABNT NBR 7190:2020. Em linhas gerais, foi possível atestar a viabilidade de emprego para todas as variações do painel de MLCC de referência, independentemente do método de análise estrutural escolhido. Entretanto, mostrou-se ser conveniente, para os painéis de MLCC com vãos iguais, a adoção de métodos mais apurados que os métodos unidimensionais simplificados trazidos pelas literaturas técnicas, sobretudo quando da avaliação das flechas, haja vista que tais métodos podem implicar na consideração de contraflechas desnecessárias. O método proposto, em especial a versão com a consideração das deformações de cisalhamento, pode ser uma opção aos projetistas que não desejam recorrer às teorias de placas ou ao Método dos Elementos Finitos para avaliar as flechas e as tensões nos painéis de MLCC de quaisquer dimensões.

Por fim, pontuam-se aqui algumas sugestões para trabalhos futuros e que poderão auxiliar na evolução do estudo da avaliação mecânica dos painéis de MLCC:

- Avaliação mecânica de painéis de MLCC, em flexão simples, com diferentes condições de contorno, por meio dos diferentes métodos apresentados no presente trabalho;
- Elaboração de um programa computacional que permita o cálculo dos deslocamentos verticais e das tensões – normais e de cisalhamento – de painéis de MLCC sujeitos à flexão simples. Incorporar a esse programa, todos os métodos de análise estrutural abordados na presente pesquisa;
- Avaliação mecânica de painéis de MLCC, utilizados como placas, sujeitos a vibrações;
- Avaliação mecânica de painéis de MLCC empregados como paredes estruturais;
- Avaliação mecânica de painéis de MLCC constituídos por lamelas de madeira da mesma espécie, mas com diferentes classes de resistência (classes de maior resistência nas lamelas externas e central e classes de menor resistência nas demais lamelas);
- Comparação dos resultados obtidos neste trabalho com resultados experimentais;
- Estudo da estabilidade global de edifícios de múltiplos pavimentos em MLCC.

REFERÊNCIAS

- ALBOSTAMI, A. S.; WU, Z.; CUNNINGHAM, L. S. Structural behaviour of cross-laminated timber panels by the state space approach. **International Journal of Computational Methods and Experimental Measurements**, v. 5, n. 6, p. 834 - 846, 2017.
- AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE. ANSI/APA PRG 320: Standard for performance-rated cross-laminated timber. Tacoma, 2019.
- AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **ASTM D198-09**: Standard test methods of static tests of lumber in structural sizes. Philadelphia, 2009
- AMORIM, S. T. A.; MANTILLA, J. N. R.; CARRASCO, E. V. M. Análise dos métodos analíticos de dimensionamento de lajes de madeira laminada cruzada. *In*: CONGRESSO LATINOAMERICANO DE ESTRUTURAS DE MADERA E CONGRESSO IBERO-LATINOAMERICANO DE LA MADERA EN LA CONSTRUCCIÓN, 2., 2017, Buenos Aires. **Anais...** Buenos Aires: UNNOBA, 2017.
- ARAÚJO, J. M. **Curso de concreto armado**. Rio de Janeiro: Editora Dunas, 2014. v. 2.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6120**: Ações para o cálculo de estruturas de edificações. Rio de Janeiro, 2019.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de Revisão NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 2020.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681**: Ações e segurança nas estruturas - Procedimento. Rio de Janeiro, 2004.
- BEER, F. P.; JOHNSTON JR, E. R. **Resistência dos Materiais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1995.

BLASS, H. K.; FELLMOSE, P. Design of solid wood panels with cross layers. *In: WORLD CONFERENCE ON TIMBER ENGINEERING*, 8., 2004, Lahti, Finland. **Proceedings...** Lahti, Finland: Finnish Association of Civil Engineers RIL, 2004. p. 543-548.

BORGSTRÖM, E.; FRÖBEL, J. The CLT Handbook: CLT structures - facts and planning. Stockholm: Swedish Wood, 2019.

BRANDNER, R. **Production and technology of cross laminated timber (CLT)**: a state-of-the-art report. Relatório – Institute of Timber Engineering and Wood Technology, Graz University of Technology, Graz, 2013.

BURBACK, B.; PEI, S. Cross-Laminated Timber for Single-Family Residential Construction: Comparative Cost Study. **Journal of Architectural Engineering**, v. 23, n. 3, p. 834 - 846, 2017.

CALIL JÚNIOR, C.; BARALDI, L.T.; STAMATO, G. C.; FERREIRA, N. S. S. **Estruturas de madeira**. São Carlos: USP – Departamento de Engenharia de Estruturas, 1998. Notas de Aula.

CALIL JUNIOR, C.; PEREIRA, M. C. M. Strength and Stiffness of Cross Laminated Timber (CLT) panels produced with Pinus and Eucalyptus: experimental and analytical comparisons. **Revista Matéria**, v. 24, n. 02, 2019.

CHRISTOVASILIS, I. P.; BRUNETTI, M.; FOLLESA, M.; NOCETTI, M.; VASSALLO, D. Evaluation of the mechanical properties of cross-laminated timber with elementary beam theories. **Construction and Building Materials**, p. 202–213, 23 jun. 2016.

CROSSLAM (Suzano - SP). **Cross laminated timber**: Detalhes construtivos. São Paulo: [s. n.], [201-]a.

CROSSLAM (Suzano - SP). **Cross laminated timber**: Informações técnicas. São Paulo: [s. n.], [201-]b.

CZARDESKI, C.; STEIGER, R.; HOWALD, M.; OLIA, S.; GÜLZOW, A.; NIEMZ, P. Versuche und Berechnungen an allseitig gelagerten 3-schichtigen Brettsper Holzplatten. **European Journal of Wood and Wood Products**, v. 65, p. 383-402, 2007

DIAS, A. **Como a vai se transformar no principal material de construção de madeira edifícios de múltiplos andares**. 1. ed. São Paulo: [s. n.], 2018.

ECKER, T. W. P.; MIOTTO, J. L.; TURMINA, G. Painéis de madeira laminada colada cruzada para lajes: avaliação experimental mecânica sob diferentes níveis de consumo de adesivo. **Ciência & Engenharia (Science & Engineering Journal)**, v. 26, n. 1, p. 17 - 25, 2017.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **EN 1995-1-1 EUROCODE 5: 2004**: Design of timber structures. Parte 1 – 1: General – common rules and rules for buildings. Bruxelas; CEN, 2004.

FOREST PRODUCTS LABORATORY. Wood Handbook – Wood as an Engineering Material. General Technical Report FPL-GTR-282. Madison, WI. United States Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory. 543 p., 2021.

GONÇALVES FILHO, J. A. C.; DIAS, A. **Conhecendo o cross laminated timber (CLT)**. Suzano: [s. n.], [201-].

JELEČ, M.; VAREVAC, D.; RAJČIĆ, V. Cross-laminated timber (CLT) – a state of the art report. **Journal of the Croatian Association of Civil Engineers**, v.70, p. 75-95, 2018.

JONES, K.; STEGEMANN, J.; SYKES, J.; WINSLOW, P. Adoption of unconventional approaches in construction: The case of cross-laminated timber. **Construction and Building Materials**, v. 125, p. 690-702, ago. 2016.

KARACABEYLI, E.; DOUGLAS, B. (ed.). **CLT Handbook**. Pointe-Claire, QC: FPInnovations, 2013.

KARACABEYLI, E.; GAGNON, S. (ed.). **Canadian CLT Handbook**. Pointe-Claire, QC: FPInnovations, 2019. v. 1.

KOZARIĆ, L.; PROKIĆ, A.; BEŠEVIĆ, M. Cross laminated timber elements in contemporary timber structures of buildings – application and design. **Building Materials and Structures**, v. 58, n. 4, p. 51 - 69, 2015.

MALLO, M. F. L.; ESPINOZA, O. Outlook for Cross-Laminated Timber in the United States. **BioResources**, v. 9, n. 4, p. 7427-7443, 2014.

MENDES, R. A. B.; BENINCÁ, M. E.; MORSCH, I. B. Simulação numérica de placas cross-laminated timber (CLT): comparação de elementos finitos versus teorias de placas. *In*: Encontro Brasileiro em Madeiras e em Estruturas de Madeira, 17., 2021, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis, 2017.

MESTEK, P.; KREUZINGER, H.; WINTER, S. Design of Cross Laminated Timber (CLT). *In*: WORLD CONFERENCE ON TIMBER ENGINEERING, 10., 2008, Miyazaki, Japan. **Proceedings...** Miyazaki, Japan: Curran Associates, Inc., 2008. p. 156-163.

MOHAMMAD, M.; GAGNON, S.; DOUGLAS, B. K.; PODESTO, L. Introduction to cross laminated timber. **Wood Design Focus**, v. 22, n. 2, p. 3-12, 2012.

NIEMZ, P.; SONDEREGGER, W. Cross laminated timber - properties and use for building purposes: a review from the experience of swiss researchers. **Pro Ligno**, v. 9, n. 1, p. 3 - 21, 2013.

PAGANO, N. J. Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates. **Journal of Composite Materials**, v.4, p.20-34, 1970

PEREIRA, M. C. de M.; CALIL JUNIOR, C. Strength and Stiffness of Cross Laminated Timber (CLT) panels produced with Pinus and Eucalyptus: experimental and analytical comparisons. **Revista Matéria**, v. 24, n. 2, 2019.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de Madeira**. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2003.

REDDY, J. N. **Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2004.

REDDY, J. N. **Theory and Analysis of Elastic Plates and Shells**. 2. ed. Boca Raton: CRC Press, 2007.

RITTER, M. A. **Timber bridges: Design, Construction, Inspection and Maintenance**. United States Department of Agriculture - Forest Service, 1990.

ROCHA, A. M. da. **Novo curso prático de concreto armado**. 14. ed. Rio de Janeiro: Editora Científica, 1972. v. 1.

SORIANO, H. L. **Estática das Estruturas**. 3. ed. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2013.

STAUDER, C. **Cross-Laminated Timber**: An analysis of the Austrian industry and ideas for fostering its development in America. [S. l.]: Fachhochschule Salzburg: University of Applied Sciences, 2013.

STÜRZENBECHER, R.; HOFSTETTER, K.; EBERHARDSTEINER, J. Structural design of Cross Laminated Timber (CLT) by advanced plate theories. **Composites Science and Technology**, v. 70, p. 1368–1379, 24 abr. 2010.

TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Mecânica dos sólidos**. Rio de Janeiro: LTC - Livros Técnicos e Científicos, 1994. v. 1.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. **Theory of Elasticity**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1951.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**. 2. ed. New York: McGraw-Hill, 1959.

URIARTT, A. A. A madeira como material de construção. In: BAUER, L. A. F. **Materiais de Construção**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1994. v. 2, cap. 17, p. 437-525.

VELLA, R.; HEITZMANN, M. T.; REDMAN, A. Improving the Adhesion of High-Density Softwoods with Isocyanate Based Adhesives through Surface Incision. **BioResources**, [S. l.], v. 14, n. 4, p. 7751-7762, 2019.

VILGUTS, A.; SERDJUKS, D.; PAKRASTINS, L. Design Methods of Elements from Cross-Laminated Timber Subjected to Flexure. **Procedia Engineering**, v. 117, p. 10 - 19, 2015.

VILLAÇA, S. F.; GARCIA, L. F. T. **Introdução à Teoria da Elasticidade**. 3. ed. Rio de Janeiro: COPPE/UFRJ, 1998.

WAUGH THISTLETON ARCHITECTS. **100 UK CLT Projects**. Canada: Softwood Lumber Board & Forestry Innovation Investment, 2018.

APÊNDICE A – MODELO DE TABELA DO EXCEL PARA A TEORIA CLÁSSICA DE PLACAS

Neste apêndice, está apresentada a tabela desenvolvida no *software* EXCEL para o cômputos dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento por meio da teoria clássica de placas. As Figuras A.1, A.2 e A.3 ilustram três partes da tabela desenvolvida, sendo a primeira referente aos dados de entrada do problema, a segunda aos dados de saída dos deslocamentos verticais e das tensões no plano da placa e a terceira aos dados de saída das tensões transversais de cisalhamento.

Figura A.1 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas CPT (parte 1)

DADOS DE ENTRADA			
D11		TENSÕES NORMAIS σ_{xx} e σ_{yy}	
D12			
D22			
D66			
D12			
$\bar{Q}_{11}$		TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy}	
$\bar{Q}_{12}$			
$\bar{Q}_{22}$			
$\bar{Q}_{66}$			
a (mm)		TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xz}	
b (mm)			
h (mm)			
s = b/a			
qo (N/mm ²)		TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{yz}	
z (mm)			
z _k (mm)			
		x (mm)	
		y (mm)	
		z (mm)	

Fonte: Printscreen do *software* EXCEL

Figura A.2 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas CPT (parte 2)

						TENSÕES NORMAIS σ_{xx} e σ_{yy} E DESLOCAMENTO w					TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy}		
	m	n	q _{mn}	d _{mn}	W _{mn}	sen(m π x/a)	sen(n π y/b)	w0	σ_x	σ_y	cos(m π x/a)	cos(n π y/b)	τ_{xy}
	1	1											
	1	3											
	1	5											
	1	7											
	1	9											
	1	11											
	1	13											
	1	15											
	1	17											
	1	19											

Fonte: *Printscreen do software EXCEL*

Figura A.3 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas CPT (parte 3)

					TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xz}			TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{yz}		
T12	T13	z _k	$\chi(z)$	$Y(z)$	cos(m π x/a)	sen(n π y/b)	τ_{xz}	sen(m π x/a)	cos(n π y/b)	τ_{yz}

Fonte: *Printscreen do software EXCEL*

Deve ser observado que, nas Figuras A.2 e A.3, encontra-se fixado o valor de m, sendo este igual a 1, enquanto que os valores de n variam dentro da faixa de valores considerada para os cálculos. Tabelas similares devem ser desenvolvidas para os demais valores de m, de modo que o valor final de cada uma das grandezas seja dado pela soma de todos os valores individualmente obtidos para cada para (m,n).

APÊNDICE B – MODELO DE TABELA DO EXCEL PARA A TEORIA DE DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO DE PRIMEIRA ORDEM

Este apêndice reúne ilustrações da tabela desenvolvida no software EXCEL para o cálculo dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento por meio da teoria de deformação de cisalhamento de primeira ordem. Mais precisamente, as Figuras B.1, B.2 e B.3 ilustram três partes da tabela desenvolvida, sendo a primeira referente aos dados de entrada do problema, a segunda aos dados de saída de alguns parâmetros auxiliares e a terceira aos dados de saída dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento.

Figura B.1 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas FSDT (parte 1)

DADOS DE ENTRADA			
D11		TENSÕES NORMAIS	
D12		σ_{xx} e σ_{yy}	
D22		x (m)	
D66		y (m)	
D12		z (m)	
A44		TENSÃO DE	
A55		CISALHAMENTO τ_{xy}	
		x (m)	
$\bar{Q}_{11}$		y (m)	
$\bar{Q}_{12}$		z (m)	
$\bar{Q}_{22}$			
$\bar{Q}_{66}$		TENSÃO DE	
$\bar{Q}_{44}$		CISALHAMENTO τ_{xz}	
$\bar{Q}_{55}$		x (m)	
		y (m)	
a (mm)		z (m)	
b (mm)			
h (mm)		TENSÃO DE	
s = b/a		CISALHAMENTO τ_{yz}	
		x (m)	
qo (N/mm ²)		y (m)	
		z (m)	
Ks			

Fonte: Printscreen do software EXCEL

APÊNDICE C – MODELO DE TABELA DO EXCEL PARA A TEORIA DE DEFORMAÇÃO DE CISALHAMENTO DE TERCEIRA ORDEM

Neste apêndice, encontram-se as ilustrações da tabela elaborada no *software* EXCEL para o cálculo dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento por meio da teoria de deformação de cisalhamento de terceira ordem. Nomeadamente, as Figuras C.1, C.2, C.3 e C.4 ilustram quatro partes da referida tabela, sendo a primeira referente aos dados de entrada do problema, a segunda e a terceira aos dados de saída de alguns parâmetros auxiliares e a quarta aos dados de saída dos deslocamentos verticais e das tensões normais e de cisalhamento.

Figura C.1 – Tabela do EXCEL para a teoria de placas TSDT (parte 1)

DADOS DE ENTRADA			
$\bar{Q}_{11}$		TENSÕES NORMAIS σ_{xx} e σ_{yy}	
$\bar{Q}_{12}$			
$\bar{Q}_{22}$			
$\bar{Q}_{66}$			
$\bar{Q}_{44}$			
$\bar{Q}_{55}$			
		TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xy}	
a (mm)			
b (mm)			
h (mm)			
s = b/a		TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{xz}	
qo (N/mm ²)			
$\bar{A}_{44}$			
$\bar{A}_{55}$			
H ₁₁		TENSÃO DE CISALHAMENTO τ_{yz}	
H ₁₂			
H ₂₂			
H ₆₆			
$\bar{F}_{11}$			
$\bar{F}_{12}$			
$\bar{F}_{22}$			
$\bar{F}_{66}$			
$\bar{D}_{11}$			
$\bar{D}_{12}$			
$\bar{D}_{22}$			
$\bar{D}_{66}$			
c ₁ (mm ⁻²)			
c ₂ (mm ⁻²)			

Fonte: *Printscreen* do *software* EXCEL

