

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL

AUGUSTO OTA POLIDORIO

**ANÁLISE NUMÉRICA DAS PRESSÕES INTERNAS EM
SILOS METÁLICOS CILÍNDRICOS DE FUNDO PLANO
PARA ARMAZENAMENTO DE GRÃOS**

MARINGÁ
2026

AUGUSTO OTA POLIDORIO

**ANÁLISE NUMÉRICA DAS PRESSÕES INTERNAS EM SILOS
METÁLICOS CILÍNDRICOS DE FUNDO PLANO PARA
ARMAZENAMENTO DE GRÃOS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientadora: Prof^ª. Dra. Gisele Cristina Antunes Martins

Coorientador: Prof. Dr. Fabio Martin Rocha

MARINGÁ
2026

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central Maria Grazia Zolet - UEM, Maringá - PR, Brasil)

P766a	Polidorio, Augusto Ota Análise numérica das pressões internas em silos metálicos cilíndricos de fundo plano para armazenamento de grãos / Augusto Ota Polidorio. -- Maringá, PR, 2026. 152 f. : il. color., figs., tabs. Orientadora: Profa. Dra. Gisele Cristina Antunes Martins. Coorientador: Prof. Dr. Fabio Martin Rocha. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2026. 1. Estrutura metálica. 2. Silos. 3. Análise estrutural (Engenharia). 4. Método dos elementos finitos. 5. Análise numérica. I. Martins, Gisele Cristina Antunes, orient. II. Rocha, Fabio Martin, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título. CDD 23.ed. 624.17
-------	--

AUGUSTO OTA POLIDORIO

ANÁLISE NUMÉRICA DAS PRESSÕES INTERNAS EM SILOS METÁLICOS CILÍNDRICOS DE FUNDO PLANO PARA ARMAZENAMENTO DE GRÃOS

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 21/07/2026, julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

BANCA EXAMINADORA



Documento assinado digitalmente

GISELE CRISTINA ANTUNES MARTINS

Data: 21/07/2026 15:01:28-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Profa. Dra. Gisele Cristina Antunes Martins
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Professora Orientadora



Documento assinado digitalmente

FABIO MARTIN ROCHA

Data: 21/07/2026 14:54:04-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Fabio Martin Rocha
Curso de Graduação em Engenharia Civil
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Professor Coorientador



Documento assinado digitalmente

FELIPE PIANA VENDRAMELL FERREIRA

Data: 21/07/2026 14:12:34-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Felipe Piana Vendramell Ferreira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá



Documento assinado digitalmente

ANDRES BATISTA CHEUNG

Data: 21/07/2026 12:32:45-0300

Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Andrés Batista Cheung
Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul

*Aos meus pais, Airton e Luisa, e ao meu
irmão, Daniel.*

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, Airton e Luisa, por todo o amor, apoio e incentivo que recebi ao longo de toda a minha vida. Por serem a base da educação e dos valores que carrego comigo. Por compreenderem minha ausência e meus momentos de cansaço e mau humor durante esta caminhada. O apoio de vocês foi essencial para que eu enfrentasse os desafios desta pesquisa. Sem vocês, nada disso seria possível.

Ao meu irmão, Daniel, por ser muito mais do que um irmão, por ser meu melhor amigo. Obrigado pelo apoio constante, pelo incentivo, pelas conversas, pelos momentos de descontração e por sempre acreditar em mim, fazendo-se presente mesmo à distância. Você é uma das pessoas mais importantes da minha vida, e muito do que sou hoje devo ao seu exemplo e à sua amizade.

À minha orientadora, Profa. Dra. Gisele Cristina Antunes Martins, e ao meu coorientador, Prof. Dr. Fabio Martin Rocha, que não mediram esforços para me auxiliar no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço pela confiança depositada em mim, pela paciência, pelos valiosos ensinamentos, pelo suporte, pelo incentivo e pelos apontamentos e correções, que certamente contribuíram para elevar a qualidade desta dissertação. Vocês contribuíram diretamente para o meu crescimento como pesquisador e como pessoa. Sempre me lembrarei, com gratidão e carinho, da oportunidade de ter sido orientado por vocês.

Aos meus amigos e parceiros de todas as horas, Fabio, Gabriel, Matheus Sanches, Matheus Pará, Natália, Olímpio e ao meu primo Paulinho, por terem compartilhado comigo essa trajetória. Obrigado pela amizade, pelo companheirismo e pelos inúmeros momentos que tornaram essa caminhada mais leve. Vocês foram fundamentais para que eu chegasse até aqui.

Aos meus amigos do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Guilherme, Gustavo, Julia, Pâmela, Paulo, Silvio e Thiago, pelas discussões acadêmicas, pela parceria e, principalmente, pelos momentos de descontração e confraternização que tornaram essa jornada muito mais leve.

À minha amiga Mariana, por sua amizade, por estar presente nos momentos em que mais precisei, pelas conversas, pelas deliciosas comidas, pelas risadas e por tornar essa caminhada mais leve. Agradeço também pelas contribuições prestadas ao desenvolvimento desta pesquisa e pelo carinho, companheirismo e apoio ao longo dessa caminhada.

À banca examinadora, Prof. Dr. Andrés Batista Cheung e Prof. Dr. Felipe Piana Vendramell Ferreira, pelas valiosas contribuições apresentadas na etapa de qualificação e defesa que certamente contribuíram para o aprimoramento desta dissertação.

Aos professores e funcionários do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá (UEM), pelo apoio, dedicação e contribuição para minha formação acadêmica e profissional.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001 – e da Secretaria de Estado da Ciência, Tecnologia e Ensino Superior do Paraná (SETI), instituições às quais registro meus agradecimentos pelo apoio concedido.

Por fim, agradeço a todos que, direta ou indiretamente, fizeram parte desta caminhada e contribuíram para a realização deste trabalho.

"Preocupado com uma única folha, você não verá a árvore. Preocupado com uma única árvore, você não perceberá toda a floresta."
— Monge Takuan, *Vagabond*

RESUMO

Os silos metálicos cilíndricos de fundo plano são amplamente utilizados para o armazenamento de produtos granulares, sendo as pressões exercidas pelo produto armazenado um dos principais fatores considerados no dimensionamento estrutural dessas construções. Este trabalho teve como objetivo avaliar, por meio de modelagem computacional baseada no Método dos Elementos Finitos, a influência da geometria de silos metálicos cilíndricos de fundo plano e das propriedades dos produtos armazenados na magnitude e na distribuição das pressões horizontais internas atuantes em suas paredes. Para isso, desenvolveu-se um modelo numérico elastoplástico no *software* Abaqus, calibrado com base em dados experimentais. A partir desse modelo, foram realizadas análises paramétricas considerando a variação da altura e do diâmetro do silo, bem como do tipo de produto armazenado. Os resultados numéricos foram comparados com a teoria clássica de Janssen, enquanto os resultados experimentais foram comparados tanto com essa formulação quanto com normas internacionais de dimensionamento. Os resultados demonstraram que o modelo numérico reproduziu satisfatoriamente a magnitude e a distribuição das pressões horizontais, apresentando boa concordância com os resultados experimentais e com a teoria de Janssen, especialmente na região estruturalmente mais crítica do silo. O estudo de sensibilidade evidenciou que o coeficiente de Poisson foi o parâmetro de maior influência nas pressões horizontais, enquanto as análises paramétricas mostraram que a altura do silo exerce influência mais pronunciada que o diâmetro, embora este também seja relevante em silos esbeltos. Verificou-se, ainda, que o peso específico do produto armazenado, quando considerado isoladamente, não é suficiente para explicar a magnitude das pressões horizontais, sendo necessária a consideração conjunta de outras propriedades do produto. Entre as metodologias analíticas avaliadas, a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) apresentou o menor erro relativo médio em relação aos resultados experimentais, contudo, subestimou as pressões na metade inferior do silo, região mais crítica para o dimensionamento estrutural. Conclui-se que a modelagem numérica baseada no Método dos Elementos Finitos constitui uma ferramenta complementar robusta e confiável para a análise de pressões em silos metálicos de fundo plano, reforçando a necessidade de adequada definição da geometria do silo e caracterização das propriedades do produto armazenado para o dimensionamento estrutural.

Palavras-chave: Silos metálicos. Pressão Horizontal. Análise paramétrica. Método dos Elementos Finitos. Análise Numérica.

ABSTRACT

Cylindrical flat-bottomed steel silos are widely used for storing granular products, with the pressures exerted by the stored product being one of the main factors considered in the structural design of these structures. This study aimed to evaluate, through computational modeling based on the Finite Element Method, the influence of the geometry of cylindrical flat-bottomed steel silos and the properties of stored products on the magnitude and distribution of the horizontal internal pressures acting on their walls. For this purpose, an elastoplastic numerical model was developed in the Abaqus software, calibrated based on experimental data. Based on this model, parametric analyses were carried out considering variations in silo height and diameter, as well as in the type of stored product. The numerical results were compared with Janssen's classical theory, while the experimental results were compared both with this formulation and with international design standards. The results showed that the numerical model satisfactorily reproduced the magnitude and distribution of horizontal pressures, presenting good agreement with the experimental results and with Janssen's theory, especially in the structurally most critical region of the silo. The sensitivity study revealed that Poisson's ratio was the parameter with the greatest influence on horizontal pressures, while the parametric analyses showed that silo height has a more pronounced influence than diameter, although the latter is also relevant in slender silos. It was also found that the unit weight of the stored product, when considered in isolation, is not sufficient to explain the magnitude of horizontal pressures, requiring the joint consideration of other product properties. Among the analytical methodologies evaluated, ANSI/ASAE EP433.1 (2024) presented the lowest mean relative error in relation to the experimental results, however, it underestimated the pressures in the lower half of the silo, the region most critical for structural design. It is concluded that numerical modeling based on the Finite Element Method constitutes a robust and reliable complementary tool for the analysis of pressures in flat-bottomed steel silos, reinforcing the need for adequate definition of silo geometry and characterization of stored product properties for structural design.

Keywords: Steel silos. Lateral pressure. Parametric analysis. Finite Element Method. Numerical analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 - Célula de cisalhamento de Jenike	26
Figura 2.2 - Ângulo de atrito interno e efetivo ângulo de atrito interno	28
Figura 2.3 - Ângulo de repouso	28
Figura 2.4 - Determinação do ângulo de atrito entre o produto da parede e o produto armazenado	29
Figura 2.5 - Gráfico da resistência ao cisalhamento do produto com a parede	30
Figura 2.6 - Função fluxo e função fluxo com o tempo	31
Figura 2.7 - Tensão que atua em um arco estável imaginário	32
Figura 2.8 - Pressões internas em um silo	33
Figura 2.9 - Equilíbrio estático de uma camada infinitesimal no produto ensilado	34
Figura 2.10 - Equilíbrio estático de uma camada infinitesimal no produto ensilado	37
Figura 2.11 - Geometria seção transversal dos silos: (a) circular, (b) quadrada, (c) retangular e (d) hexagonal	40
Figura 2.12 - Parâmetros geométricos do silo	41
Figura 2.13 – Pressões de estáticas em silos esbeltos em silos esbeltos e medianamente esbeltos/baixos	44
Figura 2.14 - Tipos de fluxo (a) de massa e (b) em tubo e (c) misto	48
Figura 2.15 - Determinação do tipo de fluxo pela ANSI/ASAE EP433.1 (2024)	49
Figura 2.16 - Determinação do tipo de fluxo pela AS 3774-1996	50
Figura 2.17 - Determinação do tipo de fluxo pela EN 1991-4 (2006)	50
Figura 2.18 – Envoltória de resistência de Mohr-Coulomb	51
Figura 2.19 - Critério de Mohr-Coulomb no plano desviador	52
Figura 2.20 - Critério de Drucker-Prager no plano desviador	53
Figura 2.21 - Envoltória de resistência de Drucker-Prager	53
Figura 2.22 - Modelagem de $\frac{1}{4}$ (a) paredes e fundo do silo; (b) grãos	55
Figura 2.23 - Elemento hexaédrico C3D8R	56
Figura 2.24 – Condições de contorno para $\frac{1}{4}$ do silo	57
Figura 2.25 - Localização das seções analisadas para medição da pressão horizontal na parede do silo (Lahlouh, 1995)	58
Figura 2.26 - Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico de paredes flexíveis para as seções (a) 1-1, (b) 2-2 e (c) 3-3	58

Figura 2.27 - Comparação das pressões horizontais obtidas pelo MEF e pela equação de Janssen (1895) para silo com paredes rígidas	59
Figura 2.28 - Elemento C3D8R com um ponto de integração	61
Figura 2.29 - Modelagem do silo Brown (2008)	62
Figura 2.30 – Distribuição da tensão vertical para diferentes coeficientes de atrito (a) 0,6, (b) 0,4 e (c) 0,3	63
Figura 2.31 - Distribuição da tensão vertical para diferentes ângulos de atrito (a) 39° (b) 41° (c) 48° e (d) 50°	64
Figura 2.32 - Geometria (a) da tremonha (b) do silo de fundo plano	65
Figura 2.33 - Malha (a) da tremonha (b) do silo de fundo plano	66
Figura 2.34 - Comparação entre os modelos constitutivos	68
Figura 2.35 - Esquema ensaio no silo-piloto	70
Figura 2.36 - Tipos de tremonha utilizadas no ensaio (a) Fundo plano, (b) Tremonha $\alpha = 45^\circ$ e (c) Tremonha $\alpha = 15^\circ$	71
Figura 3.1 - Fluxograma da metodologia	73
Figura 3.2 - Silo Modelo Exploratório I	75
Figura 3.3 - Malhas utilizadas na análise de sensibilidade ao refinamento da malha (a) 7 cm, (b) 14 cm, (c) 28 cm e (d) 55 cm	76
Figura 3.4 - Condições de contorno aplicadas ao Modelo Exploratório I	77
Figura 3.5 – Silo analisado	78
Figura 3.6 - Discretização da malha de 11 cm (a) Grãos e (b) Estrutura de aço (parede e fundo)	79
Figura 3.7 - Condições de contorno do Modelo Exploratório II	80
Figura 3.8 - Silo-piloto de fundo plano	81
Figura 3.9 – Estratégia de divisão do modelo para definição da malha	84
Figura 3.10 - Discretização da malha de 19 cm: (a) Grãos; e (b) Parede do Silo	85
Figura 3.11 - Condições de contorno do Modelo Inicial	86
Figura 3.12 - Configuração da modelagem dos silos comerciais	92
Figura 3.13 - Condições de contorno dos silos comerciais	93
Figura 4.1 - Tensões de von Mises do Modelo Exploratório I para os diferentes refinamentos de malha: (a) 7 cm; (b) 14 cm; (c) 28 cm; e (d) 55 cm, unidades em Pascal (Pa)	97
Figura 4.2 - Estudo de refinamento de malha do Modelo Exploratório I	98

Figura 4.3 – Tensões de von Mises na base do Modelo Exploratório I, unidades em Pascal (Pa)	100
Figura 4.4 – Deslocamentos do Modelo Exploratório I, unidades em metros (m)	101
Figura 4.5 – Pressão horizontal no interior do silo, unidades em Pascal (Pa)	102
Figura 4.6 - Avaliação comparativa da pressão pelo modelo numérico (MEF) e modelo teórico (Janssen)	103
Figura 4.7 - Distribuição das pressões horizontais ao longo da altura para diferentes valores de coeficiente de Poisson	105
Figura 4.8 - Distribuição das pressões horizontais ao longo da altura para diferentes valores de ângulo de dilatação	106
Figura 4.9 - Distribuição das pressões horizontais ao longo da altura para diferentes valores do módulo de elasticidade	107
Figura 4.10 - Influência do modelo constitutivo nas pressões horizontais	109
Figura 4.11 - Influência das diferentes estratégias de modelagem nas pressões horizontais	110
Figura 4.12 - Influência da discretização da malha na distribuição pressões das horizontais	112
Figura 4.13 - Distribuição das pressões horizontais na parede do silo: (a) Modelo IV; (b) Modelo V; e (c) Modelo VI, unidades em Pascal (Pa)	113
Figura 4.14 - Análise comparativa entre o uso do efetivo ângulo de atrito interno e do ϕ ângulo de atrito interno na modelagem numérica	115
Figura 4.15 - Pressão horizontal distribuída ao longo da altura do silo: comparação entre resultados experimentais, analíticos e numéricos	117
Figura 4.16 - Influência do diâmetro na distribuição das pressões horizontais no silo-piloto	120
Figura 4.17 - Influência da altura na distribuição das pressões horizontais no silo-piloto	122
Figura 4.18 – Influência do tipo de produtos armazenado na distribuição das pressões horizontais	124
Figura 4.19 - Comparação das pressões horizontais obtidas pelo MEF e pela Teoria de Janssen para o trigo	126
Figura 4.20 - Comparação entre as curvas de pressão horizontal dos diferentes tipos de milho	127
Figura 4.21 – Comparação entre o uso do ângulo de atrito interno (ϕ_i) e do efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e) nas pressões horizontais	129
Figura 4.22 – Comparação entre os resultados dos modelos analíticos e experimentais	132

Figura 4.23 - Comparação entre os resultados experimentais e as metodologias analíticas com aplicação das combinações de carregamento	136
Figura 4.24 - Comparação das estratégias de modelagem entre o silo-piloto e os silos comerciais	140
Figura 4.25 - Influência do diâmetro na distribuição das pressões horizontais em silos comerciais	142
Figura 4.26 - Variação percentual das pressões em função do aumento do diâmetro em relação ao silo D13,0	143
Figura 4.27 - Influência da altura na distribuição das pressões horizontais em silos comerciais	144
Figura 4.28 - Variação porcentual das pressões em função do aumento da altura em relação ao silo H12,13	145

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 - Análise da fluidez com base na função fluxo	31
Tabela 2.2 - Fatores de sobrepressão e propriedades do produto armazenado	39
Tabela 2.3 – Classificação dos silos quanto ao risco	41
Tabela 2.4 - Valores das propriedades dos produtos para cálculo das pressões	42
Tabela 2.5 - Classificação dos silos quanto à esbeltez segundo a EN 1991-4 (2006)	42
Tabela 2.6 - Classificação dos silos quanto à esbeltez segundo a AS 3774 (1996)	46
Tabela 2.7 - Valores apropriados das propriedades dos produtos	46
Tabela 2.8 – Propriedades do produto granular do modelo de Yang et al. (2011)	67
Tabela 2.9 - Análise da fluidez com base na função fluxo	71
Tabela 2.10 - Propriedades dos produtos obtidas por meio do ensaio de cisalhamento direto	72
Tabela 3.1 - Propriedades do aço aplicadas no Modelo Exploratório II	78
Tabela 3.2 - Propriedades do milho aplicadas para o Modelo Exploratório II	78
Tabela 3.3 - Parâmetros adotados para o critério de Drucker-Prager	79
Tabela 3.4 - Propriedades da soja obtidas por meio do ensaio de cisalhamento direto	82
Tabela 3.5 – Propriedades do aço silo aplicados ao Modelo Inicial	82
Tabela 3.6 - Propriedades da soja aplicados ao Modelo Inicial	83
Tabela 3.7 - Parâmetros adotados para o critério de Drucker-Prager	83
Tabela 3.8 - Dimensões geométricas e capacidade dos silos com altura constante	90
Tabela 3.9 - Dimensões geométricas e capacidade dos silos com diâmetro constante	90
Tabela 3.10 – Dimensões geométricas dos silos com altura constante	91
Tabela 3.11 - Geometria dos silos com diâmetro fixo	91
Tabela 3.12 - Propriedades dos grãos da análise paramétrica	94
Tabela 3.13 - Correlação entre os modelos numéricos e os respectivos modelos analíticos e produtos armazenados	95
Tabela 4.1 - Resultados da análise de sensibilidade ao refinamento da malha	97
Tabela 4.2 - Estratégias de modelagem avaliadas e respectivos tempos de processamento	110
Tabela 4.3 - Configurações de discretização de malha e respectivos tempos de processamento	112
Tabela 4.4 - Parâmetros adotados para a calibração final do modelo numérico	116
Tabela 4.5 - Avaliação dos erros relativos do modelo numérico e da formulação de Janssen (1895) em relação aos dados experimentais de Cheung (2007)	118
Tabela 4.6 - Dimensões geométricas dos silos avaliados na análise paramétrica	120

Tabela 4.7 – Propriedades dos produtos consideradas na análise paramétrica	123
Tabela 4.8 - Equações e valores adotados do parâmetro K nos modelos analíticos	131
Tabela 4.9 - Pressões experimentais e analíticas (sem combinações mais desfavoráveis)	133
Tabela 4.10 - Erros relativos dos modelos analíticos em relação aos resultados experimentais (sem aplicação das combinações de carregamento)	134
Tabela 4.11 - Combinações mais desfavoráveis para o cálculo das pressões horizontais	135
Tabela 4.12 - Pressões experimentais e analíticas (com combinações de carregamentos)	137
Tabela 4.13 - Erros relativos das metodologias analíticas em relação aos resultados experimentais (com aplicação das combinações de carregamento previstas pelas normas).	138
Tabela 4.14 - Dimensões geométricas dos silos comerciais avaliados na análise paramétrica	141

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 - Configurações das estratégias de modelagem analisadas	88
Quadro 3.2 - Estratégia de malhas analisadas	89
Quadro 4.1 - Parâmetros considerados pelos modelos analíticos no cálculo das pressões horizontais	130

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área
α	Ângulo de inclinação das paredes da tremonha
β	Ângulo de atrito interno
c	Coesão
c_z	função da profundidade de Janssen
d	Coesão
d_c	Diâmetro inscrito
$d_{\text{máx}}$	Diâmetro máximo
$d_{\text{mín}}$	Diâmetro mínimo
E	Módulo de Elasticidade
e_o	Excentricidade do orifício de descarga
e_t	Excentricidade de enchimento no topo da superfície
f_c	Deslizamento da amostra confinada
ϕ_e	Efetivo ângulo de atrito interno
ff	Fator fluxo da tremonha
FF	Função fluxo instantânea
ϕ_i	Ângulo de atrito interno
f_{ic}	Resistência ao deslizamento da amostra inconfinada
ϕ_{im}	valor médio do ângulo de atrito interno
ϕ_r	Ângulo de repouso do produto
ϕ_w	Ângulo de atrito do produto com a parede
f_y	Tensão de escoamento do aço
γ	Peso específico
g	Aceleração da gravidade
h_o	Distância entre a superfície equivalente e o ponto mais alto de contato entre a parede e o produto armazenado
I_1	Primeiro invariante de tensões
J_2	Segundo invariante desviador
K	Relação entre a pressão vertical e horizontal
μ_w	Coefficiente de atrito
ν	Coefficiente de Poisson
p	Tensão hidrostática
p_h	Pressão horizontal
p_v	Pressão vertical
p_w	Pressão de atrito
q	Tensão equivalente de Von Mises
r	Raio do silo

r_c	Dimensão característica da seção transversal do silo
R_h	Raio hidráulico
σ_l	Tensão principal de consolidação máxima
σ_c	Arco estável imaginário
σ_{ic}	Tensão inconfínada de ruptura
σ_{ij}	Tensor de Cauchy
σ_{ji}	Tensor de Cauchy transposto
U	Perímetro lateral
ψ	Ângulo de dilatância
z	Altura relativa do silo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	22
1.1	JUSTIFICATIVA	23
1.2	OBJETIVO	24
1.2.1	Objetivo Geral	24
1.2.2	Objetivos Específicos	24
2	REVISÃO DE LITERATURA	25
2.1	PROPRIEDADES DOS GRÃOS	25
2.1.1	Granulometria ($d_{máx}$ e $d_{mín}$)	27
2.1.2	Ângulo de atrito interno (ϕ_i) e efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e)	27
2.1.3	Ângulo de repouso do produto (ϕ_r)	28
2.1.4	Ângulo de atrito entre o produto armazenado e o material da parede (ϕ_w)	29
2.1.5	Função fluxo instantânea e com o tempo de consolidação (FF)	30
2.1.6	Fator fluxo da tremonha (ff)	31
2.2	PRESSÃO NO INTERIOR DO SILO	32
2.2.1	Teoria de Janssen (1895)	34
2.2.2	Teoria de Walker (1966)	35
2.2.3	Teoria de Reimbert (1979)	37
2.2.4	<i>American National Standards Institute - ANSI/ASAE EP433.1 (2024)</i>	38
2.2.5	<i>European Committee of Standardization - EN 1991-4 (2006)</i>	40
2.2.6	<i>Australian Standard – AS 3774 (1996)</i>	45
2.3	TIPOS DE FLUXO	47
2.4	MODELO CONSTITUTIVO	51
2.4.1	Critério de Mohr-Coulomb	51
2.4.2	Critério de Drucker-Prager	52
2.5	ESTADO DA ARTE	54
2.5.1	Hilal <i>et al.</i> (2022)	54
2.5.2	Brown (2008)	60
2.5.3	Yang <i>et al.</i> (2011)	64
2.5.4	Cheung (2007)	68
3	METODOLOGIA	73
3.1	SIMULAÇÕES EXPLORATÓRIAS	74

3.1.1	Modelo Exploratório I	74
3.1.2	Modelo Exploratório II	77
3.2	CALIBRAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO	81
3.2.1	Dados Experimentais	81
3.2.2	Estratégia de modelagem do Modelo Inicial	82
3.2.3	Estudo de sensibilidade de parâmetros	87
3.2.4	Escolha do modelo constitutivo	87
3.2.5	Análise Comparativa das Estratégias de Modelagem	87
3.2.6	Estudo de malha	88
3.3	ANÁLISE PARAMÉTRICA	89
3.3.1	Propriedade Geométrica	89
3.3.2	Produto Granular	93
3.4	MODELOS ANALÍTICOS	94
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	96
4.1	SIMULAÇÕES EXPLORATÓRIAS	96
4.1.1	Modelo Exploratório I	96
4.1.2	Modelo Exploratório II	101
4.2	CALIBRAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO	103
4.2.1	Estudo de sensibilidade	104
4.2.2	Definição do modelo constitutivo	108
4.2.3	Análise Comparativa das Estratégias de Modelagem	109
4.2.4	Estudo de malha	111
4.2.5	Ângulo de atrito interno	114
4.2.6	Modelo numérico calibrado	115
4.3	ANÁLISES DESENVOLVIDAS NO SILO-PILOTO	119
4.3.1	Análise Paramétrica	119
4.3.2	Aplicação e comparação dos métodos analíticos para determinação das pressões horizontais	129
4.4	SILOS COMERCIAIS	139
4.4.1	Análise Paramétrica	140
5	CONCLUSÕES	147
5.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS	148
	REFERÊNCIAS	150

1 INTRODUÇÃO

Silos são estruturas destinadas ao armazenamento de produtos granulares ou pulverulentos a granel, desempenhando um papel fundamental em diversos setores da economia, especialmente na agroindústria, mineração, construção civil e indústrias de base (Palma, 2005; Zhang *et al.*, 2018).

Esse tipo de construção é de grande relevância para o Brasil, em razão do expressivo crescimento e consolidação do setor agropecuário na economia nacional. O país consolidou-se como um dos principais exportadores mundiais de *commodities* agrícolas e proteína animal, em especial o milho, a soja, o frango e as carnes bovinas e suínas (Dornelas, 2022; Rodrigues *et al.*, 2018). Dessa forma, os sistemas de armazenamento desempenham um papel fundamental no contexto brasileiro, especialmente no setor agropecuário. Além de contribuir para a conservação da qualidade dos produtos, esses sistemas proporcionam maior flexibilidade na comercialização, permitindo que o produtor armazene a produção e comercialize durante o período de entressafra quando, em geral, os preços são mais atrativos. Dessa forma, os sistemas de armazenamento garantem a continuidade do fornecimento e preservam a qualidade dos produtos ao longo do período de estocagem (Silva Neto; Santos, 2019).

Apesar da relevância econômica da agropecuária, a infraestrutura nacional de armazenagem não acompanhou o ritmo de crescimento da produção, sendo a produção muito maior que a capacidade de armazenamento dos produtos (Dornelas, 2022). Na safra 2025/26, o Brasil registrou uma produção de grãos de aproximadamente 358,6 milhões de toneladas, frente a uma capacidade estática de armazenamento de apenas 226,3 milhões de toneladas (CONAB, 2026). Esse cenário resultou em um déficit de aproximadamente 132,3 milhões de toneladas.

Portanto, no contexto brasileiro, em que a produção de grãos e a expansão do setor agroindustrial apresentam crescimento contínuo, evidencia-se a necessidade de elaboração de projetos e da construção de novos silos para atender à crescente demanda por armazenamento. Neste cenário, torna-se imprescindível o conhecimento da magnitude e das distribuições das pressões atuantes nas paredes e no fundo dos silos ao longo de todas as etapas de operação, a fim de garantir um dimensionamento estrutural seguro, econômico e eficiente.

Diante deste contexto, o dimensionamento estrutural de silos metálicos, no Brasil, é regulamentado pela ABNT NBR 17066 (2022), norma elaborada especificamente para o projeto dessas estruturas. Por se tratar de uma publicação recente, a norma representa um importante avanço para a normalização nacional nessa área. Entretanto, os estudos relacionados

às pressões exercidas pelos produtos armazenados em silos ainda demandam maior aprofundamento técnico e científico, o que justifica a comparação de suas prescrições com as normas internacionais amplamente consolidadas na literatura, como a norma americana ANSI/ASAE EP433.1 (2024), cuja aplicação é recomendada pela própria ABNT NBR 17066 (2022), além da norma europeia EN 1991-4 (2006) e da norma australiana AS 3774 (1996).

1.1 JUSTIFICATIVA

O estudo das pressões internas atuantes em silos é fundamental para garantir a estabilidade, a durabilidade e a viabilidade econômica dessas estruturas ao longo de sua vida útil. No entanto, os métodos de dimensionamento tradicionalmente empregados, fundamentados em formulações teóricas e abordagens normativas, ainda se baseiam em hipóteses simplificadas que nem sempre representam adequadamente o comportamento real das pressões durante as fases de carregamento, armazenamento e descarregamento. Essa limitação pode conduzir tanto ao subdimensionamento estrutural, comprometendo a segurança estrutural, quanto ao superdimensionamento, resultando em custos desnecessários de construção.

Nesse contexto, a aplicação de métodos numéricos, como o Método dos Elementos Finitos (MEF), constitui uma alternativa eficiente e economicamente viável para a análise das pressões em silos quando comparada à realização de estudos experimentais, que além de demandarem elevados recursos financeiros e tempo de execução, podem apresentar limitações práticas na simulação de todas as condições de interesse. Além disso, a modelagem computacional possibilita a investigação de diferentes cenários, por meio da variação da geometria do silo e das características dos produtos armazenados, cujas propriedades influenciam diretamente a magnitude e a distribuição das pressões exercidas sobre a estrutura.

Assim, este trabalho justifica-se pela necessidade de aprofundar o estudo das pressões internas em silos metálicos cilíndricos de fundo plano por meio da modelagem computacional, fornecendo subsídios técnicos e científicos para o aprimoramento dos métodos de dimensionamento estrutural e para o desenvolvimento de projetos mais seguros, econômicos e eficientes.

1.2 OBJETIVO

1.2.1 Objetivo Geral

O presente trabalho tem como objetivo geral avaliar, por meio de modelagem computacional, a magnitude e a distribuição das pressões horizontais de carregamento atuantes nas paredes de silos metálicos cilíndricos de fundo plano, ao longo de sua altura, submetidos às ações decorrentes do armazenamento de diferentes tipos de grãos. Citar que é na condição estática

1.2.2 Objetivos Específicos

Visando o objetivo geral, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Analisar pressões internas nas paredes de silos metálicos com o uso do *software* Abaqus versão 6.14;
- Investigar a influência da geometria do silo e das propriedades dos grãos na magnitude e na distribuição das pressões internas;
- Comparar os resultados numéricos e experimentais com a formulação teórica de Janssen (1895) e os resultados experimentais com as normas internacionais ANSI/ASAE EP433.1 (2024), EN 1991-4 (2006) e AS 3774 (1996), avaliando a correlação entre os diferentes métodos de determinação das pressões.

2 REVISÃO DE LITERATURA

Para o dimensionamento de silos é fundamental conhecer as propriedades físicas dos produtos a serem armazenados, uma vez que essas propriedades influenciam diretamente tanto o tipo de fluxo desenvolvido quanto a magnitude e distribuição das pressões atuantes na estrutura. Portanto, a revisão de literatura apresentada neste capítulo aborda os principais conceitos que fundamentam o estudo das pressões em silos, tais como as propriedades do produto granular necessárias para realizar um dimensionamento estrutural de silos, as teorias clássicas para o cálculo das pressões internas atuantes nessas estruturas e os tipos de fluxos que podem ocorrer durante o processo de descarga.

2.1 PROPRIEDADES DOS GRÃOS

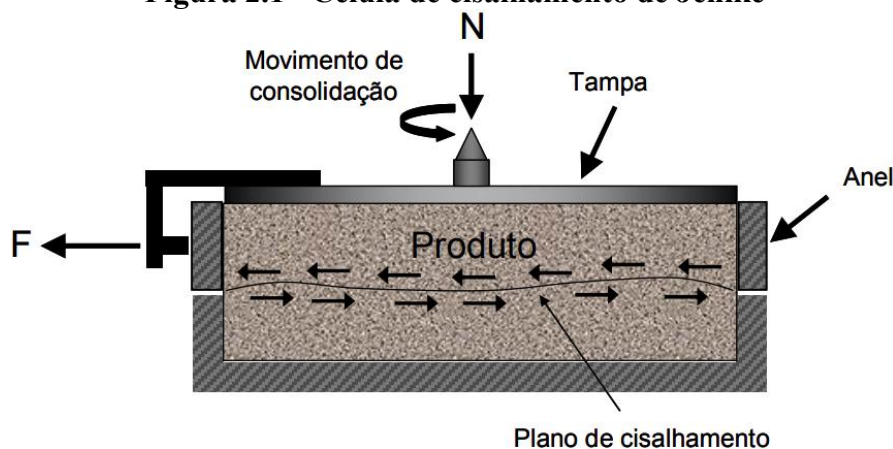
Para compreender as pressões que agem sobre as paredes internas de um silo e, assim, conhecer as suas solicitações, primeiro deve-se conhecer o tipo de produto que será armazenado e suas propriedades físicas, também chamadas de propriedades de fluxo. Tais propriedades devem ser determinadas devido sua influência no tipo de fluxo, pressões atuantes, geometria e rugosidade da parede da célula de armazenamento e na escolha do dispositivo de descarga (Gandia, 2022; Palma, 2005; Palma; Calil Junior, 2008).

Para a concepção de um projeto estrutural, primeiramente devem ser analisadas as propriedades físicas do produto armazenado e o tipo de fluxo associado a este produto (Palma; Calil Junior, 2008). Nesse contexto, o equipamento mais utilizado para determinar este fim é o ensaio de cisalhamento de translação utilizando o *Jenike Shear Cell* ou célula de cisalhamento de Jenike (Cheung, 2007). Este ensaio é baseado no ensaio de cisalhamento direto, sendo um dos métodos mais aceitos para caracterização do produto armazenado, sendo amplamente recomendado nas normas estrangeiras (Jenike, 1964; Cheung, 2007; Dornelas, 2022).

O aparelho de Jenike (Figura 2.1) é constituído por um anel inferior, um anel superior e uma tampa, sobre a qual é aplicada uma força normal (N), alinhada ao eixo da célula (Mata, 2026). Durante o ensaio, a parte superior da célula, anel superior e tampa, é deslocada horizontalmente em relação ao anel inferior, que permanece fixo, por meio de um sistema de avanço acionado por motor, o qual empurra um suporte fixado à tampa. A força necessária para provocar esse deslocamento, denominada força de cisalhamento (F), é medida por meio da haste de acionamento. Em decorrência do deslocamento relativo entre o anel superior/tampa e o anel

inferior, o produto ensaiado é submetido a uma deformação por cisalhamento, e as tensões normal (σ) e de cisalhamento (τ), atuantes no plano horizontal de contato entre os anéis, são determinadas pela razão entre as forças normal e de cisalhamento e a área da seção transversal da célula (Mata, 2026). O ensaio é repetido para diferentes valores de tensão normal, permitindo construir o lugar geométrico de ruptura (*yield locus*) do produto, a partir do qual são obtidos os parâmetros de resistência ao cisalhamento necessários para a caracterização das propriedades dos produtos armazenados.

Figura 2.1 - Célula de cisalhamento de Jenike



Fonte: Cheung (2007)

Além disso, é possível determinar também as tensões as quais os produtos, sejam eles coesivos ou não, estarão sujeitos durante o armazenamento (Dornelas, 2022).

As propriedades de fluxo a serem determinadas em laboratório são as seguintes:

- Peso específico (γ);
- Granulometria ($d_{m\acute{a}x}$ e $d_{m\acute{i}n}$);
- Ângulo de atrito interno (ϕ_i);
- Ângulo de repouso do produto (ϕ_r);
- Efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e);
- Ângulo de atrito entre o produto armazenado e o material da parede (ϕ_w);
- Função fluxo instantânea e com o tempo de consolidação (FF);
- Fator fluxo da tremonha (ff);

As principais propriedades serão detalhadas nas seções a seguir.

2.1.1 Granulometria ($d_{m\acute{a}x}$ e $d_{m\acute{i}n}$)

A granulometria está relacionada à distribuição dos tamanhos das partículas de um determinado produto granular. A análise granulométrica consiste em verificar e quantificar a variação dos diâmetros dos grãos que compõem um produto e, assim, determinar os diâmetros máximos ($d_{m\acute{a}x}$) e mínimos ($d_{m\acute{i}n}$) de uma amostra.

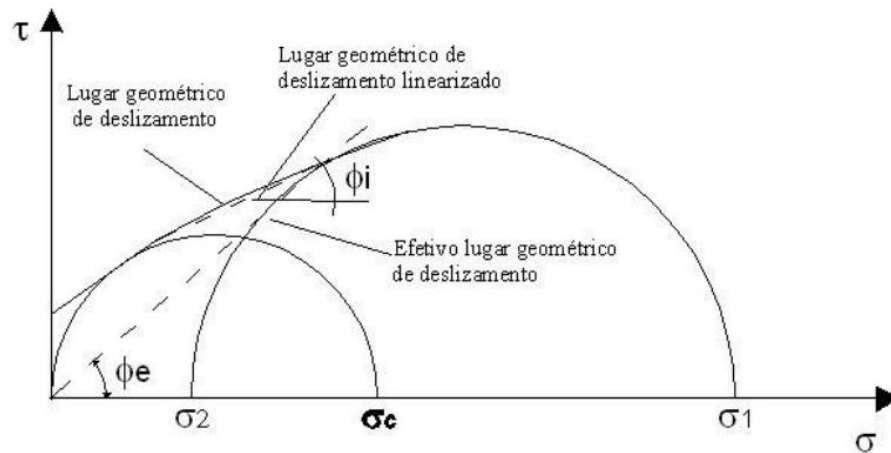
Segundo Jenike (1964), a importância da análise granulométrica para a avaliação de pressões em silos está relacionada com a fluidez do produto granular. O autor afirma que a fluidez de um sólido é determinada pelas propriedades de fluxo da fração fina do produto. Em contrapartida, as partículas de maior tamanho e massa impactam no descarregamento do produto, tendendo a provocar agrupamentos na saída do silo, o que pode causar uma compactação adicional do produto ao longo do caminho de queda, alterando a distribuição de pressões internas e influenciando a eficiência do fluxo.

2.1.2 Ângulo de atrito interno (ϕ_i) e efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e)

O ângulo de atrito interno representa a capacidade de um material de resistir ao deslizamento interno entre suas partículas quando sujeito a uma carga. É definido como sendo o ângulo formado entre a reta tangente à envoltória de resistência de Mohr-Coulomb e a reta horizontal paralela ao eixo das abscissas no gráfico da tensão de cisalhamento em função da tensão normal (Figura 2.2). Em termos físicos, este ângulo corresponde à inclinação dessa envoltória, de modo que, quanto maior o seu valor, maior a tensão de cisalhamento necessária para promover a ruptura para um dado nível de tensão normal.

O efetivo ângulo de atrito interno é obtido de maneira semelhante ao ângulo de atrito interno, sendo o ângulo formado pela linha tangente à maior envoltória de resistência de Mohr-Coulomb (Figura 2.2), que descreve o estado de fluxo estável do produto, interceptando o eixo horizontal na origem (Teixeira, 2006).

Figura 2.2 - Ângulo de atrito interno e efetivo ângulo de atrito interno

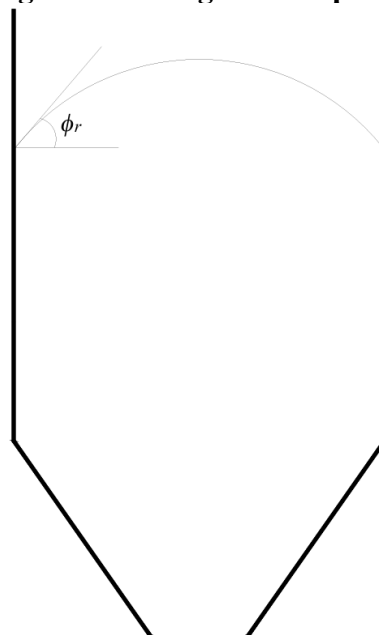


Fonte: Teixeira (2006)

2.1.3 Ângulo de repouso do produto (ϕ_r)

O ângulo de repouso está associado com a inclinação da superfície livre do produto acumulado em relação a horizontal (Figura 2.3). Quando um sólido granular não compactado é depositado de maneira lenta e uniforme sobre uma superfície horizontal formando uma pilha, o ângulo de repouso é dado pela sua inclinação, comumente assumindo valores entre 30° e 40° (Jenike, 1964).

Figura 2.3 - Ângulo de repouso

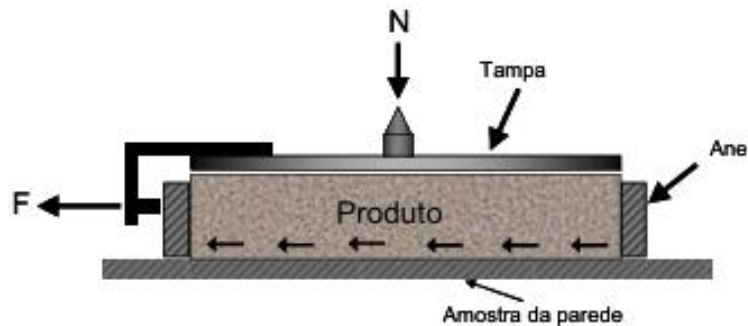


Fonte: Adaptado de Cheung (2007)

2.1.4 Ângulo de atrito entre o produto armazenado e o material da parede (ϕ_w)

As pressões internas em um silo geradas a partir do fluxo do produto armazenado são dependentes de um coeficiente de atrito (μ_w) entre a superfície da parede e o sólido (Cheung, 2007). Este parâmetro também é possível obter pelo ensaio de cisalhamento direto utilizando a célula de cisalhamento de Jenike substituindo a base da célula por uma amostra da parede do silo (Figura 2.4).

Figura 2.4 - Determinação do ângulo de atrito entre o produto da parede e o produto armazenado

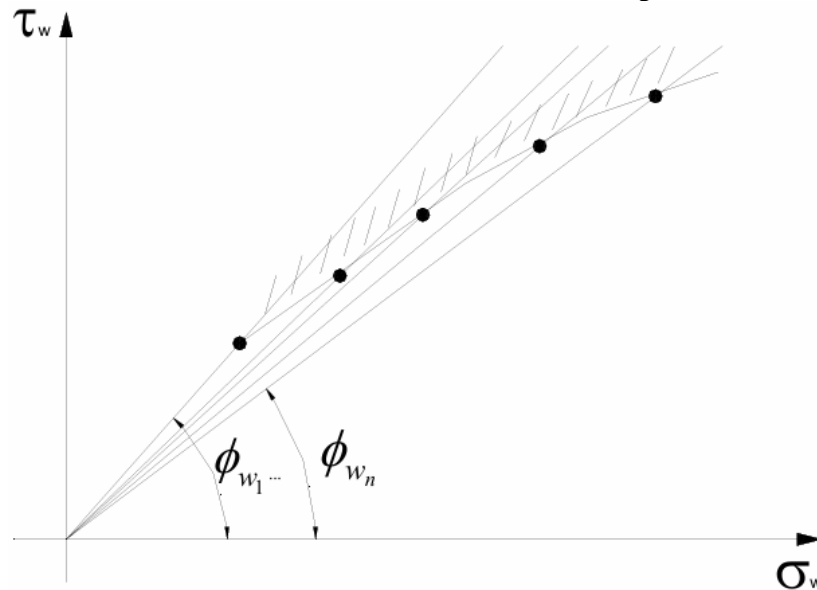


Fonte: Cheung (2007)

O ângulo de atrito entre o produto armazenado e o material da parede representa a resistência ao cisalhamento do produto com a parede, podendo ser calculado a partir dos resultados deste ensaio plotados em um gráfico da tensão de cisalhamento em função da tensão normal. O ângulo é obtido por meio da inclinação da reta que conecta os pontos medidos (Figura 2.5), podendo ser determinado pela Equação 2.1.

$$\phi_w = \arctg\left(\frac{\tau_w}{\sigma_w}\right) \quad (2.1)$$

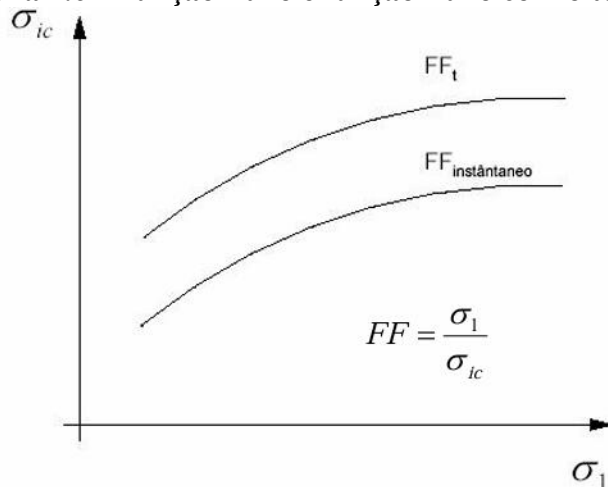
Figura 2.5 - Gráfico da resistência ao cisalhamento do produto com a parede



Fonte: Cheung (2007)

2.1.5 Função fluxo instantânea e com o tempo de consolidação (FF)

A função fluxo (FF) é um parâmetro que auxilia a avaliar a capacidade do produto armazenado de fluir. Ela pode ser obtida dividindo-se a tensão principal de consolidação máxima (σ_1) e a tensão inconfínada de ruptura (σ_{ic}). Para um projeto de silos, a função fluxo tem como objetivo quantificar numericamente a fluidez do produto armazenado. Além disso, é importante determinar a função fluxo com o tempo (FF_t), pois mostra como a fluidez do produto pode mudar ao longo do tempo, permitindo prever e prevenir possíveis problemas de fluxo que poderiam comprometer a operação do silo. A Figura 2.6 ilustra as duas curvas de função fluxo (Nascimento, 2008).

Figura 2.6 - Função fluxo e função fluxo com o tempo

Fonte: Nascimento (2008)

A função fluxo é diretamente proporcional à tensão principal de consolidação e, portanto, quanto mais consolidado estiver, maior será o valor da função fluxo e melhor o produto irá fluir. Com base nisso, Jenike (1964) propôs intervalos de valores da função fluxo para caracterizar a fluidez dos produtos. Dessa forma, os valores apresentados na Tabela 2.1 permitem uma análise rápida do comportamento do fluxo dos produtos armazenados.

Tabela 2.1 - Análise da fluidez com base na função fluxo

Função Fluxo (FF)	Análise da fluidez
FF < 2	Produtos muito coesivos, não flui
2 < FF < 4	Produtos coesivos
4 < FF < 10	Produto que flui facilmente
FF > 10	Produto de fluxo livre

Fonte: Jenike (1964)

2.1.6 Fator fluxo da tremonha (*ff*)

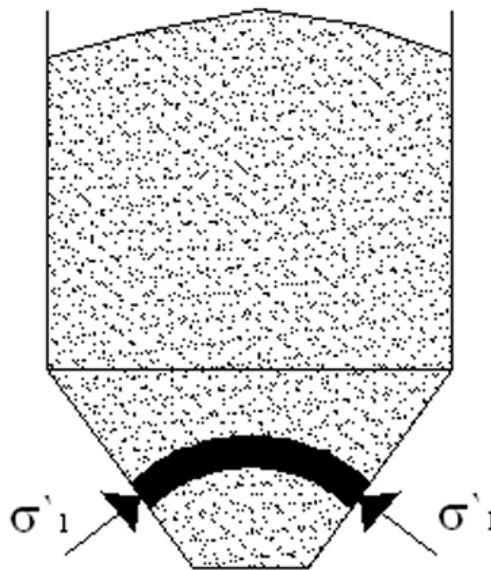
O fator fluxo da tremonha (*ff*) indica a fluidez do produto durante a descarga, relacionando as características geométricas da tremonha com as propriedades físicas do produto. Este fator depende de alguns parâmetros, tais como: efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e), do ângulo de atrito do produto com a parede (ϕ_w) e da geometria e inclinação da tremonha (α). De acordo com Palma (2005), em contrapartida à função fluxo, esta propriedade indica maior fluidez de um produto quanto menor for seu valor.

Neste contexto, o fator fluxo pode ser calculado por meio da Equação 2.2, dividindo-se

a tensão de consolidação (σ_1) pela tensão que atua em um arco estável imaginário (σ_c), formado pelas partículas do produto sustentadas pelas paredes da tremonha (σ'_1), conforme ilustrado na Figura 2.7 (Palma, 2005).

$$ff = \sigma_1 / \sigma_c \quad (2.2)$$

Figura 2.7 - Tensão que atua em um arco estável imaginário



Fonte: Teixeira (2006)

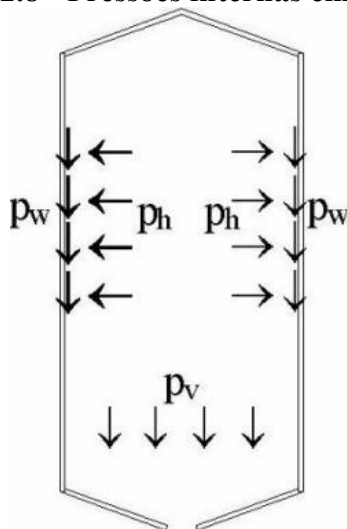
2.2 PRESSÃO NO INTERIOR DO SILO

As pressões em um silo resultam de três principais estados operacionais: carregamento, descarregamento e a condição estática do silo carregado. Além do estado operacional, as propriedades dos produtos influenciam na distribuição das pressões no interior do silo, entre elas destaca-se o ângulo de atrito com a parede, o ângulo de atrito interno efetivo e o peso específico. Estes fatores influenciam diretamente nos diagramas de pressão (horizontais e verticais), além de impactarem na magnitude da força de atrito (Cheung, 2007).

Em um silo carregado, os produtos armazenados exercem diferentes tipos de pressões que atuam tanto no fundo quanto nas paredes laterais da estrutura. As pressões verticais (p_v) se concentram no fundo do silo, resultantes do peso do produto armazenado. Já nas paredes, ocorrem pressões horizontais (p_h), que são perpendiculares à superfície das paredes, e as pressões de atrito (p_w), as quais são paralelas à superfície e resultam do atrito do produto com a superfície interna do silo (Nascimento, 2008). A Figura 2.8 ilustra estas relações entre as

pressões.

Figura 2.8 - Pressões internas em um silo



Fonte: Nascimento (2008)

É essencial compreender que, para estimar corretamente as curvas de pressão dentro de um silo, é necessário primeiro entender a diferença entre as pressões geradas durante o carregamento e o descarregamento. Durante o carregamento, predomina o campo das pressões estáticas, enquanto que no descarregamento do silo prevalece o campo das tensões dinâmicas. Essa diferença nos campos de tensões entre as fases de carregamento e descarga provoca a formação de picos de pressão significativos atuantes nas paredes do silo quando o fluxo do produto é estabelecido (Palma, 2005).

Segundo Palma (2005), é imprescindível conhecer não apenas as distribuições de pressões, mas também as tensões de cisalhamento que atuam sobre a superfície interna para o projeto estrutural de um silo. Além disso, é fundamental compreender como essas distribuições de pressão variam ao longo dos diferentes estágios de operação do silo: carregamento, armazenamento e descarregamento. De uma forma geral, as pressões nas paredes são dependentes, principalmente, das propriedades geométricas do silo, das propriedades do produto armazenado e do estágio de operação do silo (Nascimento, 2008).

As pressões no interior de silos, resultantes do armazenamento de produtos, e suas distribuições, têm sido amplamente estudadas. No entanto, esse tema já foi objeto de pesquisas anteriores, com contribuições importantes de Janssen (1895), Walters (1973), Walker (1966) e Jenike (1961). Na sequência serão apresentadas algumas teorias desenvolvidas para determinar as pressões internas de um silo.

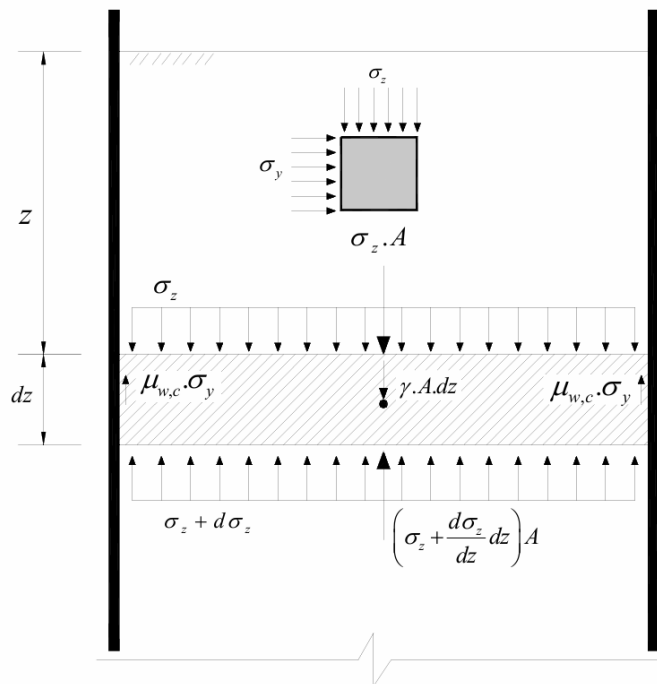
2.2.1 Teoria de Janssen (1895)

Para o projeto de um silo, a teoria mais usada e mais antiga é a proposta por Janssen em 1895, sendo considerada a primeira equação na condução da equação diferencial para o equilíbrio de uma camada sólida em um silo (Hilal *et al.*, 2022).

A metodologia de cálculo proposta por Janssen foi formulada com base no equilíbrio de uma camada de produto granular, assumindo-se a hipótese de pressão horizontal constante em um mesmo plano horizontal (Hilal *et al.*, 2022). A Teoria de Janssen também considera que o ângulo de atrito com a parede é constante, que o peso específico do produto é uniforme, que as paredes do silo são rígidas (indeformáveis) e que a razão entre as pressões horizontais e verticais (parâmetro K) permanece constante em toda a altura do silo (Dornelas *et al.*, 2024).

Esta teoria baseia-se na determinação das pressões verticais e horizontais atuantes em uma camada infinitesimal do produto armazenado por meio do equilíbrio de forças, conforme ilustrado na Figura 2.9. Nesta figura, tem-se atuando nessa camada as pressões devido ao atrito do produto com a parede do silo (p_w), representada por $\sigma_y \cdot \mu_{w,c}$, as pressões horizontais (p_h), representada por σ_y , e as pressões verticais (p_v) acima e abaixo, representadas por σ_z e $\sigma_z + d\sigma_z$, respectivamente.

Figura 2.9 - Equilíbrio estático de uma camada infinitesimal no produto ensilado



Fonte: Cheung (2007)

Fazendo o equilíbrio de forças verticais que atuam na camada infinitesimal de altura dz , peso específico γ , área A e perímetro lateral U , tem-se:

$$p_v + \gamma \cdot A \cdot dz = A(p_v + dp_v) + p_h \cdot \mu_w \cdot U \cdot dz \quad (2.3)$$

Admitindo a relação entre a pressão vertical e horizontal (K) como uma constante e aplicando a condição de contorno $p_v(0) = 0$. Fazendo $K \cdot dp_v = dp_h$, ao rearranjar os termos da expressão, obtém-se a Equação de Janssen (Equação 2.4).

$$p_h(z) = \frac{\gamma}{\mu_w} \cdot \frac{A}{U} \left(1 - e^{-zK\mu_w \frac{U}{A}} \right) \quad (2.4)$$

A pressão vertical (p_v) pode ser obtida substituindo p_h por $K \cdot p_v$, sendo dada pela Equação 2.5.

$$p_v(z) = \frac{\gamma}{K \cdot \mu_w} \cdot \frac{A}{U} \left(1 - e^{-zK\mu_w \frac{U}{A}} \right) \quad (2.5)$$

Considerando que a pressão de atrito (p_w) na parede interna do silo é dada pela Equação 2.6. Ao substituir os termos na Equação 2.5, tem-se a Equação 2.7 para a representar a pressão de atrito nas paredes por metro quadrado.

$$p_w(z) = \mu_w \cdot p_h(z) \quad (2.6)$$

$$p_w(z) = \gamma \cdot \frac{A}{U} \left(1 - e^{-zK\mu_w \frac{U}{A}} \right) \quad (2.7)$$

Janssen (1895) não apresentou um procedimento teórico para a determinação da relação entre as pressões horizontal e vertical (parâmetro K), tratando esse parâmetro como uma constante obtida experimentalmente. Posteriormente, Koenen (1896) propôs sua estimativa por meio do coeficiente de empuxo ativo de Rankine, conforme apresentado na Equação 2.8 (Ooi, *et al.*, 1996).

$$K = \frac{1 - \text{sen}\phi_i}{1 + \text{sen}\phi_i} \quad (2.8)$$

2.2.2 Teoria de Walker (1966)

Em 1966, na Inglaterra, D. M. Walker em uma de suas pesquisas desenvolveu uma metodologia de cálculo para determinar as pressões atuantes no interior de um silo, tanto na condição carregada (estática) quanto na condição de descarregamento. Sua abordagem foi baseada na análise das forças aplicadas em uma camada elementar do produto armazenado (Paula, 2020).

2.2.2.1 Pressões estáticas no interior do silo

Walker (1966) assumiu algumas hipóteses para desenvolver sua abordagem, uma delas era de que o estado inicial de pressões no corpo do silo é um estado ativo de Rankine, assumindo que a relação entre as pressões horizontais e verticais (parâmetro K) é dependente do ângulo de atrito interno (Palma, 2005). Desse modo, as pressões iniciais podem ser obtidas por meio das Equações 2.9 e 2.10.

$$p_v = \gamma \cdot z \quad (2.9)$$

$$p_h = K \cdot p_{vc,e} \quad (2.10)$$

Em que:

$$K = \frac{1 - \text{sen}\phi_e}{1 + \text{sen}\phi_e} \quad (2.11)$$

z é a altura relativa do silo;

p_v é a pressão vertical;

p_h é a pressão horizontal;

γ é o peso específico;

ϕ_e é o efetivo ângulo de atrito interno do produto.

2.2.2.2 Pressões de descarga no interior do silo

Durante o processo de descarga, Walker (1966) afirma que o estado ativo de Rankine, estabelecido durante o carregamento, sofre uma alteração durante o fluxo em decorrência do atrito do produto com a parede do silo (Palma, 2005).

Walker (1966), por meio do círculo de Mohr e do equilíbrio de forças de uma camada infinitesimal, chegou à conclusão de que as pressões verticais e horizontais (p_v e p_h , respectivamente) são dadas pelas equações de Janssen, com o parâmetro μK dado pela Equação 2.12.

$$\mu K = \frac{\text{sen}\phi_e \text{sen}\varepsilon_1}{1 - \text{sen}\phi_e \cos\varepsilon_1} \quad (2.12)$$

Em que:

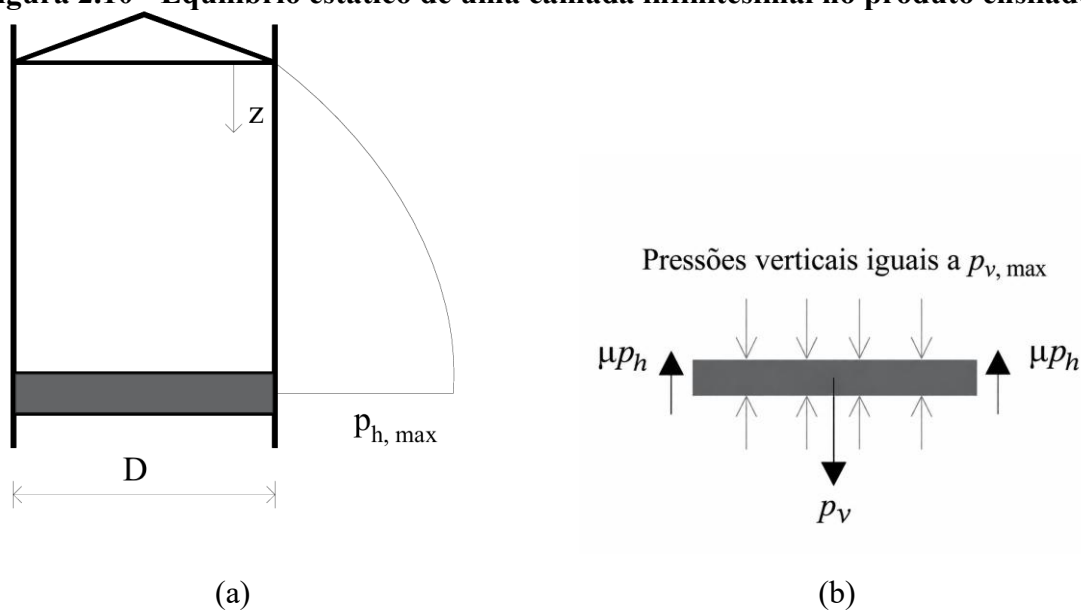
$$\varepsilon_1 = \frac{\pi}{2} + \phi_w + \cos^{-1} \left(\frac{\text{sen}\phi_w}{\text{sen}\phi_e} \right) \quad (2.13)$$

2.2.3 Teoria de Reimbert (1979)

Os irmãos Marcel Reimbert e André Reimbert desenvolveram inicialmente uma teoria seguindo a teoria dos muros de arrimo. Os pesquisadores estimaram que as distribuições das pressões ocorriam de maneira linear em função da altura. No entanto, em 1979, os autores desenvolveram uma segunda hipótese (Modelo de Reimbert) na qual a distribuição das pressões no interior de um silo é uma função hiperbólica em relação a sua altura onde, para grandes profundidades (z), a curva da pressão tende a uma assíntota vertical (Figura 2.10a). Diante deste contexto, os pesquisadores chegaram à conclusão de que a primeira hipótese atendia de maneira satisfatória os silos de pequena altura em relação ao diâmetro (silos horizontais), enquanto que a segunda hipótese se enquadra melhor para silos altos ou esbeltos (silos verticais) (Gomes, 2000).

Segundo Nascimento (2008), o modelo de Reimbert (1979) foi desenvolvido assumindo que a relação entre as pressões horizontais e verticais é constante, baseado no cálculo da pressão horizontal máxima ($p_{h,max}$), obtida considerando o equilíbrio de forças em uma camada infinitesimal de espessura dz , cujo peso (p_w) é equilibrado devido ao atrito lateral (Figura 2.10b).

Figura 2.10 - Equilíbrio estático de uma camada infinitesimal no produto ensilado



Fonte: adaptado de Freitas (2001)

Fazendo o equilíbrio de forças verticais, tem-se que:

$$p_{h,m\acute{a}x} \cdot U \cdot dz \cdot \operatorname{tg} \phi_w = A \cdot dz \cdot \gamma \quad (2.14)$$

$$p_{h,m\acute{a}x} = \frac{\gamma \cdot R}{\operatorname{tg} \phi_w} \quad (2.15)$$

Considerando o peso da camada infinitesimal, o equilíbrio de forças pode ser expresso por:

$$A \cdot z \cdot \gamma = p_{v,méd}(z) \cdot A + U \cdot \operatorname{tg} \phi_w \int_0^z p_{h,méd}(z) \cdot dz \quad (2.16)$$

$$\frac{p_v}{p_h} = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_e}{1 - \operatorname{sen} \phi_e} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_e}{2} \right)} \quad (2.17)$$

Resolvendo a Equação 2.15 e assumindo a relação das pressões verticais e horizontais (Equação 2.17), a pressão horizontal e a vertical no interior do silo podem ser dadas pelas Equações 2.18 e 2.19, respectivamente.

$$p_h(z) = p_{h,max} \left(1 - e^{-\frac{z}{h_0}} \right) \quad (2.18)$$

$$p_v(z) = \gamma h_0 \left(1 - e^{-\frac{z}{h_0}} \right) \quad (2.19)$$

Em que:

U é o perímetro lateral do interior do silo;

ϕ_w é o ângulo de atrito do produto com a parede interna do silo;

A é a área transversal do interior do silo;

γ é o peso específico do produto armazenado;

ϕ_e é o efetivo ângulo de atrito interno;

p_h é a pressão horizontal;

p_v é a pressão vertical;

$$h_0 = \frac{r}{\tan \phi_e \cdot \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_e}{2} \right)} \quad (2.20)$$

2.2.4 *American National Standards Institute - ANSI/ASAE EP433.1 (2024)*

A norma americana apresenta uma metodologia de cálculo para a obtenção das pressões estáticas e dinâmicas em silos carregados e descarregados concêntricamente para produtos de fluxo livre. A norma fundamenta-se na equação proposta por Janssen (1895) para a predição das pressões estáticas nas paredes e nos fundos de silos.

A referida normativa fornece valores para o coeficiente de atrito entre o produto e a parede em função do tipo de material desta, fixando o valor de $K = 0,5$ para qualquer produto de fluxo livre. São apresentados, ainda, valores do fator de sobrepressão (F), que, para silos com esbeltez (H/D) maior que 2, é aplicado às pressões estáticas para estimar as pressões durante o descarregamento, conforme apresentado na Tabela 2.2.

Tabela 2.2 - Fatores de sobrepressão e propriedades do produto armazenado

Material da parede	Coeficiente de atrito (μ_w)	K	F
Aço	0,30	0,5	1,4
Concreto	0,47	0,5	1,4
Aço corrugado	0,37	0,5	1,4

Fonte: ANSI/ASAE EP433.1 (2024)

Além disso, para qualquer grão de fluxo livre, a norma recomenda uma densidade máxima de 834 kg/m^3 e para produtos específicos diferentes do trigo, indica-se a utilização de densidades determinadas experimentalmente por meio do *Winchester Bushel Test* (USDA, 2004), ou aquelas listadas na ASAE D241, *Density, Specify Gravity and Weight-Moisture Relationships of Grain for Storage*, multiplicadas por um fator de compactação de 1,08.

As pressões estáticas verticais, horizontais e de atrito em função da profundidade (z), são obtidas, respectivamente, pelas Equações 2.21, 2.22 e 2.23.

$$p_v(z) = \frac{\rho \cdot g}{K \cdot \mu_w} \cdot R_h \left(1 - e^{-\frac{zK\mu_w}{R_h}} \right) \quad (2.21)$$

$$p_h(z) = K \cdot p_v(z) \quad (2.22)$$

$$p_w(z) = \mu_w \cdot p_h(z) \quad (2.23)$$

em que:

$p_v(z)$ é a pressão vertical em função da profundidade;

$p_h(z)$ é a pressão horizontal em função da profundidade;

$p_w(z)$ é a pressão de atrito em função da profundidade;

z é a profundidade;

ρ é a densidade do produto armazenado;

g é a aceleração da gravidade ($9,8 \text{ m/s}^2$);

R_h é o raio hidráulico do silo (área da seção transversal dividida pelo perímetro);

K é a razão entre a pressão horizontal e a vertical;

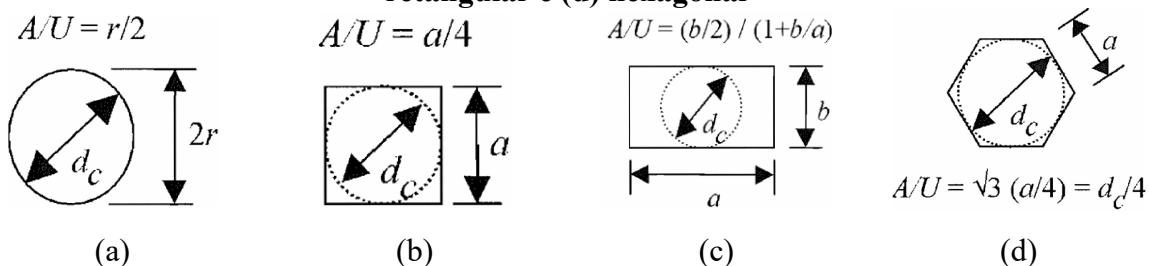
μ_w é o coeficiente de atrito entre o produto e a parede.

2.2.5 European Committee of Standardization - EN 1991-4 (2006)

Esta norma fornece os princípios gerais e ações para o projeto estrutural de silos destinados ao armazenamento de produtos granulares e de tanques destinados ao armazenamento de líquidos. A norma aplica-se aos silos que atendem aos seguintes requisitos:

- I. Características dimensionais: relação altura/diâmetro, $h_b/d_c < 10$; altura total, $h_b < 100$ m e diâmetro, $d_c < 60$ m;
- II. Ausência de estruturas internas, tais como cones ou pirâmides com vértice voltado para cima ou vigas transversais;
- III. Cada silo deve ser projetado para uma faixa definida de propriedades dos produtos granulares;
- IV. O diâmetro máximo do produto armazenado não deve exceder $0,03d_c$ (diâmetro inscrito do silo);
- V. O carregamento deve gerar apenas efeitos de inércia, com cargas de impacto desprezíveis;
- VI. Silos com seções transversais conforme ilustrado na Figura 2.11, sendo admitidas pequenas variações, desde que sejam consideradas as consequências estruturais decorrentes das alterações nas pressões.

Figura 2.11 - Geometria seção transversal dos silos: (a) circular, (b) quadrada, (c) retangular e (d) hexagonal



Fonte: EN 1991-4 (2006)

A norma europeia adota diferentes considerações para o projeto estrutural de silos de acordo com a capacidade e complexidade da estrutura. Para mitigar possíveis falhas e/ou acidentes, os silos são classificados em classes de risco, conforme os parâmetros indicados na

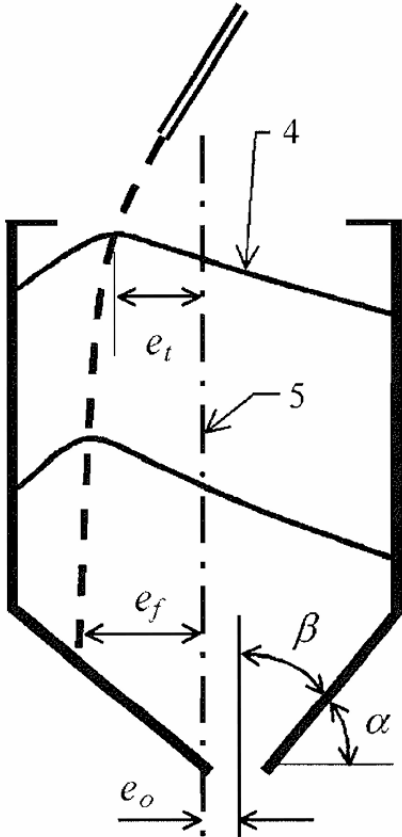
Tabela 2.3 e na Figura 2.12.

Tabela 2.3 – Classificação dos silos quanto ao risco	
Risco	Descrição
Classe 1	Silos com capacidade abaixo de 100 toneladas
Classe 2	Todos os silos que não pertencem às classes 1 e 3
Classe 3	Silos com capacidade acima de 10000 toneladas;
	Silos com capacidade acima de 1000 toneladas em que ocorre pelo menos uma das seguintes situações:
	(a) descarga excêntrica com $e_o / d_c > 0,25^*$ (b) silos quadrados com excentricidade de carregamento $e_t / d_c > 0,25^*$

* e_o é a excentricidade do orifício de descarga, d_c é o diâmetro inscrito e e_t é a excentricidade de enchimento no topo da superfície.

Fonte: Adaptado de EN 1991-4 (2006)

Figura 2.12 - Parâmetros geométricos do silo



Fonte: Autor (2026)

Para aumentar a confiabilidade e a segurança estrutural, a norma ainda recomenda uma faixa de variação das propriedades dos produtos, adotando-se os extremos de modo a se obter

a combinação mais críticas para cada situação, conforme apresentado na Tabela 2.4.

Tabela 2.4 - Valores das propriedades dos produtos para cálculo das pressões

Aplicação	Valor característico a ser adotado			
	Peso específico (γ)	Coefficiente de atrito do produto com a parede (μ_w)	Ângulo de atrito interno (ϕ_i)	Parâmetro K
Pressão horizontal máxima	Superior	Inferior	Inferior	Superior
Pressão de atrito máxima	Superior	Superior	Inferior	Superior
Pressão vertical máxima	Superior	Inferior	Superior	Inferior

Fonte: Adaptado de EN 1991-4 (2006)

A norma europeia classifica os silos quanto a sua esbeltez (relação altura / diâmetro), conforme apresentado na Tabela 2.5, sendo essa classificação determinante para a seleção das equações de predição das pressões.

Tabela 2.5 - Classificação dos silos quanto à esbeltez segundo a EN 1991-4 (2006)

Classificação	Relação H/D
Esbelto	$H/D \geq 2$
Medianamente esbelto	$1 < H/D < 2$
Baixo	$0,4 < H/D \leq 1$
Silo horizontal	$H/D \leq 0,4$

Fonte: Autor (2026)

Para os silos de Classe 1, a norma indica que o cálculo das ações pode ser efetuado com base nos valores médios das propriedades dos produtos. Para os silos de Classe 2 e 3, por sua vez, faz-se necessária a adoção de coeficientes de segurança, a_k , a_{μ_w} , a_{ϕ_i} , aplicados aos parâmetros K, μ_w e ϕ_i por meio de divisão ou multiplicação, conforme a combinação de carregamento analisada e o tipo de produto.

Esta normativa apresenta diferentes metodologias de cálculo das pressões em função da classificação do silo (esbelto, medianamente esbelto, baixo e horizontal). Como o presente trabalho não contempla silos horizontais, serão apresentadas apenas as formulações referentes aos silos esbeltos, medianamente esbeltos e baixos para o cálculo das pressões estáticas.

2.2.5.1 Pressões estáticas simétricas para silos esbeltos

Em 17 de março de 2026 foi publicada a atualização da EN 1991-4 (2026). No que se refere ao cálculo das pressões, a principal alteração consistiu na inclusão de fatores modificadores de carga, definidos em função da classe de avaliação das ações, da utilização do silo, da razão de esbeltez e das excentricidades de carregamento. Como essa revisão da norma foi publicada durante o desenvolvimento desta pesquisa, adotou-se neste trabalho a EN 1991-4 (2006), versão vigente à época da realização do estudo. Assim, as equações utilizadas para o cálculo das pressões estáticas em silos esbeltos, apresentadas a seguir, correspondem às prescrições dessa versão da norma.

As pressões horizontais (p_h), de atrito (p_w) e verticais (p_v) no interior de silos esbeltos podem ser calculadas por meio das respectivas equações 2.24, 2.25 e 2.26.

$$p_h(z) = p_{ho} Y_J(z) \quad (2.24)$$

$$p_w(z) = \mu_w \cdot p_{ho} \cdot Y_J(z) \quad (2.25)$$

$$p_v(z) = \frac{p_{ho}}{K} Y_J(z) \quad (2.26)$$

Em que as variáveis são dadas pelas Equações 2.27, 2.28 e 2.29.

$$p_{ho} = \gamma K z_o \quad (2.27)$$

$$z_o = \frac{1}{K \cdot \mu_w} \cdot \frac{A}{U} \quad (2.28)$$

$$Y_J(z) = 1 - e^{z/z_o} \quad (2.29)$$

Onde:

z é a profundidade;

γ é o peso específico do produto armazenado;

μ_w é o coeficiente de atrito entre o produto e a parede;

A é a área da seção transversal do silo;

U é o perímetro do silo;

K é a razão entre a pressão horizontal e a vertical, podendo ser obtido por meio da Equação (2.30).

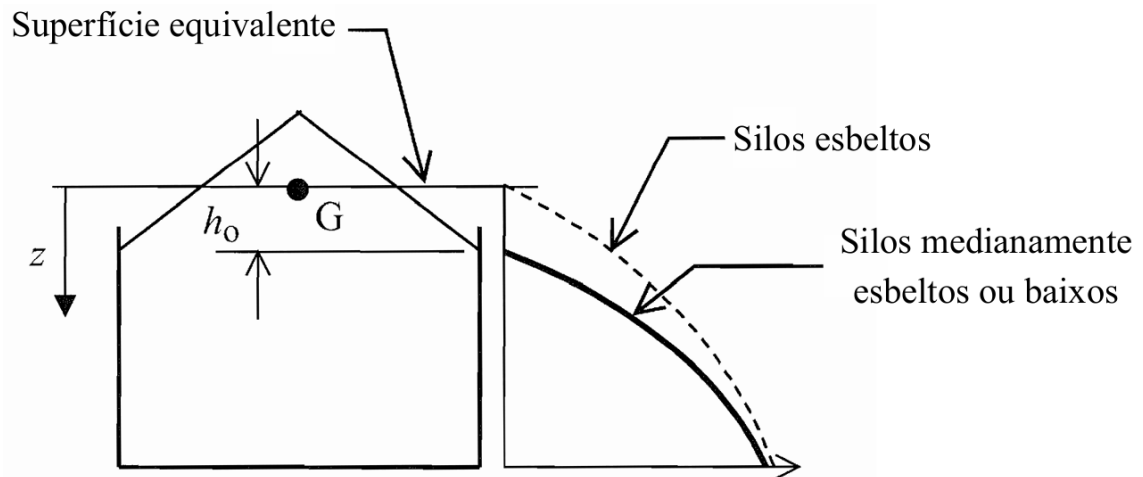
$$K = 1,1(1 - \text{sen}\phi_{im}) \quad (2.30)$$

ϕ_{im} é o valor médio do ângulo de atrito interno.

2.2.5.2 Pressões estáticas simétricas para silos baixos e medianamente esbeltos

As pressões no interior de silos baixos ou medianamente esbeltos diferem daquelas observadas em silos esbeltos, principalmente em relação à distribuição das pressões ao longo da altura. Para silos baixos ou medianamente esbeltos, a curva de pressão tem início a partir do referencial $z = h_o$ e não de $z = 0$. Nesse caso, o ponto de referência passa a ser a região em que ocorre o primeiro contato entre o produto armazenado e a parede do silo, conforme ilustrado na Figura 2.13.

Figura 2.13 – Pressões de estáticas em silos esbeltos e medianamente esbeltos/baixos



Fonte: Adaptado de EN 1991-4 (2006)

As pressões horizontais (p_h), de atrito (p_w) e verticais (p_v) podem ser calculadas por meio das equações 2.31, 2.32 e 2.33, respectivamente.

$$p_h(z) = p_{ho} Y_R(z) \quad (2.31)$$

$$p_w(z) = \mu_w \cdot p_{ho} \cdot Y_R(z) \quad (2.32)$$

$$p_v(z) = \gamma \cdot z_v(z) \quad (2.33)$$

Em que as variáveis são dadas pelas Equações 2.34 a 2.38.

$$p_{ho} = \gamma K z_o \quad (2.34)$$

$$z_o = \frac{1}{K \mu_w} \cdot \frac{A}{U} \quad (2.35)$$

$$Y_R(z) = \left(1 - \left\{\left(\frac{z - h_o}{z_o - h_o}\right) + 1\right\}^n\right) \quad (2.36)$$

$$n = -(1 + \tan\phi_r) \left(1 - \frac{h_o}{z_o}\right) \quad (2.37)$$

$$z_v = h_o - \frac{1}{n+1} \left(z_o - h_o - \frac{(z + z_o - 2h_o)^{n+1}}{(z_o - h_o)^n}\right) \quad (2.38)$$

Onde:

h_o é a distância entre a superfície equivalente e o ponto mais alto de contato entre a parede e o produto armazenado, conforme a Figura 2.13, e para silos com seção circular, este parâmetro é dado pela Equação 2.39;

$$h_o = \frac{r}{3} \tan(\phi_r) \quad (2.39)$$

γ é o peso específico do produto armazenado;

μ_w é o coeficiente de atrito entre o produto e a parede;

z é a profundidade abaixo da superfície equivalente;

A é a área da seção transversal do silo;

U é o perímetro do silo;

K é a razão entre a pressão horizontal e a vertical, podendo ser obtido por meio da Equação (2.30).

ϕ_r é o ângulo de repouso do produto;

r é o raio do silo.

2.2.6 *Australian Standard – AS 3774 (1996)*

Esta norma estabelece os princípios gerais e as ações aplicáveis ao projeto estrutural de estruturas destinadas ao armazenamento em massa de produtos granulares, tais como silos, *bunkers* e moegas de descarga, especificando os requisitos para a determinação das cargas atuantes.

A norma australiana classifica os silos quanto a sua esbeltez (relação altura / diâmetro), conforme apresentado na Tabela 2.6.

Tabela 2.6 - Classificação dos silos quanto à esbeltez segundo a AS 3774 (1996)

Classificação	Relação H/D
Baixo (A1)	$H/D < 1$
Medianamente esbelto (A2)	$1 \leq H/D \leq 3$
Esbelto (A3)	$H/D > 3$

Fonte: Autor (2026)

A normativa australiana, assim como a europeia, considera a combinação mais desfavorável para o cálculo das pressões no interior do silo, conforme a Tabela 2.7. Portanto, faz-se necessário determinar valores característicos superiores e inferiores para cada propriedade do produto.

Tabela 2.7 - Valores apropriados das propriedades dos produtos

Aplicação	Valor característico a ser adotado			
	Peso específico (γ)	Ângulo de atrito do produto com a parede (ϕ_w)	Parâmetro K	Efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e)
Pressão horizontal máxima	Superior	Inferior	Superior	Inferior
Pressão de atrito máxima	Superior	Superior	Superior	Inferior
Pressão vertical máxima	Superior	Inferior	Inferior	Superior

Fonte: adaptado de AS 3774 (1996)

Para silos esbeltos, deve-se adotar o valor característico inferior do ângulo de atrito do produto com a parede, conforme indicado na Tabela 2.7. No entanto, para silos muito baixos (A1), o valor superior pode conduzir a pressões mais elevadas. Já para silos medianamente esbeltos (A2), ambos os limites devem ser avaliados.

A metodologia proposta pela norma para o cálculo das pressões baseia-se na teoria proposta por Janssen (1895). Portanto, as pressões horizontais (p_h), de atrito (p_w) no interior de silos submetidos a um carregamento simétrico podem ser calculadas por meio das equações 2.40 e 2.41, respectivamente. Para as pressões verticais (p_v), tem-se a Equação 2.42 para silos baixos (A1) e a Equação 2.43 para silos esbeltos e medianamente esbeltos.

$$p_h(z) = \frac{\gamma r_c c_z}{\mu_w} \quad (2.40)$$

$$p_w(z) = \gamma r_c c_z \quad (2.41)$$

$$p_v(z) = \frac{\gamma r_c c_z}{\mu_w K} \quad (2.42)$$

$$p_v(z) = \gamma z \quad (2.43)$$

Onde:

K é a razão entre a pressão horizontal e a vertical, podendo ser obtido por meio da Equação 2.44.

$$K = \frac{1 + \sin^2 \phi_e - 2\sqrt{(\sin^2 \phi_e - \mu^2 \cos^2 \phi_e)}}{4\mu^2 + \cos^2 \phi_e} \geq 0,35 \quad (2.44)$$

c_z é a função da profundidade de Janssen, podendo ser calculada por meio da Equação 2.45.

$$c_z = 1 - e^{(-z/z_o)} \quad (2.45)$$

$$z_o = \frac{r_c}{\mu_w K} \quad (2.46)$$

γ é o peso específico do produto armazenado;

μ_w é o coeficiente de atrito entre o produto e a parede;

z é a altura de preenchimento de grãos;

r_c é a dimensão característica da seção transversal do silo (valor igual a 25% do diâmetro para silos cilíndricos);

ϕ_e é o efetivo ângulo de atrito interno.

2.3 TIPOS DE FLUXO

Segundo Madrona (2008), o fluxo de produtos granulares e pulverulentos está relacionado com o surgimento da deformação plástica do produto, que desencadeia o movimento de massa conhecido como fluxo. Assim que há o fluxo, a descarga por gravidade pode ser classificada de duas maneiras: fluxo de massa e fluxo de funil, sendo determinante para a forma como o produto escoar as propriedades físicas e pela geometria do silo, bem como pelo ângulo de atrito do produto com a superfície de contato (Cheung, 2007; Freitas, 2001).

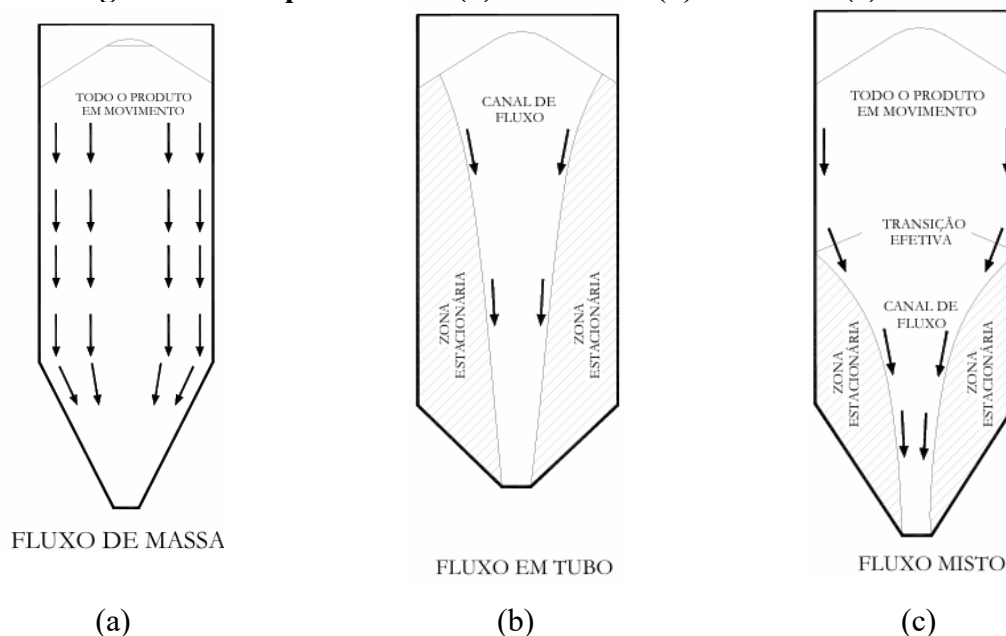
Portanto, segundo as definições de Cheung (2007), os dois tipos de fluxo são:

- Fluxo de massa: É o tipo de fluxo ideal, em que não há estagnação do produto e devendo ser buscado em todo projeto de silo. Em outras palavras, este tipo de

fluxo é caracterizado pelo movimento contínuo das partículas durante o processo de descarga, impedindo a formação de zonas estacionárias (Figura 2.14a).

- Fluxo de funil: Neste tipo de fluxo ocorre a descarga do produto por meio de um canal vertical de fluxo alinhado com a boca de descarga, envolvido por uma zona de estagnação do produto (zona parada ou estagnada). O fluxo de funil ainda pode ser dividido em fluxo de tubo, caracterizado pelo canal de fluxo se estender da base até a superfície do produto armazenado (Figura 2.14b), e em fluxo misto, onde o limite de fluxo intercepta em algum ponto a parede do silo, conforme a Figura 2.14c (Wang; Lu; Ooi, 2015).

Figura 2.14 - Tipos de fluxo (a) de massa e (b) em tubo e (c) misto



Fonte: Cheung (2007)

Cada tipo de fluxo possui suas vantagens e desvantagens. Diante deste contexto, Nascimento (2008) e Cheung (2007) afirmam que, em virtude das zonas de estagnação no fluxo de funil, silos associados a este fluxo têm uma capacidade de armazenamento reduzida, segregação de sólidos, vazão irregular e deterioração dos produtos por causa da região estagnada. As vantagens, segundo os autores, são um menor desgaste das paredes e uma menor altura da tremonha.

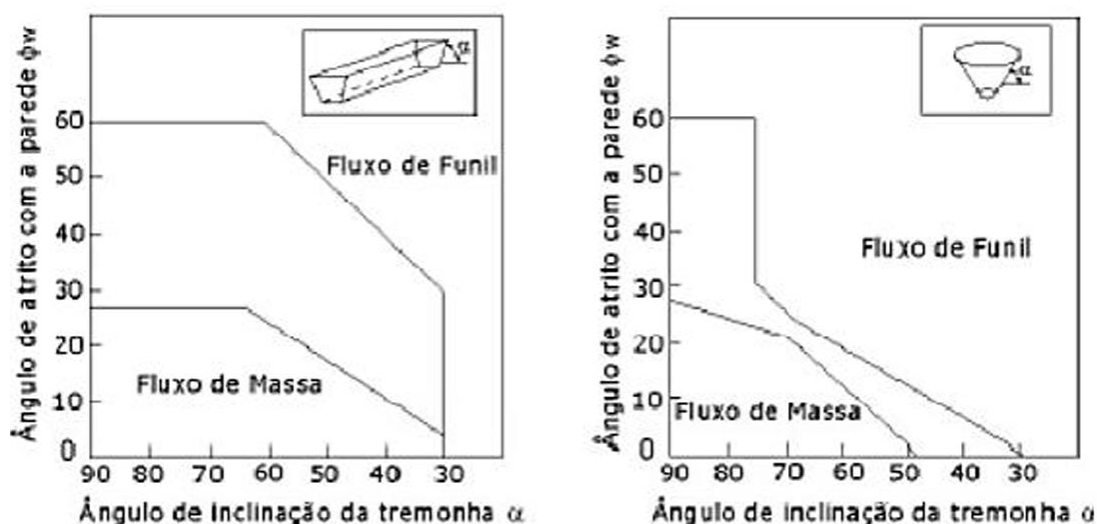
Em relação ao fluxo de massa, há o movimento de todas as partículas no interior do silo. Dessa forma, os silos com este tipo de fluxo apresentam características vantajosas, tais como uma vazão regular, previsibilidade dos campos de tensões, o produto é totalmente descarregado

por gravidade, uma maior capacidade de armazenamento e um aproveitamento total desta capacidade (Cheung, 2007; Nascimento, 2008). No entanto, possui algumas desvantagens, tais como a necessidade de tremonhas mais altas, um maior desgaste das paredes internas, altas tensões na região da transição da tremonha e a necessidade de maior resistência dos grãos devido à queda mais acentuada (Cheung, 2007; Nascimento, 2008).

A compreensão do tipo de fluxo gerado pela descarga de produtos pulverulentos e granulares por gravidade é de extrema importância para compreender a distribuição das pressões dinâmicas nas paredes, na tremonha e na fundação do silo (Dornelas, 2022). Além disso, o tipo de fluxo caracteriza o descarregamento do produto, o tipo de separação dos grãos, a formação ou não de zonas de estagnação do produto (estáticas) e se o silo pode ser esvaziado completamente (Calil Junior, 1990; Dornelas, 2022).

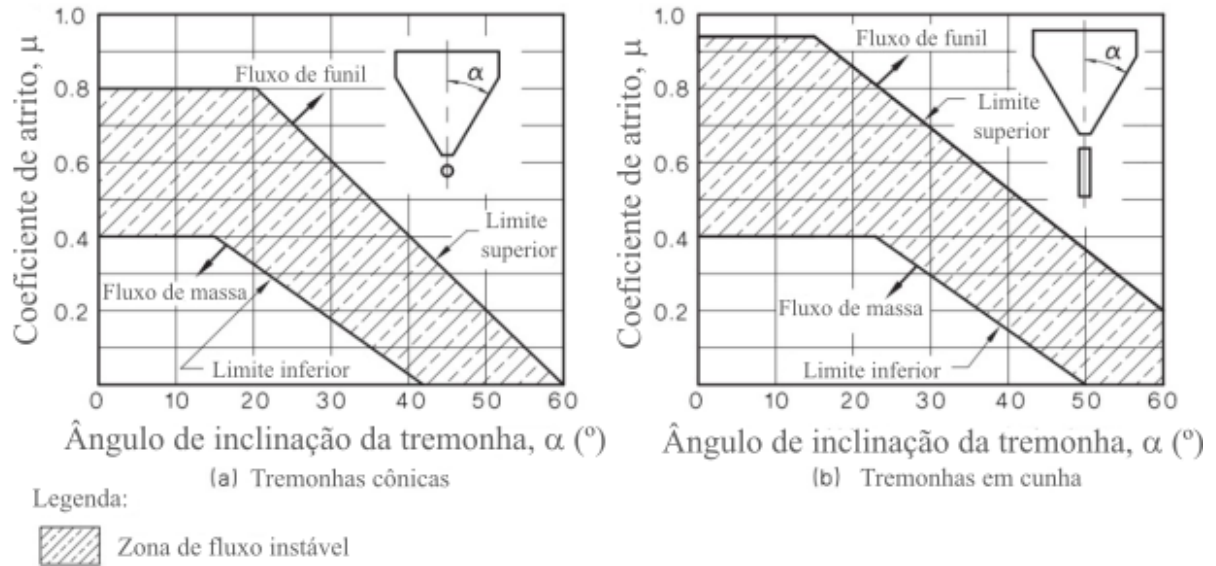
As principais normas referentes a silos, em especial ANSI/ASAE EP 433.1 (2024), a AS 3774 (1996) e a EN 1991-4 (2006) sugerem o uso de gráficos para determinar o tipo de fluxo, conforme ilustrado nas Figura 2.15, 2.16 e 2.17, respectivamente. A determinação do tipo de fluxo com base nos gráficos destas normas são função da interação dos sólidos com a parede interna do silo, representada pelo coeficiente de atrito (μ), do ângulo de inclinação das paredes da tremonha (α) e de sua geometria.

Figura 2.15 - Determinação do tipo de fluxo pela ANSI/ASAE EP433.1 (2024)



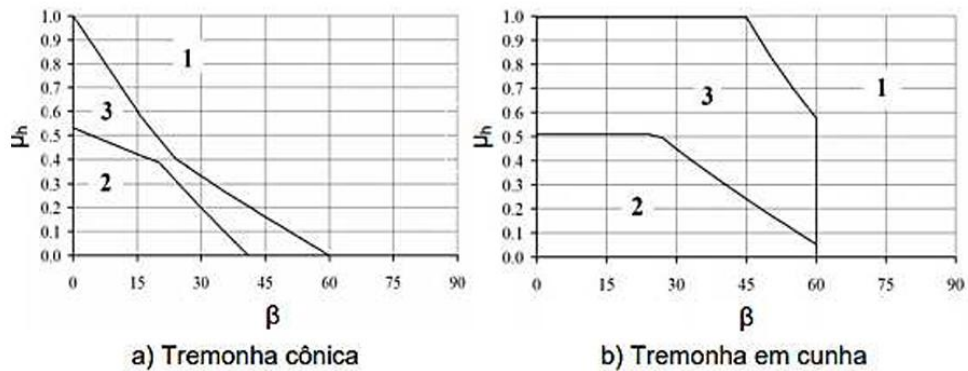
Fonte: Dornelas (2022)

Figura 2.16 - Determinação do tipo de fluxo pela AS 3774-1996



Fonte: adaptado de AS 3774 (1996)

Figura 2.17 - Determinação do tipo de fluxo pela EN 1991-4 (2006)



Sendo:

1 = Fluxo de funil;
 2 = Fluxo de massa;
 3 = Fluxo de massa ou funil;
 β = Ângulo de inclinação da tremonha;
 μ_h = Coeficiente de atrito.

Fonte: Dornelas (2022)

Na versão da EN 1991-4 publicada em 2026, o procedimento para previsão do padrão de escoamento simétrico (tipo de fluxo) passou a integrar o corpo principal da norma, sendo apresentado no item 5.3.2. Além disso, a representação gráfica utilizada para a classificação do padrão de escoamento foi reformulada, passando a considerar apenas duas regiões, correspondentes ao fluxo de massa e ao fluxo de funil, em substituição ao gráfico adotado na versão de 2006. A nova abordagem retoma os limites recomendados por Jenike (1964) para a

distinção entre os tipos de fluxo.

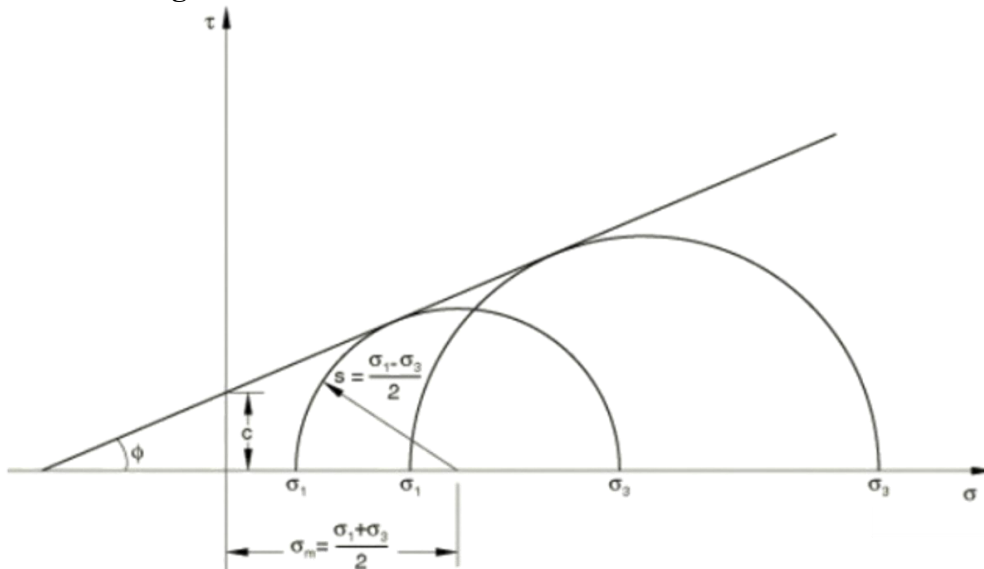
2.4 MODELO CONSTITUTIVO

A modelagem numérica de produtos granulares requer a definição de um modelo constitutivo capaz de representar adequadamente o seu comportamento mecânico sob diferentes estados de tensão. Portanto, alguns dos modelos constitutivos possíveis para se utilizar na modelagem numérica são o critério de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager.

2.4.1 Critério de Mohr-Coulomb

O critério de Mohr-Coulomb estabelece que a ruptura ocorre quando o estado de tensões em um ponto atinge ou ultrapassa a envoltória de resistência do material no plano tensão cisalhante (τ) $\times$ tensão normal (σ). Sendo a envoltória definida por uma reta que tangencia os círculos de Mohr correspondentes aos diferentes estados de tensão, conforme ilustra a Figura 2.18.

Figura 2.18 – Envoltória de resistência de Mohr-Coulomb



Fonte: Adaptado do Manual do Usuário do ABAQUS/CAE 6.14 (2017)

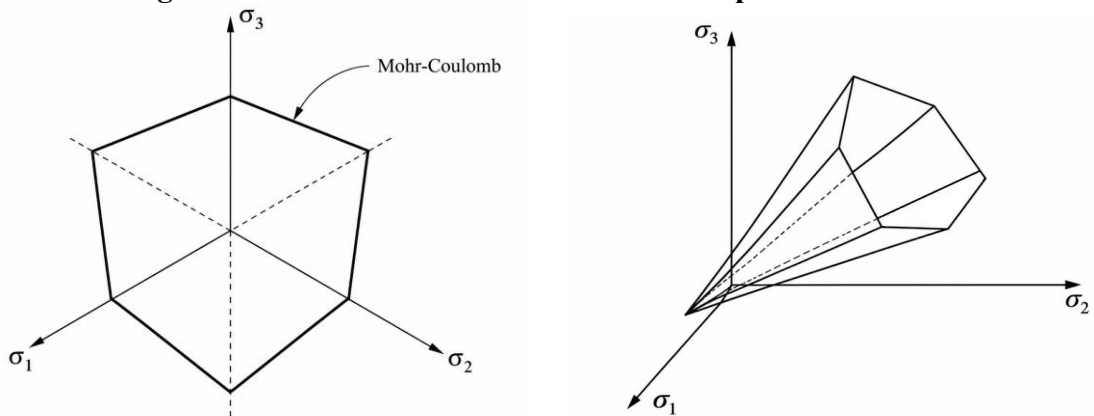
De acordo com esse critério, o material entra em colapso quando a tensão cisalhante excede o valor máximo suportado para uma dada tensão normal. Dessa forma, o modelo de Mohr-Coulomb é definido pela Equação 2.47.

$$\tau = c - \sigma \operatorname{tg} \phi_i \quad (2.47)$$

Onde τ é a tensão de cisalhamento, c é a coesão do material, σ é a tensão normal e ϕ_i é o ângulo de atrito interno do material.

O modelo de Mohr-Coulomb é representado no plano desviador por um hexágono irregular, conforme ilustrado na Figura 2.19. Essa geometria apresenta descontinuidades nas arestas do hexágono, o que pode gerar dificuldades na convergência em análises numéricas (Brown, 2008).

Figura 2.19 - Critério de Mohr-Coulomb no plano desviador

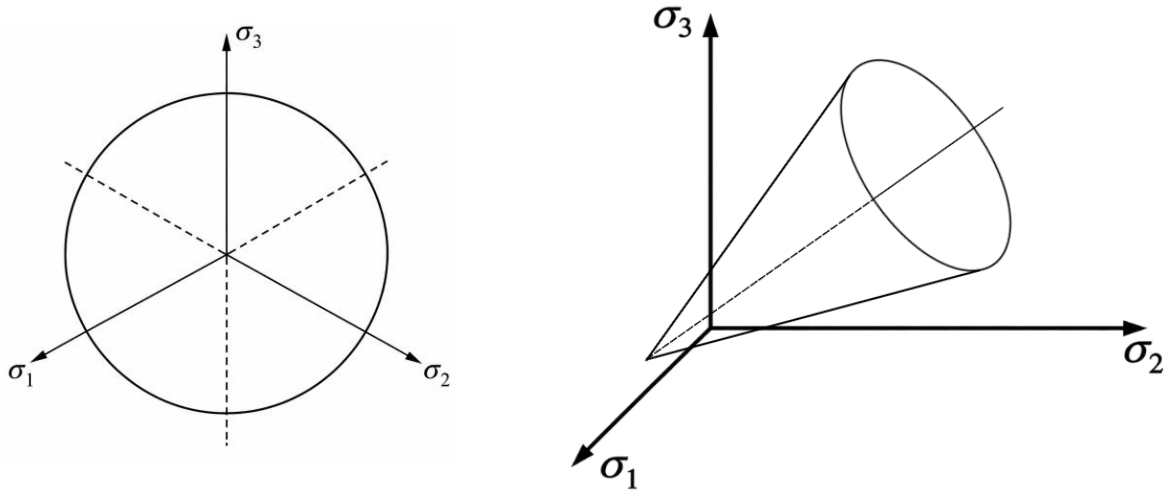


Fonte: Autor (2026)

2.4.2 Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager considera o efeito das três tensões principais (σ_1 , σ_2 e σ_3) no estado de tensões (Brown, 2008). No plano desviador, esse critério é representado por um cone circular, sem as descontinuidades nas arestas características do critério de Mohr-Coulomb (Figura 2.20), o que facilita sua implementação numérica. Sua definição mais geral é uma função do primeiro invariante de tensões (I_1) e do segundo invariante desviador (J_2), conforme a Equação 2.48.

Figura 2.20 - Critério de Drucker-Prager no plano desviador



Fonte: Autor (2026)

$$F(I_1, J_2) = 0 \quad (2.48)$$

Onde:

$$I_1 = \sigma_{ii} \quad (2.49)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{ji} \quad (2.50)$$

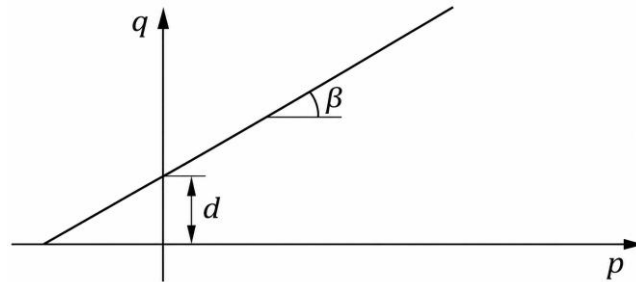
$$J_2 = I_2 - \frac{1}{6} I_1^2 \quad (2.51)$$

Dessa forma, o critério de falha de Drucker-Prager é dado pela Equação 2.52.

$$F = q - p \operatorname{tg}(\beta) - d = 0 \quad (2.52)$$

Onde β é o ângulo de atrito interno, d é a coesão do material e q é a tensão equivalente de von Mises, dada pela Equação 2.53, e p é a tensão hidrostática, dada pela Equação 2.54. A envoltória de ruptura no plano de tensões é ilustrada na Figura 2.21.

Figura 2.21 - Envoltória de resistência de Drucker-Prager



Fonte: adaptado de Brown (2008)

$$q = \sqrt{3 J_2} \quad (2.53)$$

$$p = \frac{1}{3} I_1 \quad (2.54)$$

A relação entre os ângulos de atrito interno dos modelos de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager pode ser obtida a partir de condições de compressão e tração triaxial, o que possibilita estabelecer a equivalência entre os dois critérios para um mesmo material (Brown, 2008). Essa correlação entre os modelos constitutivos é expressa pela Equação 2.55.

$$\text{tg}(\beta) = \frac{6 \text{sen}\phi}{3 - \text{sen}\phi} \quad (2.55)$$

2.5 ESTADO DA ARTE

Esta seção apresenta uma revisão de modelos numéricos disponíveis na literatura, com ênfase em estudos que utilizaram o *software* Abaqus para análise das pressões internas em silos, além de apresentar o modelo experimental desenvolvido por Cheung (2007). Serão discutidos os principais critérios adotados nos modelos de Hilal *et al.* (2022), Brown (2008) e Yang *et al.* (2011), incluindo os tipos de elementos utilizados, tipo de malha adotada, definições de contato, condições de contorno, o carregamento aplicado e os resultados obtidos. A compreensão dessas abordagens contribui para a fundamentação e desenvolvimento do modelo proposto neste trabalho, servindo como referência para embasar a metodologia adotada.

2.5.1 Hilal *et al.* (2022)

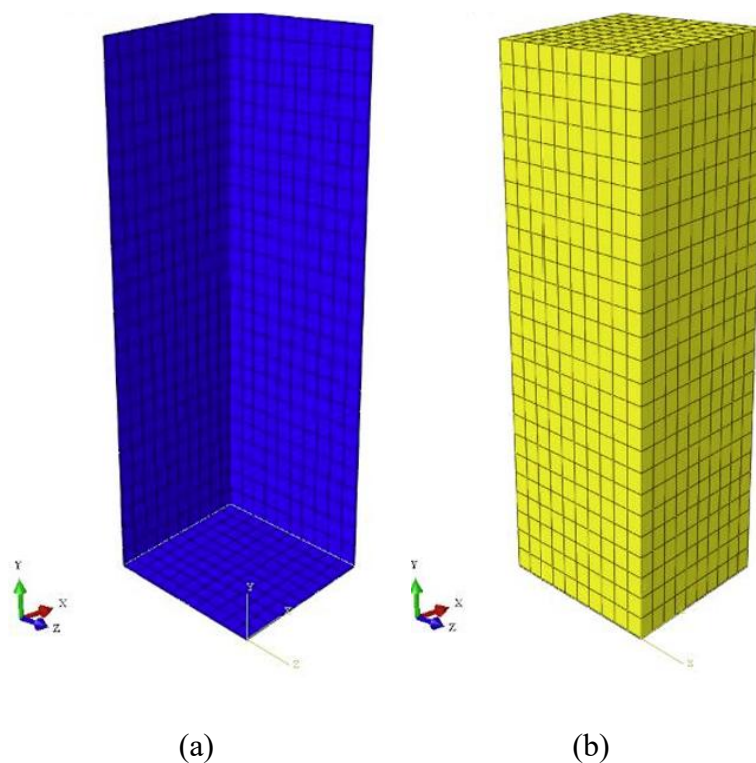
Os pesquisadores, com o objetivo de avaliar as pressões exercidas nas paredes flexíveis de aço no interior de silos quadrados, fizeram um estudo baseado na modelagem computacional com o auxílio do *software* Abaqus versão 6.5. Para calibrar o modelo numérico, os pesquisadores utilizaram os resultados experimentais obtidos por Lahlouh (1995).

2.5.1.1 Critérios adotados

O modelo foi desenvolvido utilizando somente um quarto do silo devido à simetria conforme ilustra a Figura 2.22a e a Figura 2.22b a fim de representar a estrutura do silo e o produto granular (areia). Dessa forma, o modelo foi dividido em três partes: os sólidos a granel, as paredes internas e a base do silo. Para simular o comportamento dos grãos durante o

enchimento, foi adotado um modelo elastoplástico, com base no critério de Drucker-Prager para simular o comportamento plástico. As paredes e a base do silo, constituída de aço, foram consideradas com comportamento elástico linear, conforme a Lei de Hooke, associado a um modelo de plasticidade perfeita, adotando-se a tensão de escoamento de 240 MPa.

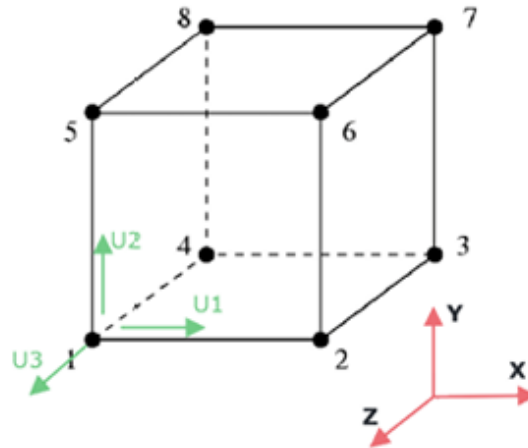
Figura 2.22 - Modelagem de ¼ (a) paredes e fundo do silo; (b) grãos



Fonte: Hilal *et al.* (2022)

Para simular a fase de enchimento, os pesquisadores aplicaram o peso próprio da massa ensilada em várias etapas. Ao fim de cada etapa, o equilíbrio era atingido e somente após isso, era acrescentado mais peso. Pesquisas recentes mostraram que não há uma diferença significativa na pressão horizontal entre fazer o carregamento de uma só vez e fazer o carregamento de forma progressiva quando é usada a abordagem do equilíbrio. Os grãos, as paredes e a base foram discretizados utilizando o elemento linear hexaédrico de 8 nós (*cubic brick element C3D8R*), conforme representado na Figura 2.23.

Figura 2.23 - Elemento hexaédrico C3D8R



Fonte: Hilal *et al.* (2022)

2.5.1.2 Interação grão-parede

A interação entre o grão e a parede foi realizada por meio da modelagem do contato entre esses elementos usando o modelo de discretização *surface-to-surface*. Para definir o contato, há dois tipos de abordagens de interação: *Contact pair interaction* e *General contact interaction*, neste trabalho os autores optaram pela primeira abordagem.

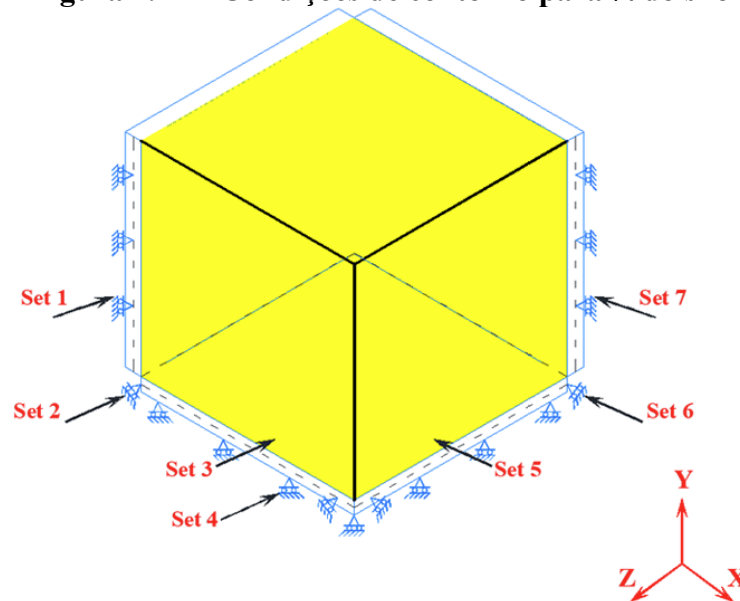
O *Contact pair* é indicado para simular o contato entre o produto granular e a parede, assumindo a hipótese que o coeficiente de atrito é constante. Para simular o atrito entre os grãos e a parede, aplicou-se o modelo “*Coulomb friction*”, o qual relaciona a tensão de cisalhamento (τ_{xy}) e a tensão normal (σ_x) com o coeficiente de atrito (μ), conforme a Equação 2.56.

$$\frac{\tau_{xy}}{\sigma_x} = -\mu \quad (2.56)$$

2.5.1.3 Condições de contorno

As condições de contorno foram determinadas para silos de fundo plano em que a base foi restringida contra deslocamentos na direção y. Os grãos e as paredes tiveram as condições de contorno definidas apenas nos eixos de simetria nas direções x e z para evitar os deslocamentos normais em relação ao plano de simetria. As condições de contorno aplicadas para um quarto do silo são descritas em detalhe abaixo e ilustradas conforme a Figura 2.24.

Figura 2.24 – Condições de contorno para ¼ do silo



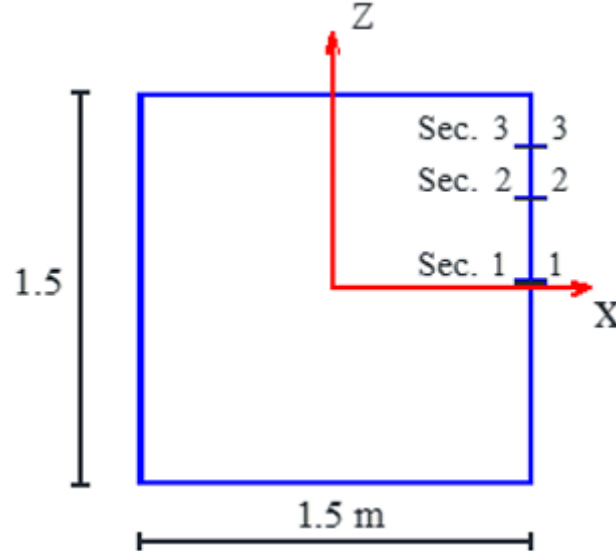
Fonte: Hilal *et al.* (2022)

- *Set 1*: Restrição do movimento lateral da parede ao longo do eixo z, $U_Z = 0$.
- *Set 2*: Restrição do deslocamento lateral da base ao longo do eixo z, $U_Z = 0$
- *Set 3*: Impedir o movimento lateral dos grãos em ZSYMM ($U_Z = U_{RX} = U_{RY} = 0$).
- *Set 4*: Restrição do deslocamento vertical da base na direção y, $U_Y = 0$.
- *Set 5*: Impedir o movimento lateral dos grãos em XSYMM ($U_X = U_{RY} = U_{RZ} = 0$).
- *Set 6*: Restrição do deslocamento lateral da base ao longo do eixo x, $U_X = 0$.
- *Set 7*: Restrição do deslocamento lateral da parede ao longo do eixo x, $U_X = 0$.

2.5.1.4 Resultados

Para a análise das pressões horizontais no interior de um silo quadrado com paredes flexíveis, Lahlouh (1995) realizou medições experimentais em três seções distintas da parede do silo, identificadas como seções 1-1, 2-2 e 3-3, conforme ilustrado na Figura 2.25.

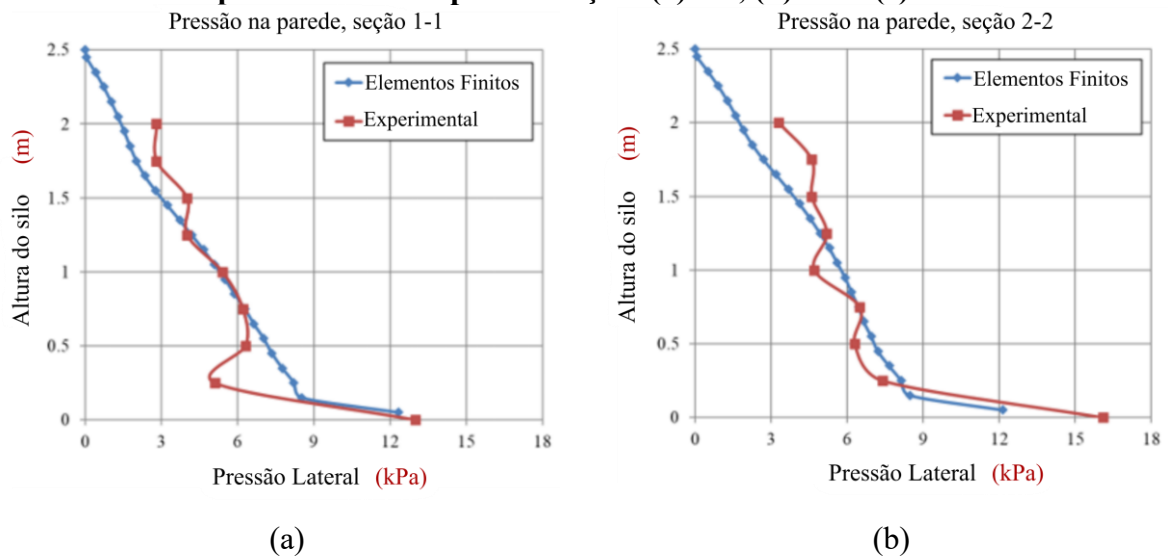
Figura 2.25 - Localização das seções analisadas para medição da pressão horizontal na parede do silo (Lahlouh, 1995)

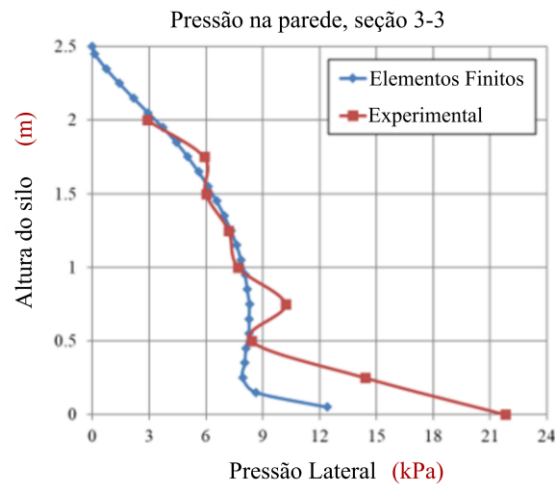


Fonte: Hilal *et al.* (2022)

Os resultados do modelo numérico apresentaram boa concordância com os dados experimentais, evidenciada pelos coeficientes de determinação (R^2) obtidos para as respectivas seções: 0,81 para a seção 1-1, 0,83 para a seção 2-2 e 0,84 para a seção 3-3. As Figuras 4.5a, 4.5b, 4.5c ilustram a comparação entre os resultados obtidos numericamente e os dados experimentais para cada seção analisada.

Figura 2.26 - Comparação entre os resultados experimentais e o modelo numérico de paredes flexíveis para as seções (a) 1-1, (b) 2-2 e (c) 3-3



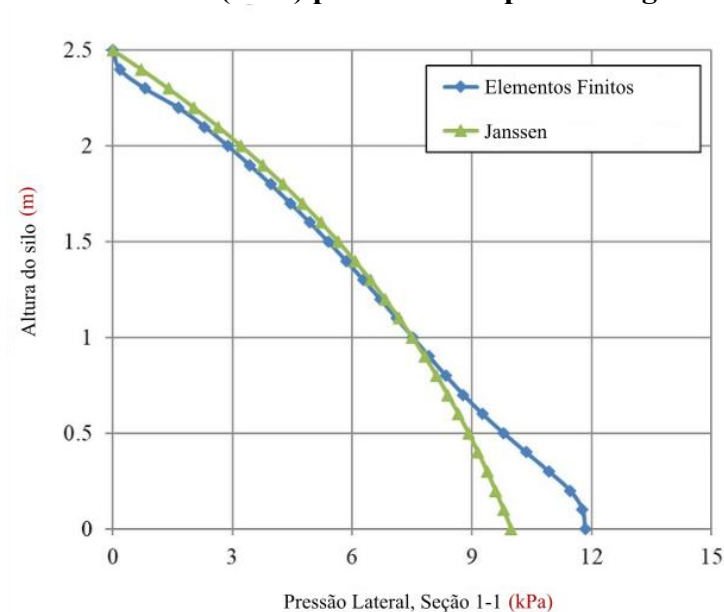


(c)

Fonte: adaptado de Hilal *et al.* (2022)

Após a calibração do modelo, os autores compararam as distribuições de pressão horizontal obtidas via método dos elementos finitos (MEF) com aquelas calculadas teoricamente pela formulação de Janssen (1895), utilizando, nesse caso, um modelo com paredes rígidas. A comparação, apresentada na Figura 2.27, mostra que as pressões obtidas via MEF apresentaram uma boa concordância com as pressões teóricas, principalmente nos dois terços iniciais da parede do silo (na região entre o topo e aproximadamente 0,85 m).

Figura 2.27 - Comparação das pressões horizontais obtidas pelo MEF e pela equação de Janssen (1895) para silo com paredes rígidas

Fonte: adaptado de Hilal *et al.* (2022)

2.5.2 Brown (2008)

Brown (2008), a fim de determinar as tensões atuantes no silo ocasionadas pelo armazenamento de pelotas de minério de ferro durante o processo de descarregamento, modelou um silo por meio do método dos elementos finitos no Abaqus, utilizando a função de partícula rastreadora (*tracer particle*) para acompanhar o deslocamento real do produto. Para a solução do problema dinâmico utilizando elementos finitos, o autor aborda dois tipos de algoritmos: o explícito e o implícito.

2.5.2.1 Tipo de análise

O algoritmo implícito no Abaqus utiliza o operador de Hilber-Hughes-Taylor para integração, que é uma extensão da regra trapezoidal. A solução é então iterada até a convergência usando o método de Newton Raphson. Este algoritmo resolve as equações de movimento por meio de conjuntos de equações diferenciais acopladas nas matrizes de massa e de rigidez de forma simultânea. Apesar de ser, em geral, estável e não apresentar restrições quanto ao tamanho do incremento de tempo, ele demanda um alto custo computacional devido à inversão de matrizes e pode necessitar de várias iterações até atingir a convergência.

O algoritmo explícito, por sua vez, realiza os cálculos com quantidades previamente conhecidas e, portanto, não há necessidade de formar ou inverter as matrizes globais de massa e de rigidez, sem a necessidade de resolver equações de forma simultânea. No processo iterativo, cada incremento não tem um custo computacional muito elevado, embora o tamanho do incremento de tempo afete a estabilidade. Para resolver este problema, o Abaqus adota o método de diferenças centrais, que é condicionalmente estável.

O método de solução explícito apresenta vantagens na resolução de problemas dinâmicos de alta velocidade, onde o tempo modelado é compatível com o incremento de tempo estável. O pesquisador optou por utilizar o algoritmo explícito em decorrência de suas vantagens no tratamento de contatos complexos, de problemas não lineares e de materiais sujeitos a degradação e falha, situações em que os métodos implícitos podem encontrar dificuldades de convergência.

2.5.2.2 Geração de malha adaptativa

O método de geração da malha adaptativa escolhida é o Arbitrário Lagrangiano-

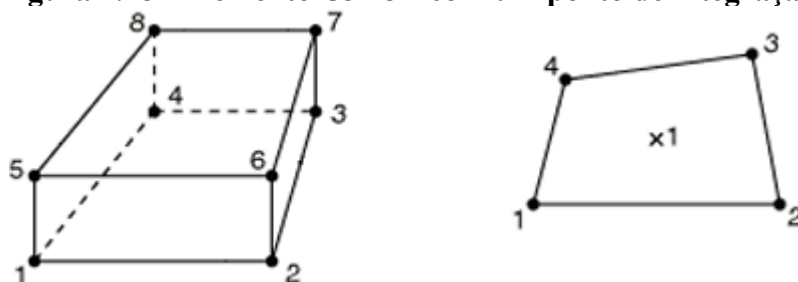
Euleriano (ALE). Este método introduz novos termos, denominados advectivos, no equilíbrio do momento e nas equações de conservação de massa. Esses termos consideram movimento independente da malha e do produto, permitindo que as equações modificadas possam ser resolvidas de forma direta ou por meio de uma divisão de operadores, o qual separa o movimento do sólido do movimento adicional da malha. A análise explícita do Abaqus utiliza esta divisão de operadores devido à sua eficiência computacional.

Deste modo, a cada incremento adaptativo, o modelo é inicialmente tratado de forma puramente lagrangiana. Em seguida, a solução é remapeada para a nova malha, processo realizado por meio de varreduras da malha, de acordo com critérios específicos.

2.5.2.3 Escolha do elemento

Segundo o autor, utilizando o método da malha adaptativa Arbitrário Lagrangiano-Euleriano, os únicos elementos viáveis para a modelagem são aqueles com integração reduzida. Na análise explícita, o único elemento que atende aos requisitos é o elemento hexaédrico de 8 nós C3D8R (Figura 2.28). No entanto, o autor salienta que, por se tratar de um elemento com apenas um ponto de integração, esse elemento pode apresentar problemas de *hourglassing*, uma instabilidade na malha que afeta os elementos de integração reduzida de primeira ordem e elementos de casca de integração reduzida. Para solucionar o problema, o Abaqus oferece uma função chamada de “*hourglass control*”, no entanto é recomendado que a modelagem seja feita utilizando uma malha mais refinada.

Figura 2.28 - Elemento C3D8R com um ponto de integração



Fonte: Brown (2008)

2.5.2.4 Contato por atrito

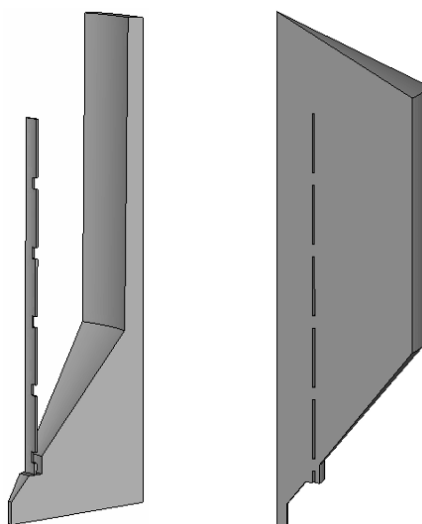
Para considerar o contato entre a parede e os grãos, também foi adotado o modelo

"*Coulomb friction*" do Abaqus, assim como Hilal *et al.* (2022) consideraram, conforme apresentado na seção 2.5.1, no qual a tensão de cisalhamento é definida em função da tensão normal e do coeficiente de atrito entre as superfícies.

2.5.2.5 Modelo numérico

A fim de estudar a distribuição das tensões durante o processo de descarga no interior de um silo de paredes rígidas com um tubo interno, Brown (2008) realizou a modelagem da estrutura utilizando apenas uma fatia de 22,5° devido à simetria do problema para reduzir o custo computacional, conforme apresentado na Figura 2.29. O autor cita dois motivos para realizar a análise de um silo com um tubo interno: possível redução das tensões no produto armazenado devido à redução do movimento no interior do tubo e possibilidade de ter o controle quase que total da rastreabilidade do produto, podendo resultar em um fluxo em tubo artificial. Para simular o comportamento dos grãos durante o processo de descarga do silo, Brown (2008) adotou um modelo elastoplástico para o produto granular, utilizando o critério de Drucker-Prager para definir o comportamento plástico.

Figura 2.29 - Modelagem do silo Brown (2008)



Fonte: Brown (2008)

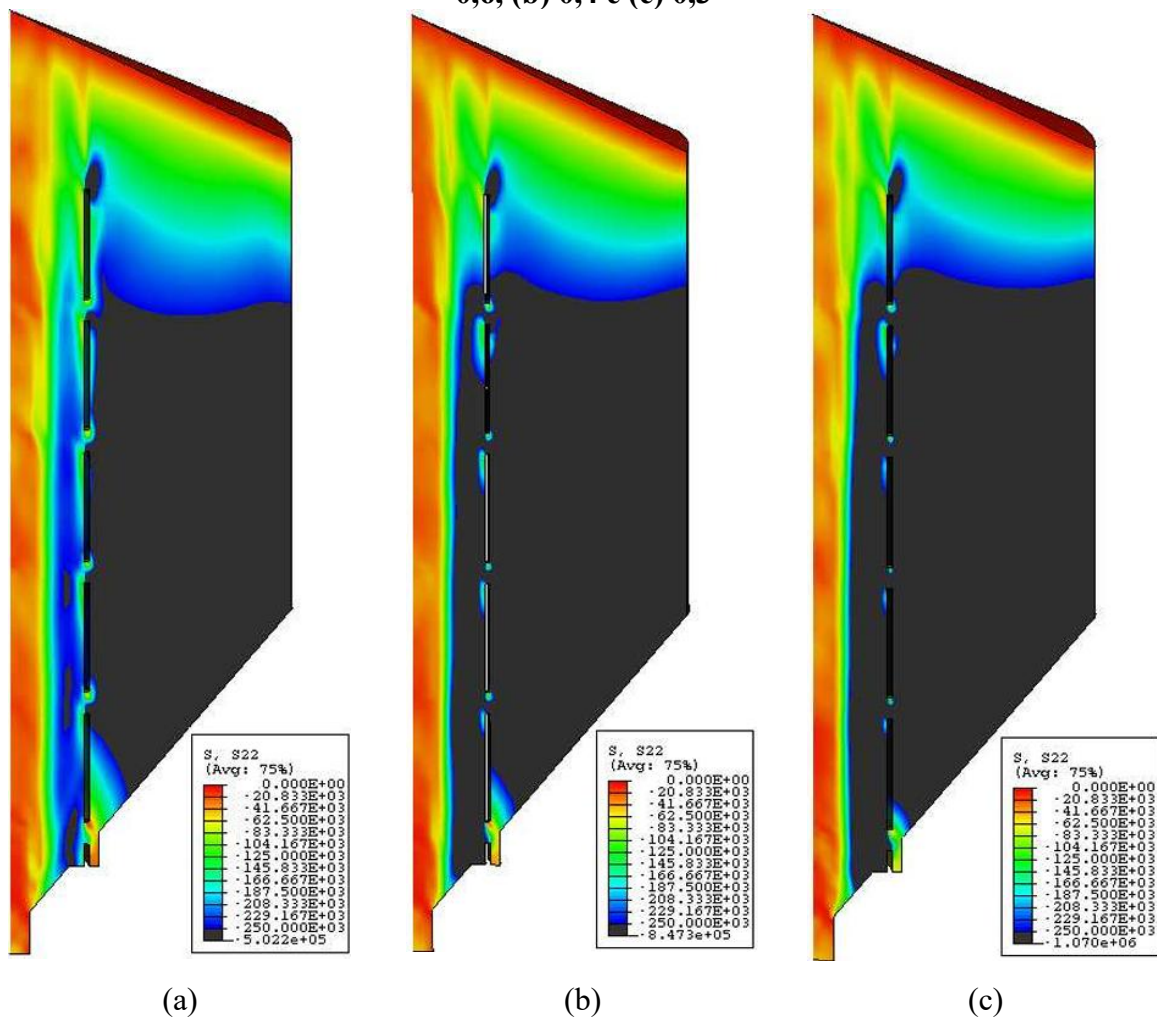
2.5.2.6 Resultados

O pesquisador realizou diversas análises, dentre as quais vale a pena destacar o estudo da influência do coeficiente de atrito e do ângulo de atrito durante o processo de descarga do

silo.

Em relação ao coeficiente de atrito entre o produto e a parede, Brown (2008) observou que valores elevados resultam em baixas tensões no produto armazenado, porém elevam as tensões transmitidas à estrutura. Por outro lado, valores baixos tendem a favorecer a formação de um fluxo de funil. Para avaliar a influência deste parâmetro nas tensões atuantes na estrutura, o pesquisador simulou três modelos distintos, com coeficientes de atrito de 0,3, 0,4 e 0,6. Os resultados indicaram que o padrão de escoamento se manteve praticamente inalterado, sem indícios de desenvolvimento de fluxo de massa. Em relação às tensões normais na estrutura (Figura 2.30), verificou-se que a redução do coeficiente de atrito aumentou as tensões atuantes, enquanto seu aumento levou à diminuição dessas tensões.

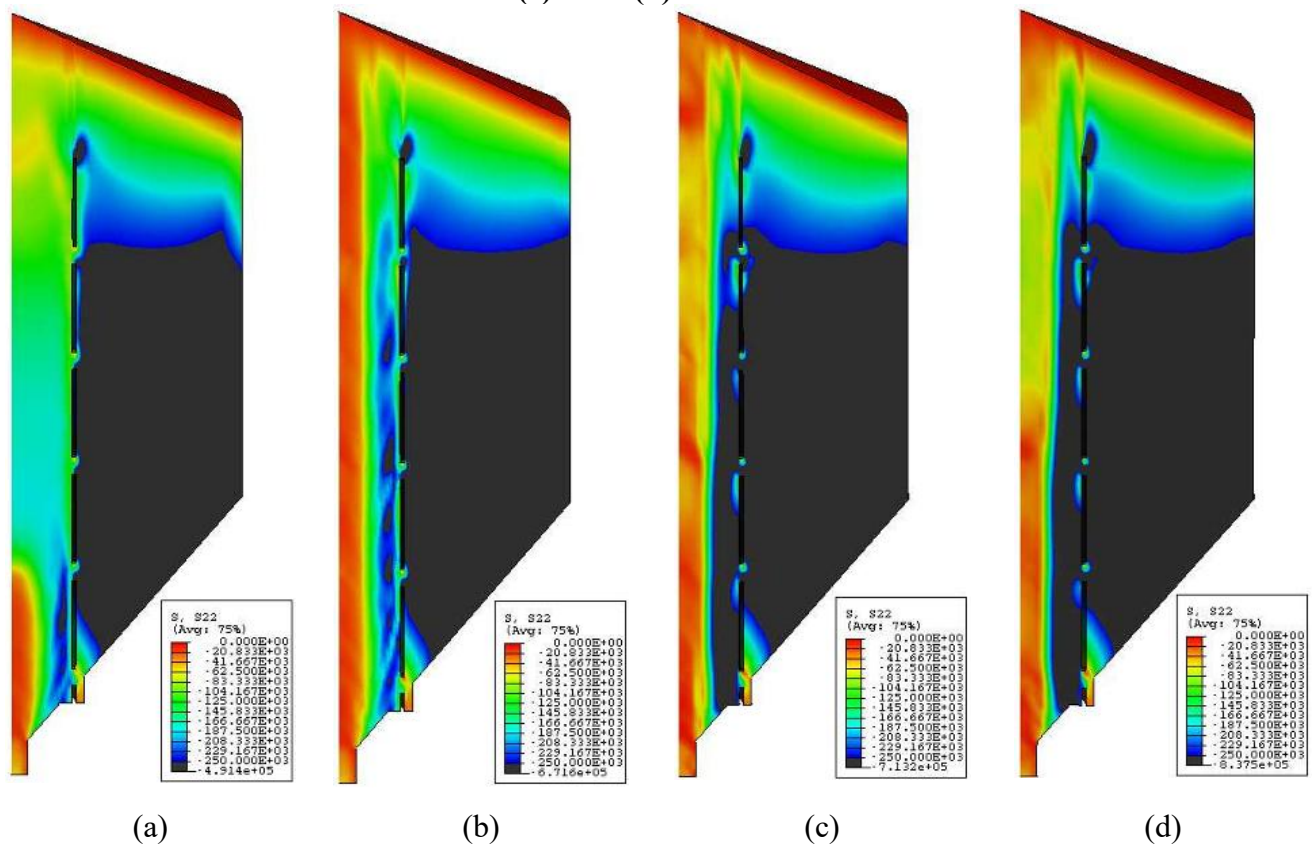
Figura 2.30 – Distribuição da tensão vertical para diferentes coeficientes de atrito (a) 0,6, (b) 0,4 e (c) 0,3



Fonte: Brown (2008)

A respeito da influência do ângulo de atrito interno do produto nas tensões verticais durante o processo de descarga, utilizando o critério de Drucker-Prager, foram desenvolvidos três modelos distintos com ângulos de atrito de 39°, 41°, 48° e 50°, todos associados a um coeficiente de atrito de 0,5. Os resultados demonstraram que, com o parâmetro igual a 39°, o modelo apresentava um fluxo de massa bem definido. Observou-se que o ângulo de atrito e as tensões verticais são diretamente proporcionais, em outras palavras, à medida que o ângulo aumentava, as tensões verticais também se elevavam (Figura 2.31). Esta relação torna-se evidente quando se observa que, para o caso com o parâmetro igual a 50°, a tensão vertical máxima atingiu valores próximos de 370 kPa, enquanto na simulação anterior com 46° essa tensão era de aproximadamente 320 kPa.

Figura 2.31 - Distribuição da tensão vertical para diferentes ângulos de atrito (a) 39° (b) 41° (c) 48° e (d) 50°



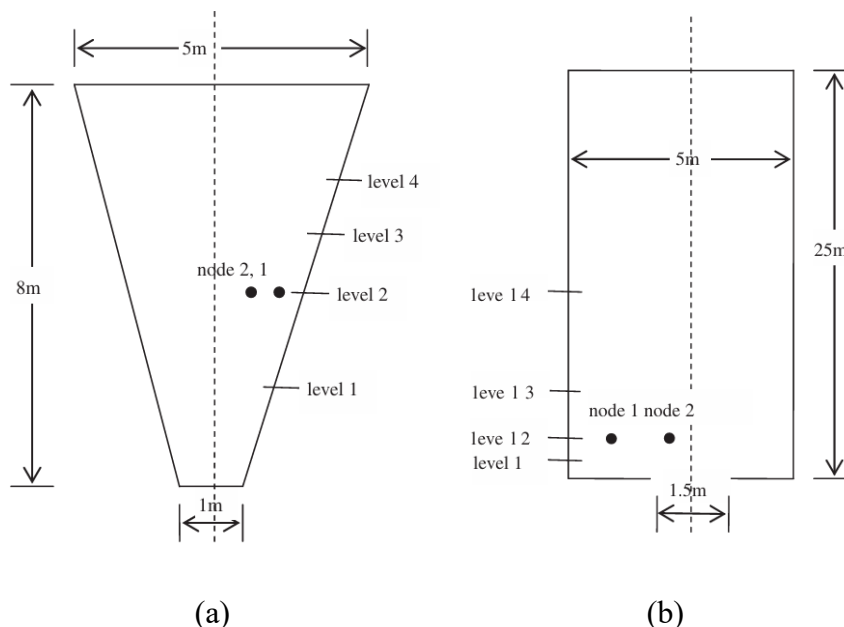
Fonte: Brown (2008)

2.5.3 Yang *et al.* (2011)

A fim de estudar as distribuições das pressões no interior de um silo durante o processo de enchimento e de descarga utilizando o método dos elementos finitos (MEF), os

pesquisadores modelaram um silo de fundo plano e uma tremonha (Figura 2.32a e 2.32b) utilizando o *software* Abaqus.

Figura 2.32 - Geometria (a) da tremonha (b) do silo de fundo plano



Fonte: Yang *et al.* (2011)

2.5.3.1 Tipo de análise

A modelagem, por se tratar de um problema dinâmico, foi feita de maneira similar à proposta por Brown (2008). Primeiramente, foi feita a modelagem do processo de enchimento do silo utilizando a ferramenta “*switch-on loading of gravity*”, a qual introduz a aceleração da gravidade de forma gradual, permitindo simular o efeito de enchimento. Para o problema da análise de tensões e deslocamentos, os autores utilizaram a análise numérica explícita (Abaqus/Explicit), assim como Brown (2008).

Para a modelagem, os autores simularam o processo de enchimento de maneira suave e gradual para prevenir o surgimento de ondas de tensão. Para isso, o carregamento devido à gravidade é aplicado de forma suave, usando a função de amplitude de carga de 3ª ordem disponível no Abaqus. A fim de garantir a confiabilidade nos resultados, a energia cinética, a energia interna, os deslocamentos finais e as distribuições de tensão ao final do preenchimento devem permanecer estáveis, ou sofrer o mínimo possível de oscilações.

Após a modelagem do processo de enchimento, foi feita a modelagem do processo de descarga. Para fazer a simulação deste processo, os autores também empregaram o método

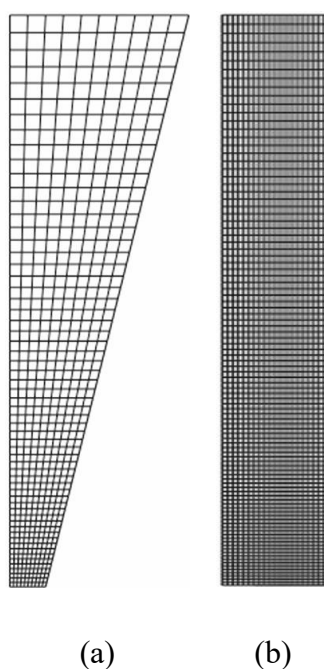
explícito do Abaqus, o método de análise Arbitrário Lagrangiano-Euleriano (ALE), em conjunto com a técnica das malhas adaptativas.

A parte Lagrangiana na modelagem foi empregada no contorno dos grãos e na parte superior do silo, enquanto que a parte Euleriana foi empregada na parte da saída do silo. Isso garante que os grãos deslizem ao longo das paredes do silo e que a malha superior acompanhe o produto durante a descarga. A técnica de malha adaptativa é empregada para evitar a distorção da malha e assegurar sua qualidade ao longo das análises, mesmo em situações de grandes deformações ou de perda de produto granular, possibilitando, ainda, o movimento da malha de forma independente dos grãos.

2.5.3.2 Modelagem da tremonha e do silo de fundo plano

A tremonha foi modelada com 600 elementos do tipo CPS4R, que é um elemento bidimensional (2D), quadrilátero de 4 nós, com integração reduzida. Para o silo de fundo plano, a modelagem da malha foi realizada utilizando 2000 elementos do tipo CPS4R. As paredes do silo e da tremonha foram modeladas considerando como elementos rígidos e a interação entre grão-parede foi definida com base no critério de Mohr-Coulomb. As malhas do silo de fundo plano e a da tremonha são apresentadas na Figura 2.33.

Figura 2.33 - Malha (a) da tremonha (b) do silo de fundo plano



Fonte: Yang *et al.* (2011)

Para a representação do comportamento do produto granular, os autores desenvolveram dois modelos numéricos distintos utilizando o critério de Drucker-Prager e um modelo constitutivo não coaxial. As propriedades adotadas para a modelagem do produto granular, tais como o peso específico (γ), ângulo de atrito interno (ϕ_i), ângulo de dilatância (ψ), ângulo de atrito entre o produto armazenado e a parede (ϕ_w), coeficiente de Poisson (ν) e módulo de elasticidade (E), estão apresentadas na Tabela 2.8.

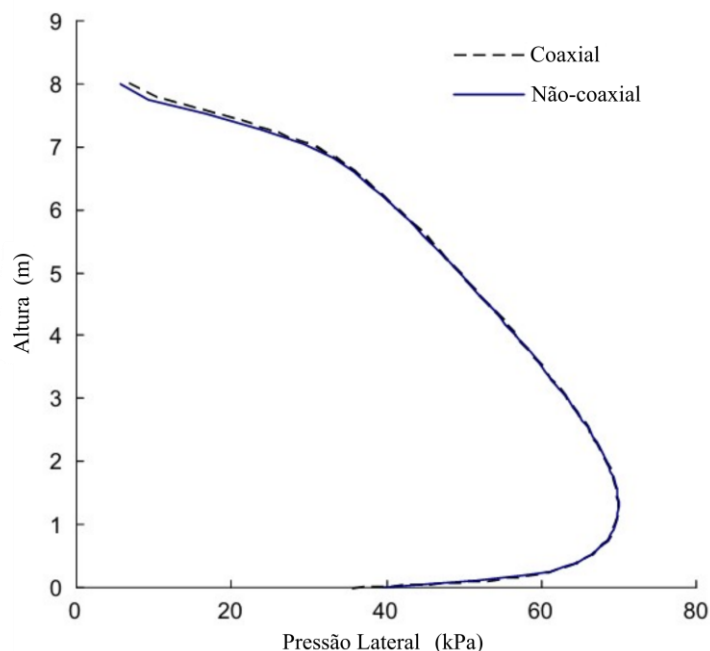
Tabela 2.8 – Propriedades do produto granular do modelo de Yang *et al.* (2011)

Peso específico (γ) (kN/m ³)	ϕ_i (°)	ψ (°)	ϕ_w (°)	ν	E (kPa)
14,17	35	33,6	18	0,18	10000

Fonte: Autor (2026)

2.5.3.3 Resultados

A fim de comparar dois modelos constitutivos distintos, Drucker-Prager (modelo coaxial) e um modelo não coaxial para avaliar o comportamento do produto granular durante o processo de carregamento e descarga de silos. Para realizar esta análise, os autores compararam os resultados da pressão horizontal entre os dois modelos constitutivos. Durante o processo de carregamento (Figura 2.34), observou-se que a diferença entre os modelos foi pouco significativa em termos de distribuição da pressão horizontal, indicando que o modelo constitutivo não coaxial não influencia nas pressões horizontais durante o enchimento. Entretanto, foi durante a fase de descarga que as diferenças mais relevantes foram notadas, observou-se que o modelo constitutivo não coaxial apresentou pressões nas paredes maiores do que o modelo coaxial.

Figura 2.34 - Comparação entre os modelos constitutivos

Fonte: adaptado de Yang *et al.* (2011)

Observa-se que, embora os trabalhos apresentados tenham contribuído significativamente para a compreensão da modelagem numérica de silos pelo método dos elementos finitos, nenhum deles calibrou o modelo desenvolvido a partir de dados experimentais de pressões obtidos em um silo armazenando produtos agrícolas, tampouco comparou os resultados numéricos com normativas internacionais. Além disso, os estudos de Brown (2008) e Yang *et al.* (2011) concentram-se no processo de descarga sob análise dinâmica, sem avaliar a influência da geometria do silo e das propriedades de diferentes produtos armazenados sobre a magnitude e a distribuição das pressões horizontais. O presente trabalho busca preencher essa lacuna, calibrando o modelo numérico a partir dos dados experimentais de Cheung (2007) e comparando os resultados numéricos obtidos com a teoria de Janssen (1895), além de comparar os resultados experimentais com normativas internacionais, avaliando ainda a influência da geometria do silo e das propriedades de diferentes grãos de relevância para o agronegócio brasileiro.

2.5.4 Cheung (2007)

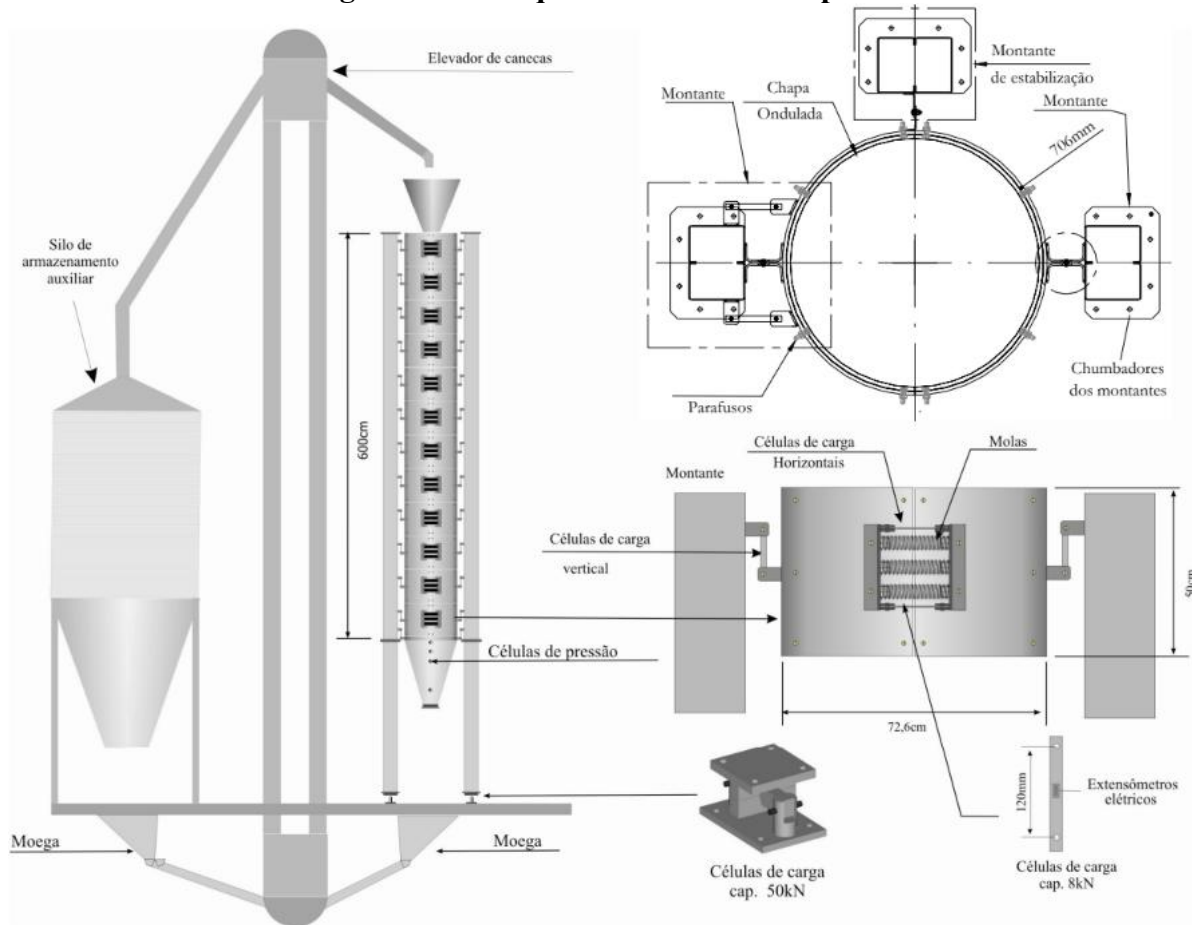
Cheung (2007), em sua tese de doutorado, iniciou o ensaio experimental com a seleção dos produtos a serem utilizados, escolhendo milho, soja e ração de frango por sua

representatividade na produção nacional e pelas características geométricas distintas de seus grãos. Em seguida, os ensaios foram divididos em duas etapas: a caracterização das propriedades físicas dos produtos armazenados e o ensaio no silo-piloto.

Para obter as propriedades físicas do produto, o pesquisador realizou o ensaio de umidade, temperatura e peso específico aparente utilizando o Medidor de Umidade Digital modelo G800, por meio da tecnologia “*flowthru*”. Em seguida, foi feito um ensaio granulométrico utilizando o aparelho de granulometria da Solotest por meio do peneiramento. Por fim foi feito um ensaio de cisalhamento direto para determinar ângulo de atrito do produto armazenado com a parede e um ensaio de cisalhamento direto de Jenike utilizando o equipamento “*Jenike Shear Tester*” para obter algumas propriedades de fluxo, tais como: peso específico (γ), efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e), peso específico consolidado (γ_i), ângulo de atrito interno (ϕ_i), função fluxo instantânea (FF), resistência ao deslizamento da amostra confinada (f_c) e resistência ao deslizamento da amostra inconfina (f_{ic}).

Para obter as pressões internas nas paredes do silo, Cheung (2007) instalou células de carga ao longo do comprimento do silo-piloto para aferir as pressões, conforme ilustra a Figura 2.35. O pesquisador realizou diversos ensaios de carregamento e descarregamento para os três tipos de produtos: soja, milho e ração de frango.

Figura 2.35 - Esquema ensaio no silo-piloto



Fonte: Cheung (2007)

A escolha das tremonhas para o experimento considerou critérios relacionados ao tipo de fluxo associado e aos modelos mais utilizados no Brasil. Portanto, Cheung (2007) analisou três configurações: um silo de fundo plano (sem tremonha), uma tremonha com inclinação de 45° e outra com uma inclinação de 15° , conforme ilustrado nas Figuras 2.36a, 2.36b e 2.36c, respectivamente.

Figura 2.36 - Tipos de tremonha utilizadas no ensaio (a) Fundo plano, (b) Tremonha $\alpha = 45^\circ$ e (c) Tremonha $\alpha = 15^\circ$



(a)

(b)

(c)

Fonte: Cheung (2007)

Realizado os ensaios de umidade, peso específico aparente e granulometria, o pesquisador obteve os valores médios presentes na Tabela 2.9 para os produtos soja, milho e ração de frango. No ensaio de granulometria, observou-se que todas os grãos de soja e de milho ficaram retidos na peneira de abertura superior (0,42 mm), indicando que os produtos podem ser classificados como granulares. A ração de frango teve 94,53% do produto ficou retido na peneira nº 10, podendo também ser classificada como granular.

Tabela 2.9 - Análise da fluidez com base na função fluxo

Produto	Peso específico aparente (kN/m³)	Umidade (%)
Soja	7,15	10,99
Milho	7,90	13,57
Ração de frango	7,91	13,57

Fonte: Adaptado de Cheung (2007)

A Tabela 2.10 apresenta os valores médios obtidos por meio do ensaio de cisalhamento direto de Jenike e do ensaio de cisalhamento direto do produto com a parede interna lisa. Tais resultados foram o peso específico (γ), a coesão (c), o ângulo de atrito interno (ϕ_i), o efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e), o ângulo de atrito com a parede de aço rugoso (ϕ_{w1}) e com a parede de aço liso (ϕ_{w2}), a resistência inconfínada (f_{ic}) e a resistência confinada (f_c) para o milho, soja

e ração de frango.

Tabela 2.10 - Propriedades dos produtos obtidas por meio do ensaio de cisalhamento direto

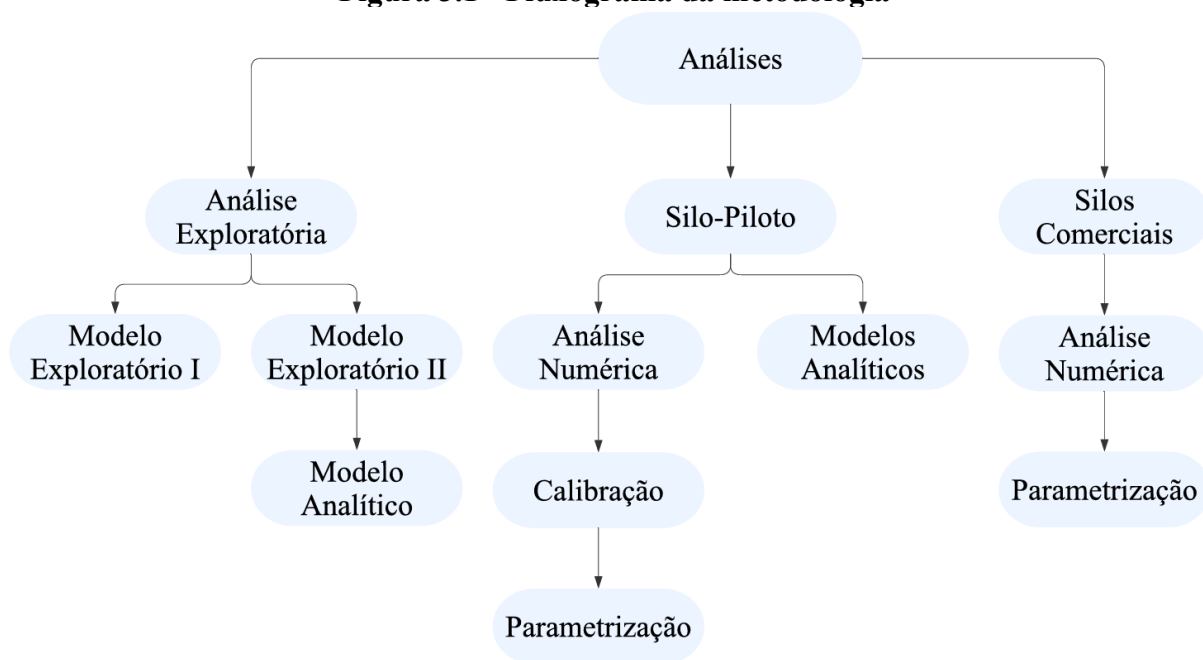
Produto	Peso específico (kN/m³)	Coesão c (kPa)	ϕ_i (°)	ϕ_e (°)	ϕ_{w1} (°)	ϕ_{w2} (°)	f_{ic} (kPa)	f_c (kPa)
Soja	7,180	0,23	34,81	35,71	10,68	10,53	0,84	23,73
Milho	8,100	0,04	29,53	29,78	12,72	10,66	0,11	10,28
Ração de frango	7,928	0,90	37,98	41,54	18,17	12,78	3,63	24,70

Fonte: adaptado de Cheung (2007)

3 METODOLOGIA

O presente capítulo descreve os procedimentos adotados para o desenvolvimento e calibração dos modelos numéricos aplicados à análise das pressões horizontais de carregamento atuantes em silos metálicos cilíndricos com fundo plano, conforme ilustrado no fluxograma da Figura 3.1.

Figura 3.1 - Fluxograma da metodologia



Fonte: Autor (2026)

Inicialmente, são descritos os modelos numéricos exploratórios e o modelo de calibração desenvolvidos nesta pesquisa, incluindo as estratégias de modelagem, as propriedades dos materiais e dos produtos adotados, as condições de contorno e os tipos de carregamento considerados. Em seguida, são apresentados os estudos para calibrar o modelo e os parâmetros a serem avaliados na análise paramétrica tanto dos silos quanto dos grãos, bem como as estratégias de modelagem consideradas. Por fim, são apresentados os modelos analíticos de cálculo das pressões horizontais em silos.

A calibração do modelo foi realizada com base nos resultados experimentais obtidos por Cheung (2007), os quais incluem ensaios de caracterização física de grãos e medições de pressão em um silo-piloto.

Para as modelagens numéricas, foi utilizado o *software* Abaqus/CAE versão 6.14. O desempenho de aplicações baseadas no Método dos Elementos Finitos depende da arquitetura do processador, podendo apresentar diferentes tempos de processamento conforme o *hardware* utilizado (Banás; Kružel; Bielański, 2016). Neste estudo, as simulações foram executadas em um computador equipado com processador Intel Core i3 12ª geração e 16 GB de memória RAM.

3.1 SIMULAÇÕES EXPLORATÓRIAS

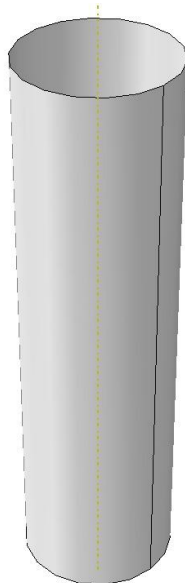
Este subcapítulo aborda os estudos realizados na fase inicial da pesquisa, cujo objetivo principal foi explorar os recursos do *software* Abaqus/CAE versão 6.14 e desenvolver as primeiras aproximações do problema da análise das pressões internas na parede de um silo. Para isso, foram desenvolvidos dois modelos com diferentes níveis de complexidade: um Modelo Exploratório I, com geometria simplificada e sem representação dos grãos, voltado à familiarização com a ferramenta; e um Modelo Exploratório II, mais completo, que incorpora a modelagem dos grãos e busca analisar a magnitude e as distribuições das pressões na condição estática.

Essas análises foram fundamentais para compreender os aspectos essenciais da modelagem numérica em silos e estabelecer as bases para análises mais avançadas em seções posteriores.

3.1.1 Modelo Exploratório I

O modelo numérico Exploratório I, desenvolvido com base nas instruções disponíveis no material didático UFPR (2017), representa um silo metálico cilíndrico, com 11 metros de altura e 3 metros de diâmetro, modelado com chapas de aço de 2 mm de espessura, conforme ilustrado na Figura 3.2. Para a modelagem do material foi considerado o comportamento elástico, adotando-se um aço com densidade de 8154,94 kg/m³, módulo de elasticidade de 205 GPa e coeficiente de Poisson igual a 0,3.

Figura 3.2 - Silo Modelo Exploratório I



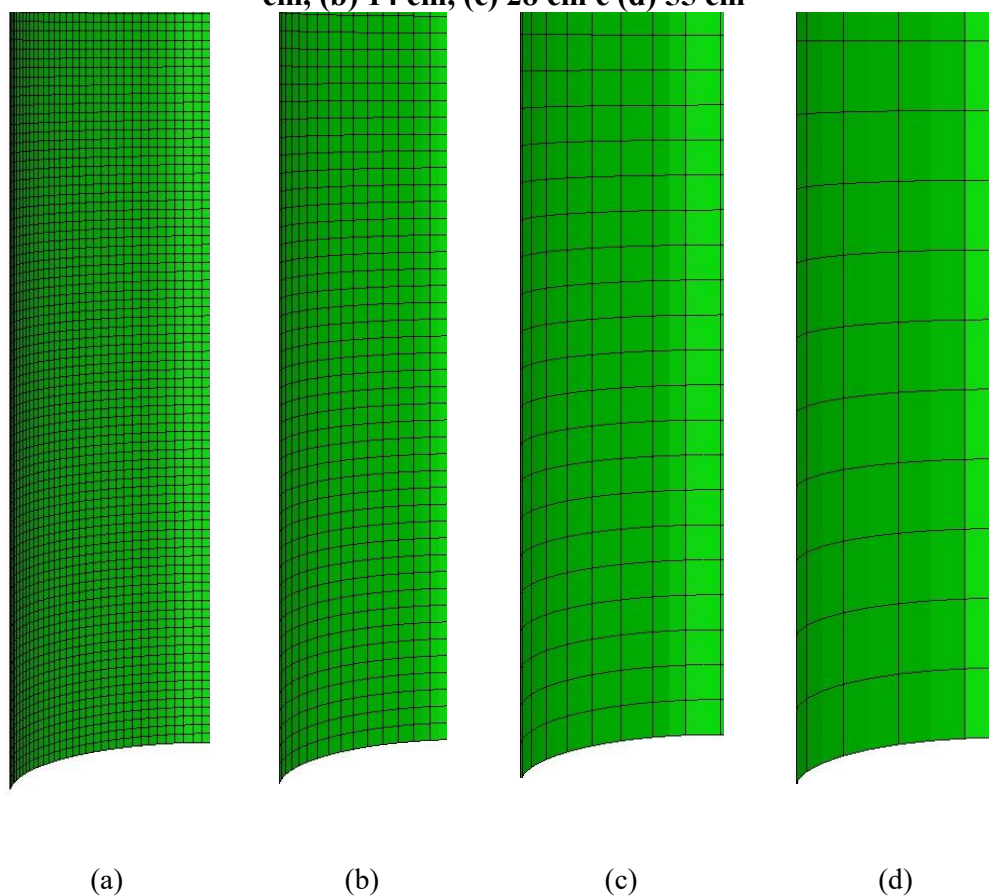
Fonte: Autor (2026)

3.1.1.1 Estratégia de modelagem do Modelo Exploratório I

O modelo foi desenvolvido utilizando o elemento S8R, um elemento do tipo casca (*shell element*) com oito nós e integração reduzida, indicado para simular estruturas delgadas.

Com o objetivo de garantir a precisão e eficiência computacional do modelo, foi realizado um estudo de sensibilidade de malha. Foram testados tamanhos de elemento iniciando em $55\text{ cm} \times 55\text{ cm}$, com sucessivas reduções pela metade até atingir $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ (Figura 3.3), sendo a malha de $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ a configuração adotada no modelo.

Figura 3.3 - Malhas utilizadas na análise de sensibilidade ao refinamento da malha (a) 7 cm, (b) 14 cm, (c) 28 cm e (d) 55 cm



Fonte: Autor (2026)

Para o carregamento da estrutura, foram consideradas três ações principais. A primeira corresponde a uma pressão interna constante de 10 kPa, aplicada de forma uniforme ao longo da superfície interna da parede do silo, representando a pressão horizontal exercida pelos grãos. A segunda refere-se ao peso próprio da estrutura, incorporado ao modelo por meio da aceleração da gravidade ($9,81 \text{ m/s}^2$). Por fim, considerou-se a carga da cobertura do silo, modelada como uma carga uniformemente distribuída ao redor da parte superior da estrutura, com intensidade de $0,160 \text{ kN/m}$.

É importante destacar que, neste modelo, optou-se por adotar uma pressão interna constante ao longo da altura da parede do silo como forma de simplificar o problema e facilitar a análise inicial do comportamento estrutural. No entanto, essa abordagem, na prática, não ocorre, diversos estudos (Cheung, 2007; Hilal *et al.*, 2022; Dornelas *et al.*, 2024) demonstram que a pressão horizontal exercida pelos grãos varia com a profundidade.

No modelo numérico, apenas a base do silo foi restringida, adotando-se a condição de

contorno de engaste (“*encastre*”), na qual os deslocamentos e as rotações em todas as direções são impedidos ($UX = UY = UZ = URX = URY = URZ = 0$), conforme ilustrado na Figura 3.4.

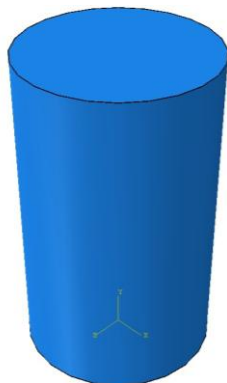
Figura 3.4 - Condições de contorno aplicadas ao Modelo Exploratório I



Fonte: Autor (2026)

3.1.2 Modelo Exploratório II

O modelo numérico Exploratório II representa um silo metálico cilíndrico, com 6 metros de altura e 3 metros de diâmetro, modelado com chapas de aço de 10 mm de espessura, totalmente preenchido com grãos de milho, conforme ilustrado na Figura 3.5. Para a representação do comportamento dos materiais no modelo numérico, adotou-se um modelo constitutivo elastoplástico.

Figura 3.5 – Silo analisado

Fonte: Autor (2026)

No caso do aço, foram consideradas as seguintes propriedades: densidade, tensão de escoamento (f_y), coeficiente de Poisson (ν) e módulo de elasticidade (E), cujos valores estão apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 - Propriedades do aço aplicadas no Modelo Exploratório II

Material	Densidade (kg/m^3)	f_y (MPa)	ν	E (GPa)
Aço	7500	240	0,30	210

Fonte: Adaptado de Hilal *et al.* (2022)

As propriedades utilizadas na modelagem elastoplástica dos grãos, como peso específico (γ), coesão (c), ângulo de atrito (ϕ_i) e de dilatância (ψ), bem como os parâmetros do modelo constitutivo, o coeficiente de atrito (μ_w), o coeficiente de Poisson (ν) e o módulo de elasticidade (E), estão apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 - Propriedades do milho aplicadas para o Modelo Exploratório II

Produto	Peso específico (γ) (kN/m^3)	Coesão c (kPa)	ϕ_i (°)	ψ (°)	μ_w	ν	E (kPa)
Milho	7,52	7	38,8	33,6	0,34	0,18	34800

Fonte: Adaptado de Moya, Sánchez e Villar-García (2022)

3.1.2.1 Estratégia de modelagem do Modelo Exploratório II

Os grãos de milho foram modelados com base no critério de falha de Drucker-Prager, de modo a representar adequadamente o comportamento plástico do produto granular, cujos

valores das propriedades utilizadas encontram-se na Tabela 3.3. Como o ângulo de atrito interno foi determinado a partir do ensaio de compressão triaxial, este parâmetro é expresso segundo o critério de Mohr-Coulomb. Assim, torna-se necessário calcular o referido ângulo em termos do critério de Drucker-Prager, por meio da Equação (3.1):

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{6 \text{ sen } (38,8^\circ)}{3 - \text{sen } (38,8^\circ)} \right) = 57,74^\circ \quad (3.1)$$

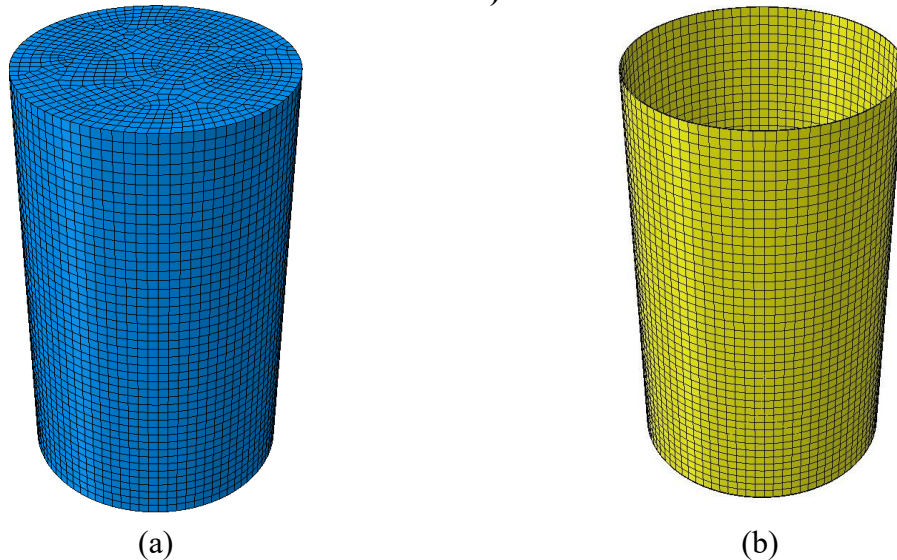
Tabela 3.3 - Parâmetros adotados para o critério de Drucker-Prager

Ângulo de atrito β (°)	<i>Flow Stress Ratio</i>	Ângulo de Dilatância (°)	<i>Yield Stress</i> (kPa)	<i>Abs Plastic Strain</i>
57,74	1	33,6	7	0

Fonte: Autor (2026)

O silo foi subdividido em duas partes: paredes e fundo, ambos representados por sólido C3D8R, um elemento tridimensional hexaédrico de oito nós de integração reduzida. Os grãos também foram modelados como sólidos, utilizando o mesmo tipo de elemento, com discretização de malha de 11 cm, conforme ilustrado na Figura 3.6a e na Figura 3.6b.

Figura 3.6 - Discretização da malha de 11 cm (a) Grãos e (b) Estrutura de aço (parede e fundo)

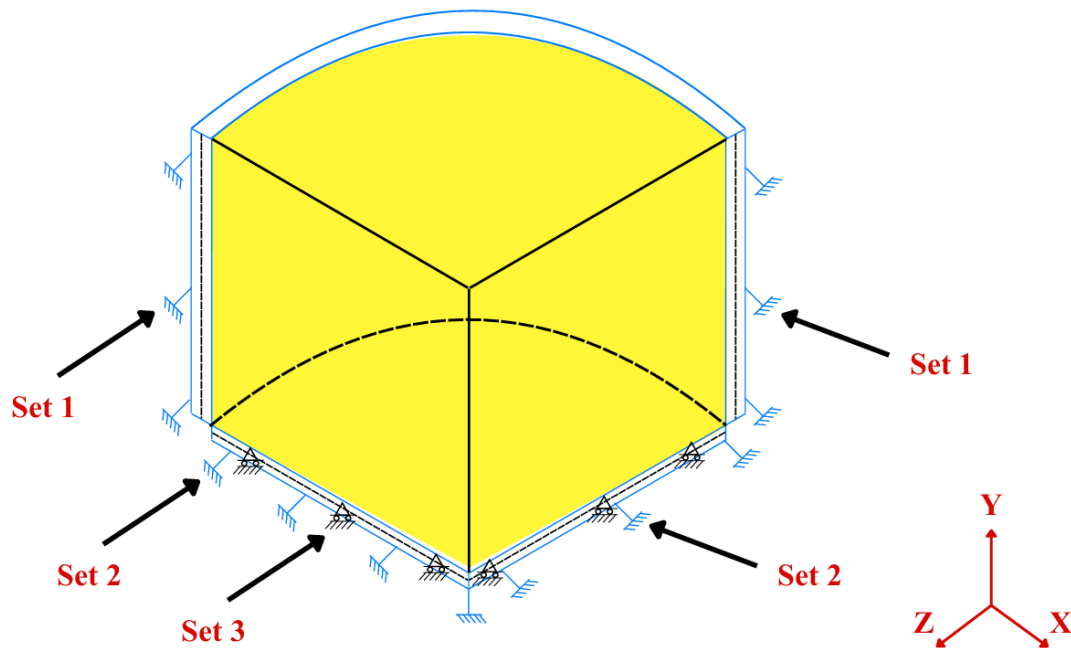


Fonte: Autor (2026)

Para o carregamento da estrutura, foi considerado exclusivamente o peso próprio dos grãos, incorporado ao modelo por meio da aceleração da gravidade ($9,81\text{m/s}^2$). Dessa forma, não foram consideradas outras ações atuando sobre a estrutura.

Em relação às condições de contorno, a base e as paredes do silo foram completamente restritas, onde o deslocamento e a rotação em todas as direções foram impedidos. Além disso, restringiu-se o deslocamento vertical dos grãos por meio de uma condição de contorno aplicada na base do produto granular. As informações detalhadas e os sets nos quais foram aplicadas as restrições são apresentadas na Figura 3.7.

Figura 3.7 - Condições de contorno do Modelo Exploratório II



Fonte: Autor (2026)

- Set 1: Engaste na parede, $U_X = U_Y = U_Z = U_{RX} = U_{RY} = U_{RZ} = 0$.
- Set 2: Engaste na base do silo, $U_X = U_Y = U_Z = U_{RX} = U_{RY} = U_{RZ} = 0$.
- Set 3: Restrição do deslocamento vertical dos grãos ao longo do eixo y, $U_Y = 0$.

Para implementar a interação entre os grãos e a estrutura no modelo, foi definida uma condição de contato entre os materiais. Esse contato foi modelado utilizando a ferramenta de interação de contato superfície-a-superfície (*standard contact pair interaction*), disponível na biblioteca do Abaqus. Nessa configuração, a superfície interna do silo foi definida como superfície mestre (*master surface*) e a superfície externa dos grãos como superfície escrava (*slave surface*), conforme adotado por Nateghi (2011).

No modelo, o contato foi considerado em duas regiões distintas:

- Entre a parede interna do silo e a superfície lateral dos grãos;

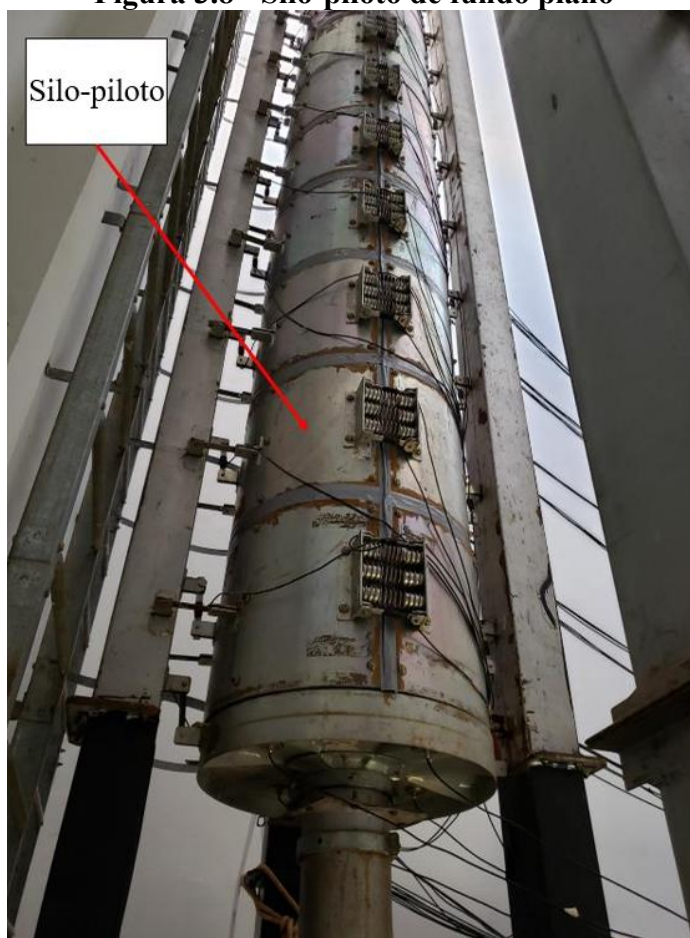
- Entre o fundo do silo e a base dos grãos.

3.2 CALIBRAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

3.2.1 Dados Experimentais

O ensaio de Cheung (2007) utilizado para calibrar o modelo numérico foi realizado em um silo-piloto de fundo plano composto por 12 anéis, cada um com 50 cm de altura, com diâmetro interno de 70,6 cm e parede interna lisa, totalizando uma altura de 600 cm (Figura 3.8). Para os ensaios experimentais, o autor preencheu o silo-piloto com os grãos até a altura de 550 cm, mesma condição adotada na modelagem numérica desenvolvida neste trabalho. O silo-piloto foi instrumentado com 12 células de carga ao longo de sua altura, posicionadas no centro de cada anel, conforme ilustrado na Figura 2.35, estando a última situada a uma profundidade de aproximadamente 5,25 m.

Figura 3.8 - Silo-piloto de fundo plano



Fonte: Adaptado de Gandia (2022)

A Tabela 3.4 apresenta os valores inferiores, médios e superiores obtidos por meio do ensaio de cisalhamento direto de Jenike e do ensaio de cisalhamento direto do produto em contato com a parede interna lisa. Os resultados incluem o peso específico (γ), a coesão (c), o ângulo de atrito interno (ϕ_i), o efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e), o ângulo de atrito com a parede de aço rugoso (ϕ_{w1}) e com a parede de aço liso (ϕ_{w2}), a resistência inconfina (f_{ic}) e a resistência confinada (f_c) para a soja, produto de referência para calibração do modelo numérico desenvolvido neste trabalho.

Tabela 3.4 - Propriedades da soja obtidas por meio do ensaio de cisalhamento direto

Valor	Peso específico (kN/m ³)	Coesão c (kPa)	ϕ_i (°)	ϕ_e (°)	ϕ_{w1} (°)	ϕ_{w2} (°)	f_{ic} (kPa)	f_c (kPa)
Inferior	6,92	-	27,30	28,60	7,20	8,31	-	12,50
Média	7,18	0,23	34,81	35,71	10,68	10,53	0,84	23,73
Superior	7,48	-	40,30	43,00	17,39	13,35	-	36,06

Fonte: Adaptado de Cheung (2007)

3.2.2 Estratégia de modelagem do Modelo Inicial

O modelo tridimensional, denominado Modelo Inicial, foi desenvolvido com base na geometria do silo-piloto utilizado por Cheung (2007). Esse modelo foi adotado como configuração de referência para as análises subsequentes, incluindo os estudos de sensibilidade, escolha do modelo constitutivo e avaliação das estratégias de modelagem. Para os materiais, considerou-se um comportamento elastoplástico.

Para a modelagem do aço, neste estudo, adotou-se as mesmas propriedades mecânicas consideradas por Hilal *et al.* (2022) em sua pesquisa, tais como densidade, tensão de escoamento (f_y), coeficiente de Poisson (ν) e módulo de elasticidade (E), sendo os valores apresentados na Tabela 3.5.

Tabela 3.5 – Propriedades do aço silo aplicadas ao Modelo Inicial

Material	Densidade (kg/m ³)	f_y (MPa)	ν	E (GPa)
Aço	7500	240	0,30	210

Fonte: Adaptado de Hilal *et al.* (2022)

As propriedades utilizadas na modelagem elastoplástica dos grãos de soja, como peso

específico (γ), coesão (c), ângulo de atrito (ϕ_i) e de dilatância (ψ), bem como os parâmetros do modelo constitutivo, o ângulo de atrito do produto com a parede (ϕ_w), o coeficiente de atrito (μ), o coeficiente de Poisson (ν) e o módulo de elasticidade (E), estão apresentadas na Tabela 3.6.

Tabela 3.6 - Propriedades da soja aplicadas ao Modelo Inicial

Propriedade	Valor	Referência
Peso específico (kN/m ³)	7,18	Cheung (2007)
ϕ_w (°)	10,53	Cheung (2007)
μ_w	0,186	Cheung (2007)
ϕ_i (°)	34,81	Cheung (2007)
Coesão c (kPa)	0,23	Cheung (2007)
E (kPa)	3476	Definido a partir de estudo de sensibilidade
ν	0,20	Definido a partir de estudo de sensibilidade
ψ (°)	14	Martins (2012)

Fonte: Autor (2026)

Os dados necessários para modelagem numérica que não foram apresentados no trabalho de Cheung (2007), como módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e o ângulo de dilatância, adotou-se valores fundamentados em trabalhos da literatura.

Para simular o comportamento dos grãos na condição estática, a modelagem foi feita utilizando o critério de Drucker-Prager, cujos valores das propriedades utilizadas encontram-se na Tabela 3.7, de modo a representar o comportamento plástico do produto granular. Analogamente ao que foi feito para o Modelo Exploratório II, foi calculado o ângulo de atrito interno conforme o critério de Drucker-Prager.

Como o ângulo de atrito interno foi obtido por meio do ensaio de cisalhamento direto, este parâmetro é expresso segundo o critério de Mohr-Coulomb. Portanto, torna-se necessário convertê-lo para o critério de Drucker-Prager, conforme a Equação (3.2).

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{6 \text{ sen } (34,81^\circ)}{3 - \text{sen } (34,81^\circ)} \right) = 54,66^\circ \quad (3.2)$$

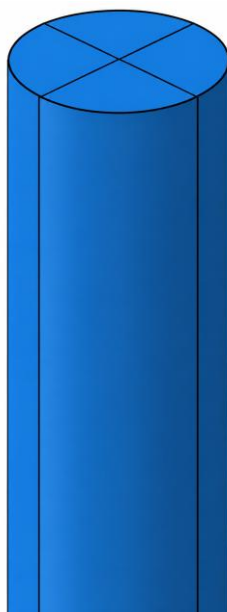
Tabela 3.7 - Parâmetros adotados para o critério de Drucker-Prager

Ângulo de atrito β (°)	<i>FlowStress Ratio</i>	Ângulo de Dilatância (°)	<i>Yield Stress</i> (kPa)	<i>Abs Plastic Strain</i>
54,66	1	14	0,23	0

Fonte: Autor (2026)

Seguindo a mesma estratégia adotada para o Modelo Exploratório II, o silo-piloto foi subdividido em duas partes: paredes e fundo, ambos modelados utilizando o elemento sólido C3D8R, sem a representação dos anéis e considerando espessura constante para a parede (Brown, 2008; Goodey; Brown; Rotter, 2017; Hilal *et al.*, 2022; Zhao *et al.*, 2023). No entanto, tanto o produto, quanto a estrutura foram particionados em quatro regiões, por meio de cortes longitudinais, com o objetivo de facilitar a definição da malha, conforme ilustra a Figura 3.9.

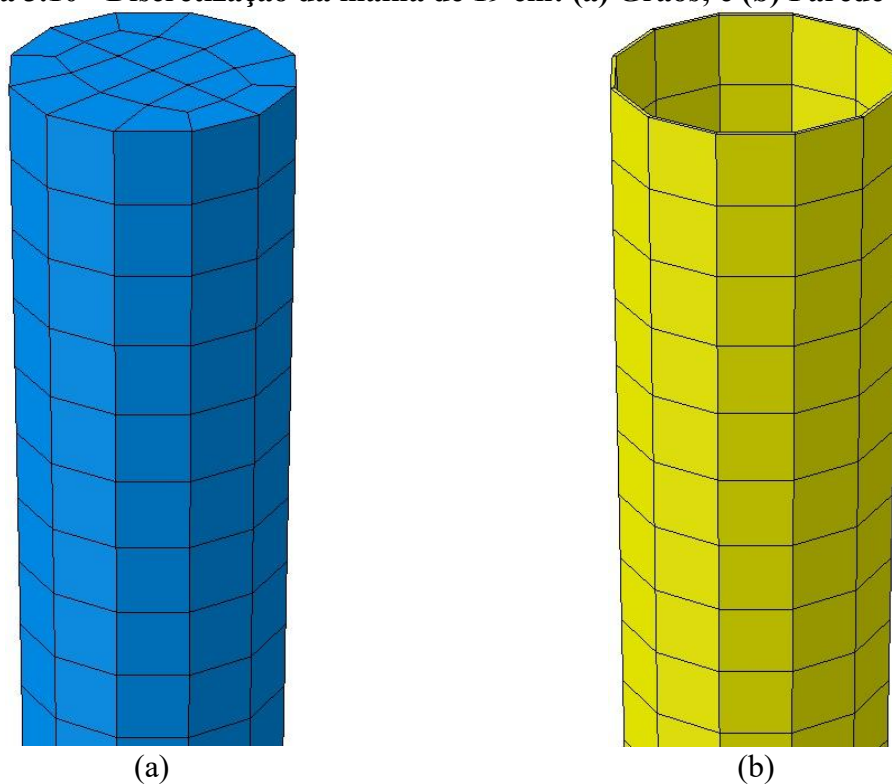
Figura 3.9 – Estratégia de divisão do modelo para definição da malha



Fonte: Autor (2026)

Para a modelagem dos grãos, também utilizou-se o mesmo elemento, com uma discretização de malha de 19 cm para os grãos e para a estrutura, conforme ilustrado Figura 3.10a e na Figura 3.10b

Figura 3.10 - Discretização da malha de 19 cm: (a) Grãos; e (b) Parede do Silo

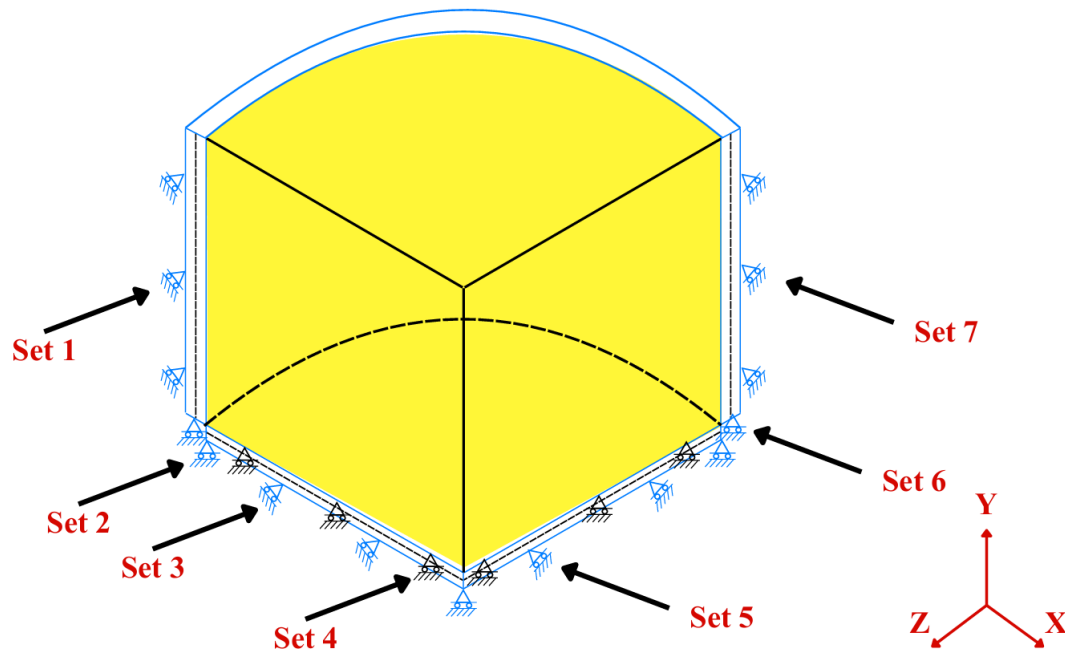


Fonte: Autor (2026)

Para o carregamento da estrutura, foi considerado exclusivamente o peso próprio dos grãos, incorporado ao modelo por meio da aceleração da gravidade ($9,81\text{m/s}^2$). Dessa forma, não foram consideradas outras ações atuando sobre a estrutura.

As condições de contorno adotadas para o Modelo Inicial consistiram na restrição completa de deslocamentos nas paredes e na base do silo ($U_X = U_Y = U_Z = 0$). Para os grãos, o deslocamento vertical foi restringido na base ($U_Y=0$). A configuração dessas restrições é ilustrada na Figura 3.11.

Figura 3.11 - Condições de contorno do Modelo Inicial



- Set 1: Restrição do movimento lateral da parede ao longo do eixo z, $U_Z = 0$.
- Set 2: Restrição do deslocamento vertical da base do silo ao longo do eixo y, $U_Y = 0$.
- Set 3: Restrição do movimento lateral da base do silo ao longo do eixo z, $U_Z = 0$.
- Set 4: Restrição do deslocamento vertical dos grãos ao longo do eixo y, $U_Y = 0$.
- Set 5: Restrição do movimento lateral da base ao longo do eixo x, $U_X = 0$.
- Set 6: Restrição do deslocamento vertical da parede ao longo do eixo y, $U_Y = 0$.
- Set 7: Restrição do deslocamento lateral da parede ao longo do eixo x, $U_X = 0$.

A formulação de atrito por penalidade (*penalty friction*) foi utilizada para definir o comportamento tangencial do contato entre as superfícies, na qual o comportamento friccional entre as superfícies é controlado por um coeficiente de atrito. Assim como no Modelo Exploratório II, a superfície interna do silo foi definida como superfície mestre (*master surface*) e a superfície externa do produto como superfície escrava (*slave surface*). Diferentemente do Modelo Exploratório II, onde foram definidas interações de contato separadas para o fundo e para as paredes, no modelo do silo-piloto foi adotada uma única interação de contato entre toda a superfície interna da estrutura, incluindo as paredes e o fundo, e o produto granular.

3.2.3 Estudo de sensibilidade de parâmetros

Com o objetivo de avaliar os parâmetros físicos do produto granular mais sensíveis em relação às pressões horizontais obtidas do modelo numérico, foi realizado um estudo de sensibilidade. Essa etapa permitiu identificar quais propriedades apresentavam maior impacto na magnitude e na distribuição das pressões, servindo como base para o processo de calibração do modelo.

Foram selecionados três parâmetros para análise: módulo de elasticidade (E), ângulo de dilatação (ψ) e coeficiente de Poisson (ν), uma vez que essas propriedades não foram determinadas experimentalmente por Cheung (2007). O procedimento adotado consistiu na variação de um parâmetro por vez, mantendo-se os demais constantes, de modo a isolar os efeitos de cada propriedade sobre as pressões horizontais no silo. Devido à escassez de dados na literatura especificamente para a soja, adotaram-se como valores de referência os resultados reportados por Martins (2012) e por Meira *et al.* (2018) para o módulo de elasticidade (E) e para o coeficiente de Poisson (ν), e o valor de 14° sugerido por Martins (2012) para o ângulo de dilatação (ψ). A partir desses valores de referência, foram definidos pontos adicionais para cada parâmetro, dentro de uma faixa compatível com a ordem de grandeza observada, com o objetivo de ampliar a abrangência do estudo de sensibilidade e identificar de forma mais clara a tendência de influência de cada propriedade sobre as pressões horizontais, contribuindo para a calibração do modelo.

3.2.4 Escolha do modelo constitutivo

Neste trabalho, a fim de avaliar a influência do modelo constitutivo dos grãos na distribuição e na magnitude das pressões horizontais, foram desenvolvidos dois modelos numéricos distintos, adotando-se os critérios de falha de Drucker-Prager e o de Mohr-Coulomb.

3.2.5 Análise Comparativa das Estratégias de Modelagem

Neste subcapítulo, avaliou-se a influência de diferentes estratégias de modelagem sobre os resultados numéricos das pressões horizontais. O objetivo dessa etapa foi identificar quais configurações apresentaram melhor correlação com os resultados experimentais de Cheung (2007), de modo a definir a abordagem mais adequada para o modelo final.

Foram analisadas três alternativas de modelagem (Quadro 3.1), comparadas entre si e

em relação à estratégia utilizada no Modelo Inicial. Em todas as análises, manteve-se a mesma configuração básica do modelo de referência, variando-se apenas aspectos específicos da modelagem.

A primeira abordagem consistiu na ativação da não linearidade geométrica (*nlgeom*). Na segunda, os travamentos das paredes foram removidos, permitindo que elas deixassem de ser rígidas e passassem a apresentar comportamento flexível. A terceira abordagem consistiu na utilização do elemento quadrático C3D20R em substituição ao elemento linear C3D8R.

Quadro 3.1 - Configurações das estratégias de modelagem analisadas

Modelo	Não linearidade geométrica	Paredes flexíveis	Elemento quadrático
Modelo Inicial	Não	Não	Não
Modelo I	Sim	Não	Não
Modelo II	Não	Sim	Não
Modelo III	Não	Não	Sim

Fonte: Autor (2026)

3.2.6 Estudo de malha

Nesta etapa, realizou-se um estudo de sensibilidade de malha com o objetivo de analisar a influência do refinamento e da configuração da discretização nos resultados das pressões horizontais. Foram analisadas três diferentes abordagens (Quadro 3.2), comparadas entre si e em relação à estratégia utilizada no Modelo Inicial.

A primeira estratégia consistiu na utilização de uma malha gradual ao longo da altura do silo, com discretização progressivamente mais refinada em direção à base, apresentando tamanho mínimo de elemento de 2 cm e máximo de 10,5 cm. A segunda estratégia empregou uma malha refinada de 5 cm apenas na região da base, até 1 m acima do fundo do silo, mantendo-se no restante da estrutura a discretização padrão com tamanho de elemento de 10 cm. A terceira abordagem consistiu na modelagem do silo sem o fundo, com o objetivo de verificar se sua remoção permitiria uma discretização mais eficiente, além de uma possível redução no tempo de processamento, sem comprometer significativamente a precisão dos resultados.

Quadro 3.2 - Estratégia de malhas analisadas

Modelo	Malha gradual	Malha refinada na base	Com fundo
Modelo Inicial	Não	Não	Sim
Modelo IV	Sim	Não	Sim
Modelo V	Não	Sim	Sim
Modelo VI	Não	Não	Não

Fonte: Autor (2026)

3.3 ANÁLISE PARAMÉTRICA

3.3.1 Propriedade Geométrica

Com o objetivo de avaliar a influência da geometria do silo (altura e diâmetro) e dos diferentes tipos de grãos sobre a magnitude e a distribuição das pressões horizontais, realizou-se uma análise paramétrica. Para essa etapa, foram selecionados 14 silos, organizados em dois grupos distintos. O primeiro grupo é composto por oito silos comerciais do catálogo da CASP (2023), todos com espessura de parede de 5,4 mm. De acordo com os critérios de classificação estabelecidos pela norma ANSI/ASAE EP433.1 (2024), esses modelos são caracterizados como silos baixos, apresentando relação altura/diâmetro (H/D) inferior a 2. O segundo grupo é formado por seis silos baseados no silo-piloto estudado anteriormente, classificados majoritariamente como silos esbeltos, apresentando espessura de parede de 1 cm.

Em ambos os grupos, as variações geométricas foram realizadas buscando analisar separadamente a influência de cada parâmetro. Para isso, os modelos foram divididos em dois conjuntos de variação:

- I. silos com altura constante e diâmetro variável e
- II. silos com diâmetro constante e altura variável.

A Tabela 3.8 apresenta as dimensões geométricas dos silos comerciais com altura constante de 24 m, variando os diâmetros. Esse conjunto tem por objetivo avaliar o efeito do diâmetro nas pressões horizontais.

Tabela 3.8 - Dimensões geométricas e capacidade dos silos com altura constante

Modelo	Identificação	Altura total (m)	Diâmetro (m)	Volume (m³)	Relação H/D
12820	D13,0	24	13,0	1986	1,85
18321	D18,3		18,3	5512	1,31
22019	D22,0		22,0	7361	1,09
27518	D27,5		27,5	11234	0,87

Fonte: Adaptado do catálogo da CASP (2023)

A Tabela 3.9 agrupa as características dos silos do catálogo da CASP com diâmetro constante de 16,5 m, nos quais a altura foi variada. Esse conjunto tem como objetivo analisar a influência da altura nas pressões horizontais.

Tabela 3.9 - Dimensões geométricas e capacidade dos silos com diâmetro constante

Modelo	Identificação	Diâmetro (m)	Altura total (m)	Volume (m³)	Relação H/D
16508	H12,13	16,5	12,13	1882	0,74
16512	H15,80		15,80	2667	0,96
16515	H18,56		18,56	3256	1,12
16522	H24,98		24,98	4630	1,51

Fonte: Adaptado do catálogo da CASP (2023)

De forma análoga, foram definidos modelos paramétricos baseados na geometria do silo-piloto, mantendo-se a estratégia de variação geométrica adotada para os silos comerciais, de modo que os silos permanecessem, em sua maioria, caracterizados como esbeltos. Assim, um conjunto de modelos foi desenvolvido com altura constante e diâmetro variável, enquanto o outro foi definido com diâmetro constante e altura variável.

A Tabela 3.10 apresenta as características dos silos baseados no silo-piloto com altura fixa de 5,5 m. Foram considerados três modelos: um com as dimensões originais do silo-piloto, outro com o dobro do diâmetro e um terceiro com diâmetro quatro vezes superior ao modelo de referência. O objetivo desse conjunto é analisar a influência do diâmetro nas pressões horizontais.

Tabela 3.10 – Dimensões geométricas dos silos com altura constante

Identificação	Altura total (m)	Diâmetro (m)	Relação H/D
D0,706	5,5	0,706	7,79
D1,412		1,412	3,90
D2,824		2,824	1,95

Fonte: Autor (2026)

A Tabela 3.11 agrupa as características dos silos baseados no silo-piloto com diâmetro fixo de 0,706 m, nos quais se variou a altura. O objetivo desse conjunto é analisar a influência da altura nas pressões horizontais.

Tabela 3.11 - Geometria dos silos com diâmetro fixo

Identificação	Diâmetro (m)	Altura total (m)	Relação H/D
H3,0	0,706	3,0	4,25
H5,5		5,5	7,79
H8,0		8,0	11,33

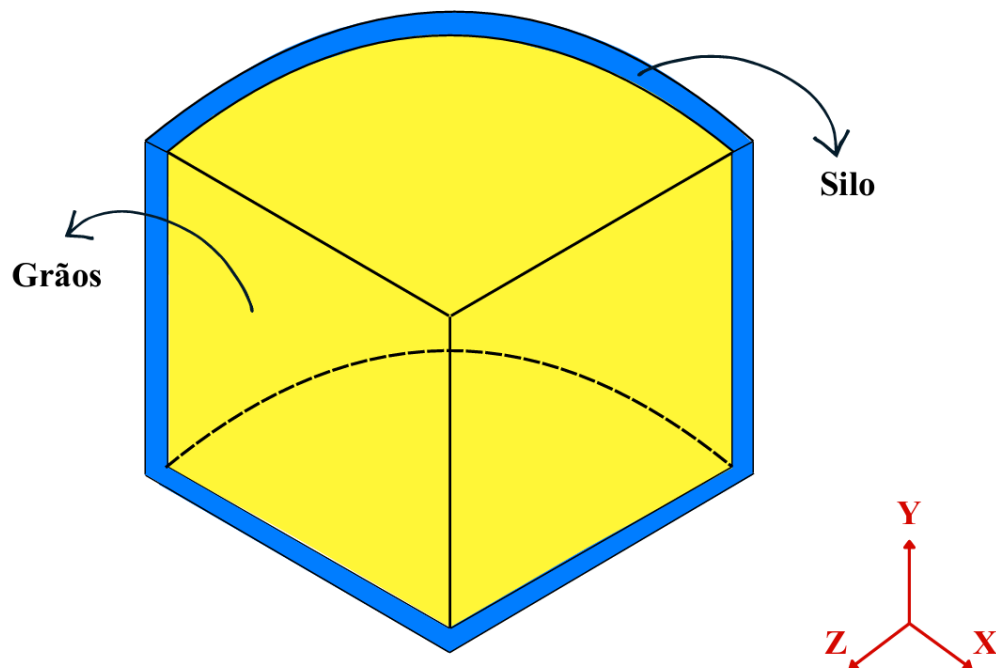
Fonte: Autor (2026)

3.3.1.1 Estratégia de modelagem para a Análise Paramétrica

Em um primeiro momento, buscou-se adotar na análise paramétrica a mesma estratégia de modelagem utilizada na fase de calibração do modelo numérico aplicada aos silos do catálogo da CASP (2023). No entanto, devido a resultados inconclusivos das simulações com essa configuração, demandou-se a adoção de alternativas para viabilizar o modelo. Entretanto, para a análise paramétrica dos silos baseados no silo-piloto, manteve-se a estratégia de modelagem previamente adotada na etapa de calibração.

Inicialmente, optou-se por reduzir a porção do silo modelada para diminuir o número de elementos, reduzir o custo computacional e melhorar a discretização da malha, passando a representar apenas um quarto do silo, com a aplicação de condições de simetria, estratégia também adotada por outros autores da literatura (Goodey; Brown; Rotter, 2017; Hilal *et al.*, 2022; Hilal; Sanad, 2025). Além disso, utilizou-se o mesmo tamanho de malha de 50 cm para todos os silos comerciais. A configuração adotada está ilustrada Figura 3.12.

Figura 3.12 - Configuração da modelagem dos silos comerciais

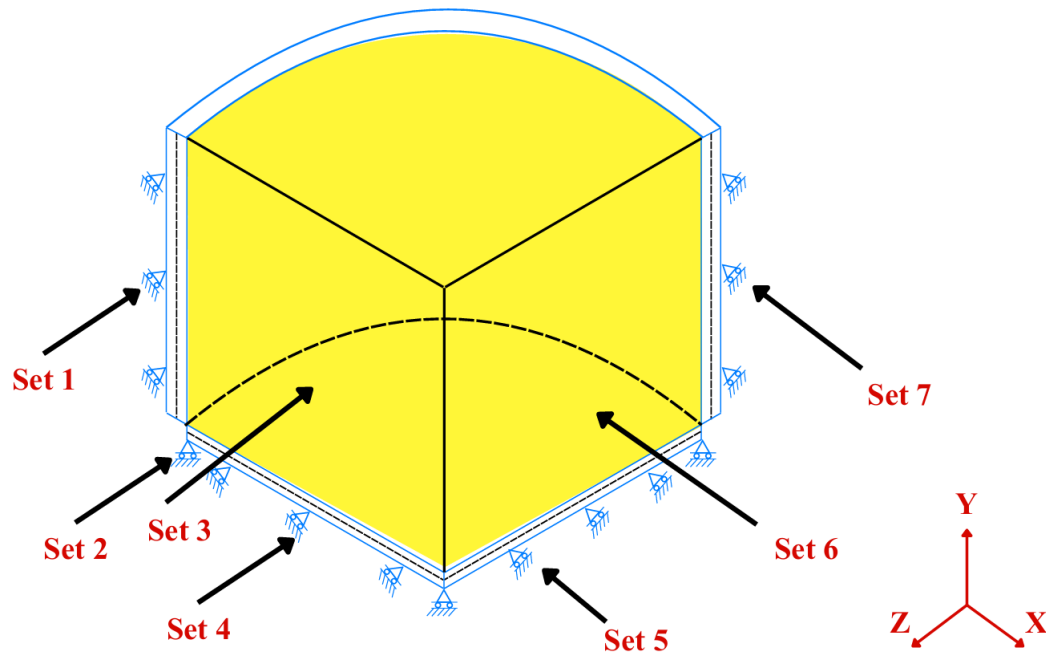


Fonte: Autor (2026)

Posteriormente, para solucionar os problemas de elementos distorcidos e para reduzir a complexidade do modelo, devido à geometria circular, trocou-se o tipo de elemento e o modelo constitutivo dos grãos. Foi utilizado o elemento C3D8, conforme empregado por Goodey, Brown e Rotter (2017) e Zhao *et al.* (2023). Foi adotado o critério de falha de Mohr-Coulomb para simular o comportamento plástico do produto granular, assim como Zhao *et al.* (2023) adotaram em seu modelo.

Para as condições de contorno, optou-se por utilizar as mesmas condições de contorno usada por Hilal *et al.* (2022), onde restringiu-se os deslocamentos das paredes nas direções x e z. Na base do silo, os deslocamentos foram restringidos nas três direções (x, y e z). Para o produto granular, foram aplicadas condições de simetria do tipo ZSYMM e XSYMM. As condições de contorno aplicadas, estão ilustradas na Figura 3.13.

Figura 3.13 - Condições de contorno dos silos comerciais



Fonte: Autor (2026)

- Set 1: Restrição do deslocamento lateral da parede ao longo do eixo z, $U_z = 0$.
- Set 2: Restrição do deslocamento vertical da base ao longo do eixo y, $U_y = 0$.
- Set 3: Restrição do deslocamento lateral dos grãos em ZSYMM ($U_z = U_{rx} = U_{ry} = 0$).
- Set 4: Restrição do deslocamento lateral da base ao longo do eixo z, $U_z = 0$.
- Set 5: Restrição do deslocamento lateral da base ao longo do eixo x, $U_x = 0$.
- Set 6: Restrição do deslocamento lateral dos grãos em XSYMM ($U_x = U_{ry} = U_{rz} = 0$).
- Set 7: Restrição do deslocamento lateral da parede ao longo do eixo x, $U_x = 0$.

3.3.2 Produto Granular

A fim de avaliar a influência do tipo de produto granular na magnitude e na distribuição das pressões horizontais ao longo da parede do silo, foram considerados diferentes produtos granulares, tais como o milho, a soja, o arroz, o milho triturado e o trigo, cujas propriedades físicas e mecânicas foram definidas com base em dados da literatura. Foram utilizados dois tipos de milho, o primeiro adotando-se as mesmas propriedades que foram determinadas

experimentalmente por Cheung (2007) e as três propriedades mecânicas que não foram determinadas por este autor (módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e ângulo de dilatação), foram adotados os valores sugeridos por Moya, Sánchez e Villar-Garcia (2022). Para o outro milho, foram consideradas exclusivamente as propriedades determinadas experimentalmente por Moya, Sánchez e Villar-Garcia (2022).

Nesta etapa, manteve-se constante a geometria do silo, utilizando as mesmas propriedades geométricas do silo-piloto considerando paredes de aço rugoso, bem como os parâmetros relacionados à estratégia de modelagem previamente definida, variando-se exclusivamente as propriedades do produto armazenado, tais como peso específico (γ), coeficiente de atrito (μ_w), ângulo de atrito interno (ϕ_i), Coesão (c), módulo de elasticidade (E), coeficiente de Poisson (ν) e ângulo de dilatação (ψ). Os valores adotados para cada produto estão apresentados na Tabela 3.12.

Tabela 3.12 - Propriedades dos grãos da análise paramétrica

Produto	γ (kN/m³)	μ_w (°)	ϕ_i (°)	c (kPa)	E (MPa)	ν	ψ (°)	Referência
Arroz	8,07	0,306	37,00	3,49	12,75	0,14	18,08	Costa <i>et al.</i> (2014)
Milho triturado	7,82	0,302	43,00	4,42	10,66	0,13	21,03	Costa <i>et al.</i> (2014)
Soja	7,18	0,189	34,81	0,23	3,48	0,20	14,00	Cheung (2007) e Martins (2012)
Milho Tipo I	8,10	0,226	29,53	0,04	34,80	0,18	33,60	Cheung (2007) e Moya, Sánchez e Villar-Garcia (2022)
Milho Tipo II	7,52	0,340	38,8	7	34,80	0,18	33,60	Moya, Sánchez e Villar-Garcia (2022)
Trigo	8,03	0,290	19,3	6,6	37,35	0,39	19,70	Moya, Sánchez e Villar-Garcia (2022)

Fonte: Autor (2026)

A partir das simulações realizadas, foram obtidas as distribuições de pressões horizontais ao longo da altura do silo, possibilitando a comparação do comportamento das curvas de pressões associadas a cada tipo de produto granular.

3.4 MODELOS ANALÍTICOS

No Modelo Exploratório II, as pressões horizontais foram determinadas com base na teoria clássica de Janssen (1895), considerando o milho como produto armazenado. Já para o

silo-piloto, as pressões foram calculadas tanto pela teoria de Janssen (1895) quanto pelas normas internacionais ANSI/ASAE EP433.1 (2024), EN 1991-4 (2006) e AS 3774 (1996) tendo a soja como produto de referência. Estas informações estão sintetizadas na Tabela 3.13. Ressalta-se que os cálculos e as comparações normativas apresentados nesta dissertação foram desenvolvidos com base na EN 1991-4 (2006), versão vigente durante praticamente todo o período de elaboração deste trabalho.

Tabela 3.13 - Correlação entre os modelos numéricos e os respectivos modelos analíticos e produtos armazenados

Identificação do modelo numérico	Modelo Analítico	Produto Armazenado
Modelo Exploratório II	Janssen (1895)	Milho
Silo-piloto	Janssen (1895)	Soja
Silo-piloto	AS 3774 (1996)	Soja
Silo-piloto	ANSI/ASAE EP433.1 (2024)	Soja
Silo-piloto	EN 1991-4 (2006)	Soja

Fonte: Autor (2026)

4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Este capítulo apresenta e analisa os principais resultados obtidos por meio das simulações numéricas desenvolvidas ao longo do trabalho. Inicialmente, são discutidos os resultados do Modelo Exploratório I em termos das tensões de Von Mises e dos deslocamentos. Em seguida, são apresentados os resultados do Modelo Exploratório II e a análise das pressões horizontais, com comparação aos resultados analíticos obtidos pela Teoria de Janssen. Na sequência, são discutidos os resultados referentes à fase de calibração do modelo, mediante comparação dos dados numéricos com os resultados experimentais de Cheung (2007), com o objetivo de verificar a coerência dos modelos. Posteriormente são discutidos os resultados obtidos para o silo-piloto, contemplando a análise paramétrica com variação das propriedades geométricas e dos produtos armazenados, bem como a comparação dos resultados numéricos com as predições analíticas das normativas internacionais e da Teoria de Janssen. Por fim, são apresentados os resultados da análise paramétrica aplicada a silos de dimensões comerciais, avaliando-se a aplicabilidade do modelo numérico a geometrias usualmente empregadas na prática.

4.1 SIMULAÇÕES EXPLORATÓRIAS

4.1.1 Modelo Exploratório I

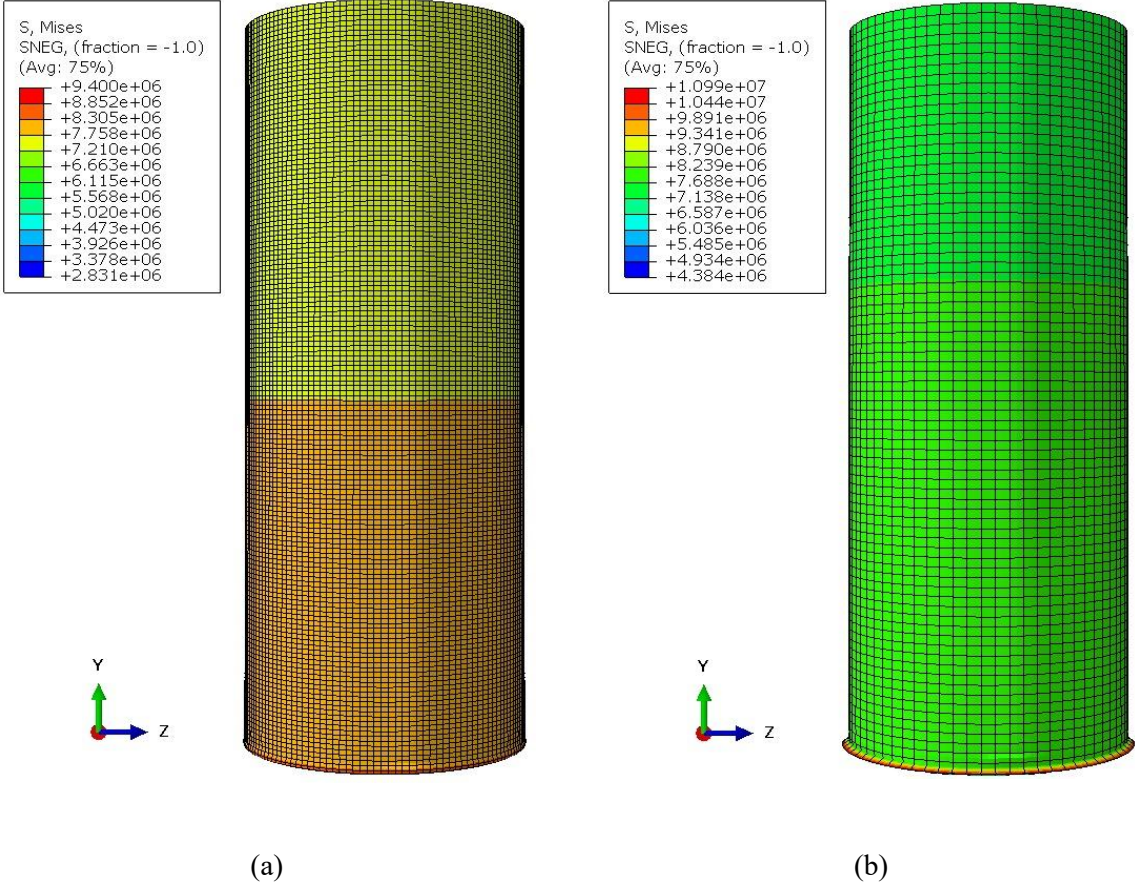
Os resultados apresentados neste item fazem parte de um estudo preliminar sobre o desenvolvimento de pressões no interior do silo.

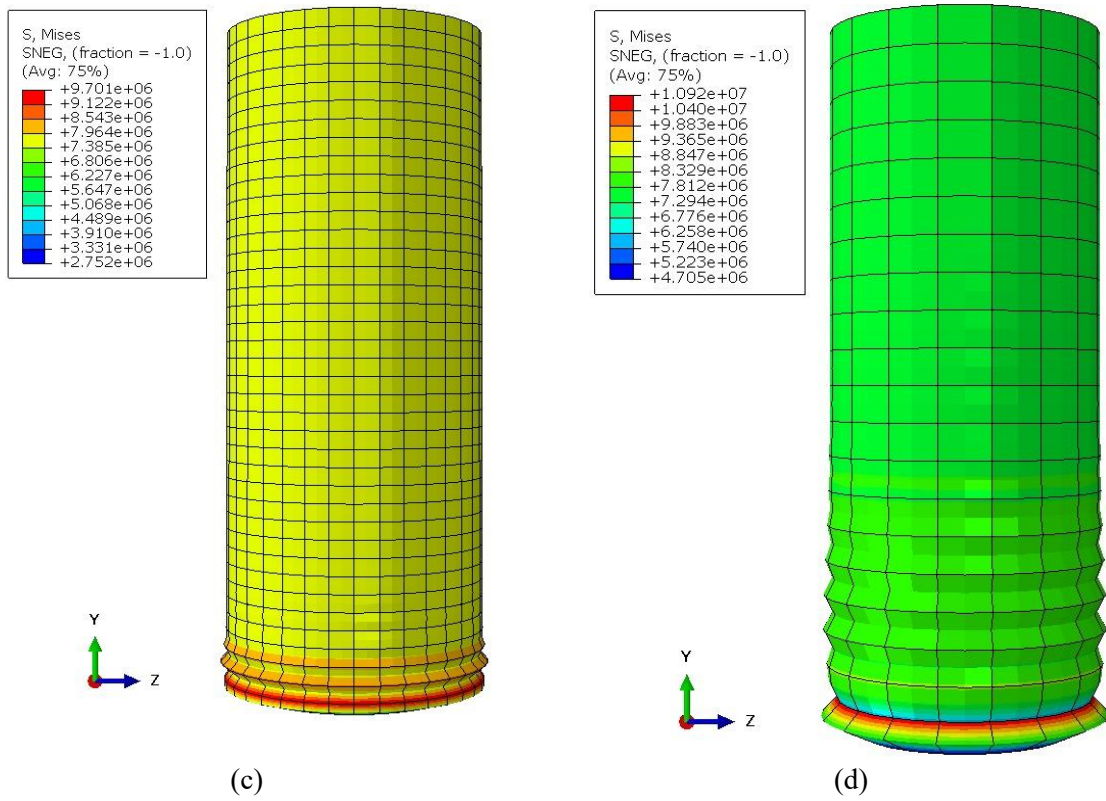
A Tabela 4.1 apresenta o número de elementos, o tempo de processamento, a tensão máxima e o deslocamento máximo obtidos para diferentes tamanhos de malha, enquanto a Figura 4.1 ilustra as tensões de von Mises obtidas para cada uma dessas malhas. Já a Figura 4.2 ilustra a variação da tensão na borda inferior do silo em função do número de elementos.

Tabela 4.1 - Resultados da análise de sensibilidade ao refinamento da malha				
Malha (cm)	Número de Elementos	Tempo de processamento (s)	Tensão de von Mises (MPa)	Deslocamento máximo (cm)
7	21195	26	8,249	1,56
14	5293	18	8,250	1,56
28	1326	11	9,700	1,56
55	340	11	10,570	1,56

Fonte: Autor (2026)

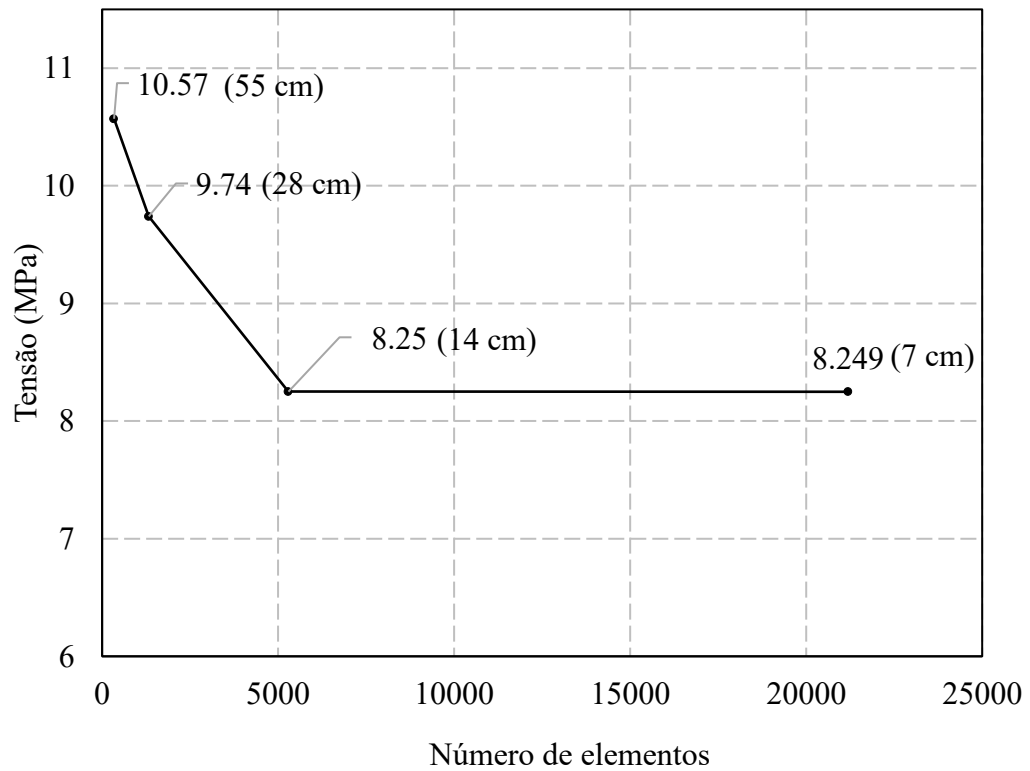
Figura 4.1 - Tensões de von Mises do Modelo Exploratório I para os diferentes refinamentos de malha: (a) 7 cm; (b) 14 cm; (c) 28 cm; e (d) 55 cm, unidades em Pascal (Pa)





Fonte: Autor (2026)

Figura 4.2 - Estudo de refinamento de malha do Modelo Exploratório I



Fonte: Autor (2026)

A análise dos resultados da Tabela 4.1 mostra que as tensões obtidas para as malhas de 14 cm e 7 cm apresentaram diferenças desprezíveis, de aproximadamente 0,01%, indicando a estabilização dos resultados e a convergência do modelo. Esta estabilização também pode ser observada pelo comportamento da curva na Figura 4.2. Em contrapartida, as malhas mais grosseiras, de 28 cm e 55 cm, resultaram em tensões superiores, indicando que o refinamento insuficiente pode comprometer a precisão dos resultados.

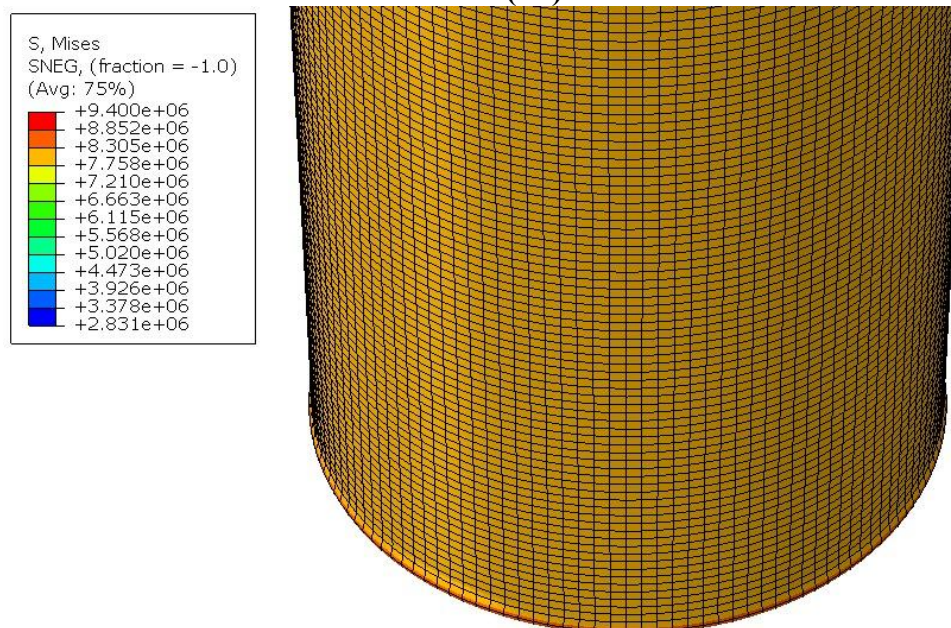
Com base nesses resultados, optou-se pela malha de 7 cm para as análises subsequentes. Embora essa discretização apresente o maior número de elementos e, conseqüentemente, maior custo computacional, o aumento no tempo de processamento foi relativamente pequeno em comparação às demais malhas analisadas, o que justifica sua adoção como forma de garantir maior refinamento e precisão nos resultados finais, sem comprometer significativamente a eficiência computacional do modelo.

Também foi avaliada a influência do refinamento da malha nos deslocamentos máximos da borda superior do silo. Diferentemente do observado para as tensões, os deslocamentos permaneceram praticamente constantes para todas as discretizações analisadas.

Os tempos de processamento variaram de 11 segundos para a malha mais grossa (55 cm) até 26 segundos para a malha mais refinada (7 cm). No entanto, trata-se de uma análise simplificada, com baixo custo computacional. Em problemas mais complexos, como a inclusão do produto granular no interior do silo, o custo computacional tende a aumentar consideravelmente. Nesses casos, o refinamento da malha pode impactar diretamente no tempo total de processamento (Pisarciuc; Dan; Cioară, 2023).

A Figura 4.3 apresenta os resultados das tensões de von Mises atuantes no silo. Os resultados mostraram que as maiores concentrações de tensões ocorreram na região inferior das paredes do silo, junto à base, especialmente na região inferior da parede lateral. Esse comportamento é coerente com a configuração de carregamento adotada, uma vez que, nessa região os efeitos da pressão interna se somam ao peso próprio da estrutura.

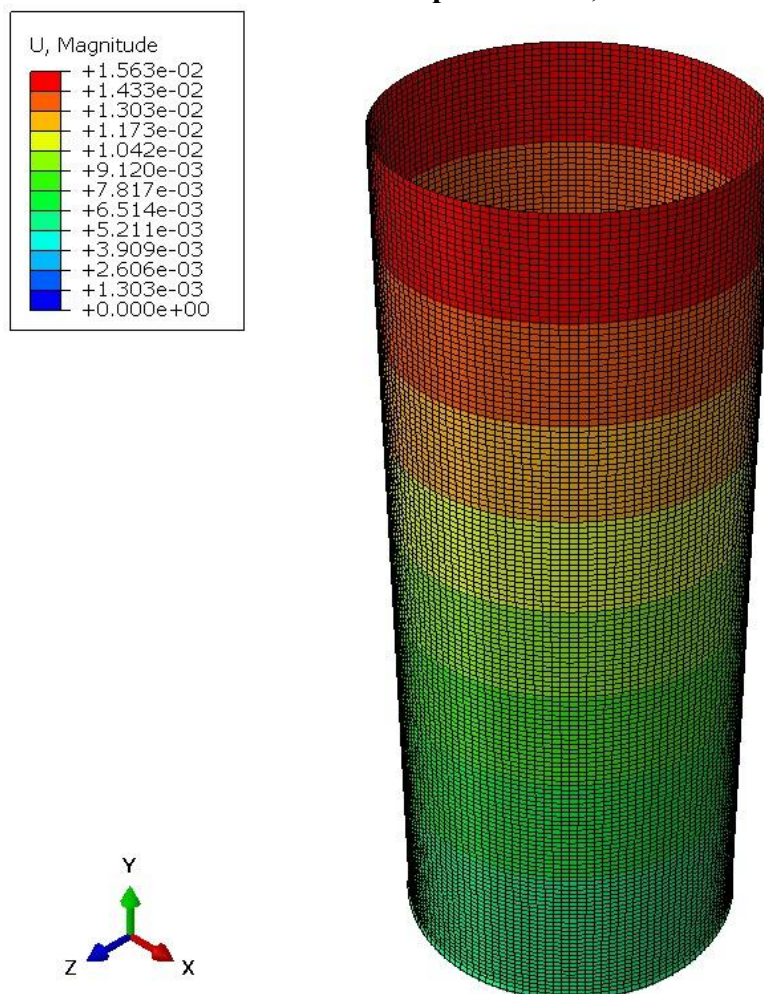
Figura 4.3 – Tensões de von Mises na base do Modelo Exploratório I, unidades em Pascal (Pa)



Fonte: Autor (2026)

Em relação aos deslocamentos, a Figura 4.4 apresenta os deslocamentos verticais na estrutura do silo. Observa-se que os maiores valores ocorrem próximos ao topo da estrutura, deslocamento máximo de 1,56 cm, o que é esperado em função das condições de contorno consideradas (base engastada e o topo livre), que fazem com que o deslocamento vertical se acumule ao longo da altura, atingindo seu máximo no topo. Esse efeito é intensificado pela atuação da carga de cobertura e o peso próprio da estrutura.

Figura 4.4 – Deslocamentos do Modelo Exploratório I, unidades em metros (m)

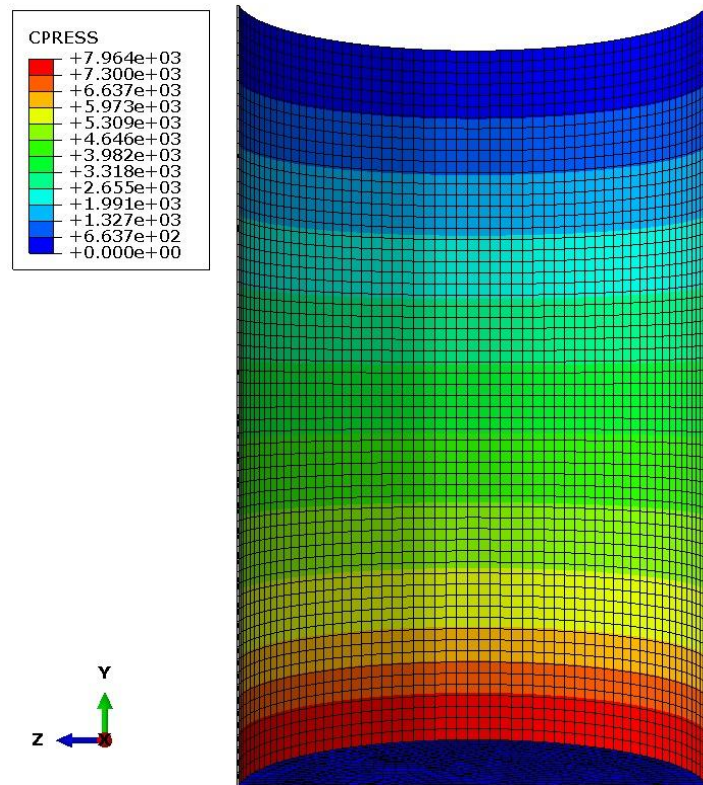


Fonte: Autor (2026)

4.1.2 Modelo Exploratório II

As distribuições das pressões no interior do silo na condição estática, obtidas por meio da simulação numérica, são apresentadas na Figura 4.5. Observa-se que as pressões aumentam ao longo da profundidade do silo, comportamento reportado na literatura tanto experimentalmente quanto teoricamente, conforme proposto originalmente por Janssen (1895), e verificado por estudos experimentais (Freitas, 2001; Palma, 2005; Fank, 2017; Gandia, 2022; Dornelas *et al.*, 2024).

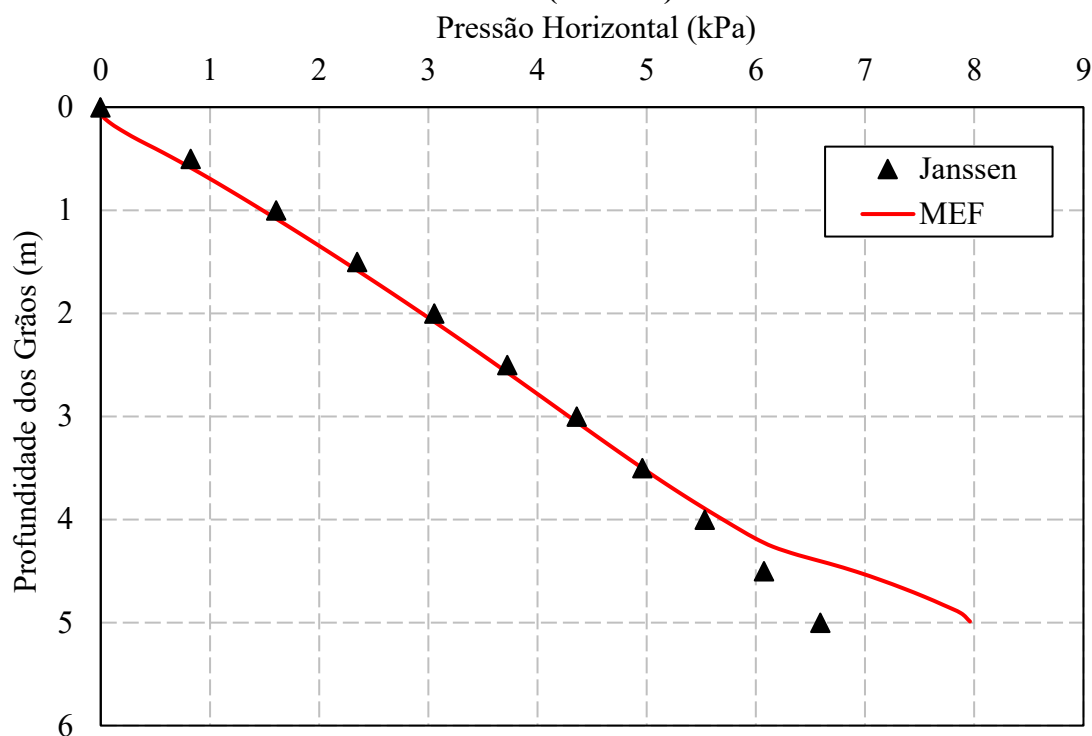
Figura 4.5 – Pressão horizontal no interior do silo, unidades em Pascal (Pa)



Fonte: Autor (2026)

Os resultados obtidos pelo modelo numérico foram comparados com os valores analíticos obtidos por meio da formulação de Janssen, conforme ilustra a Figura 4.6. O gráfico apresenta as curvas de distribuição de pressão ao longo da altura do silo, tanto para o modelo de elementos finitos (MEF) quanto para a solução analítica.

Figura 4.6 - Avaliação comparativa da pressão pelo modelo numérico (MEF) e modelo teórico (Janssen)



Fonte: Autor (2026)

Nota-se que a curva obtida por meio do modelo numérico apresenta excelente concordância com os resultados analíticos da formulação de Janssen, sobretudo nos dois terços superiores da altura do silo. A partir de aproximadamente 4 metros, no entanto, o modelo numérico passa a prever pressões ligeiramente superiores às previstas teoricamente, comportamento similar ao observado no modelo numérico de paredes rígidas de Hilal *et al.* (2022), apresentando nesta faixa um erro relativo médio de 11,95%. Esta diferença pode estar associada à simplificação nas hipóteses da formulação teórica e à estratégia de modelagem. Apesar disso, observa-se que as curvas apresentaram comportamentos bastante semelhantes, o que indica a coerência dos dados obtidos na modelagem numérica.

4.2 CALIBRAÇÃO DO MODELO NUMÉRICO

Nesta seção são apresentados os resultados referentes à calibração do modelo numérico, conduzida por meio da comparação entre as respostas obtidas na simulação e os dados experimentais de Cheung (2007). Como parte desse processo, e considerando que alguns parâmetros do produto granular, como o módulo de elasticidade, o coeficiente de Poisson e o

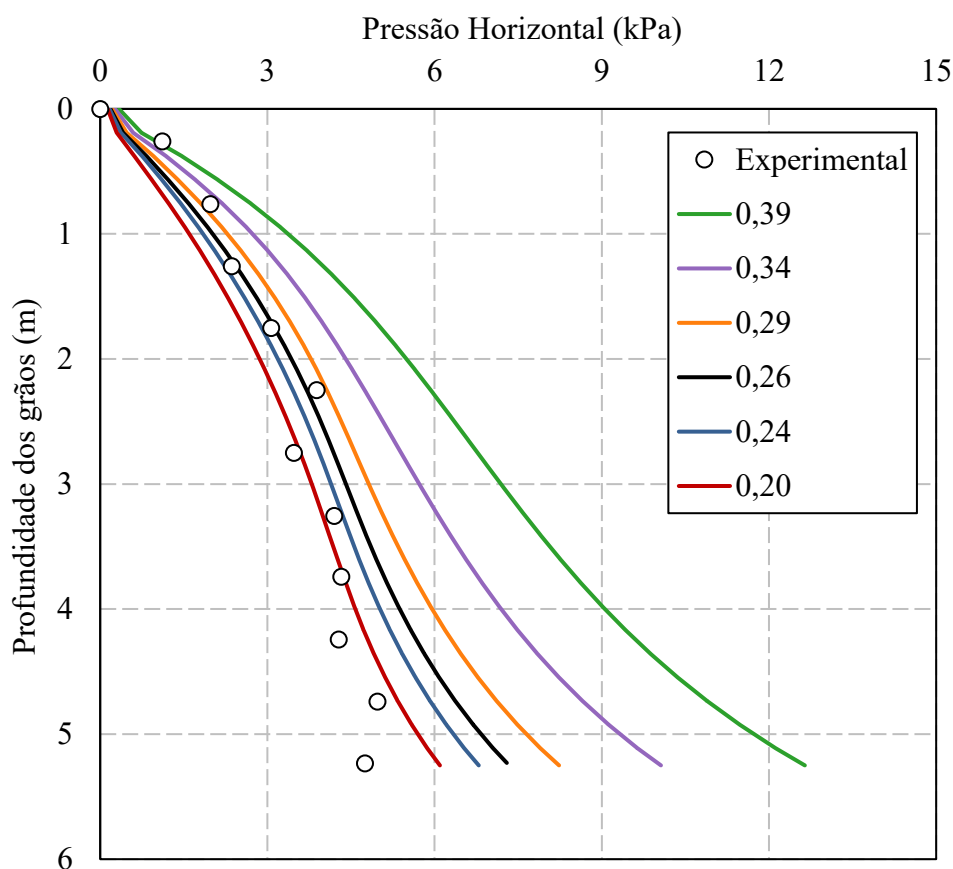
ângulo de dilatação, não foram determinados experimentalmente pelo autor, realizou-se um estudo de sensibilidade com o objetivo de avaliar a influência de cada um desses parâmetros sobre as pressões horizontais de carregamento e, assim, definir os valores mais adequados para a calibração do modelo. Na sequência, são discutidos os resultados relativos à definição do modelo constitutivo, à análise comparativa das estratégias de modelagem e ao estudo de malha, etapas que fundamentaram a configuração final adotada. Por fim, apresenta-se a calibração do modelo numérico propriamente dita, mediante comparação dos resultados obtidos com os dados experimentais de Cheung (2007) e com a formulação analítica de Janssen (1895).

4.2.1 Estudo de sensibilidade

Com base no procedimento descrito na metodologia, foi realizado um estudo de sensibilidade considerando as propriedades físicas não determinadas experimentalmente por Cheung (2007), com o objetivo de avaliar numericamente seu impacto nas pressões internas. Foram analisados o coeficiente de Poisson (ν), o ângulo de dilatação (ψ) e o módulo de elasticidade (E) referentes à soja.

A Figura 4.7 apresenta os resultados do estudo de sensibilidade para o coeficiente de Poisson (ν). Para este estudo, fixou-se o valor do módulo de elasticidade de 35000 kPa e o ângulo de dilatação em 14°. Foram adotados os seguintes valores para o coeficiente de Poisson: 0,45; 0,39; 0,34; 0,29; 0,26 (Martins, 2012; Meira *et al.*, 2018); 0,24 e 0,20 (Meira *et al.*, 2018).

Figura 4.7 - Distribuição das pressões horizontais ao longo da altura para diferentes valores de coeficiente de Poisson

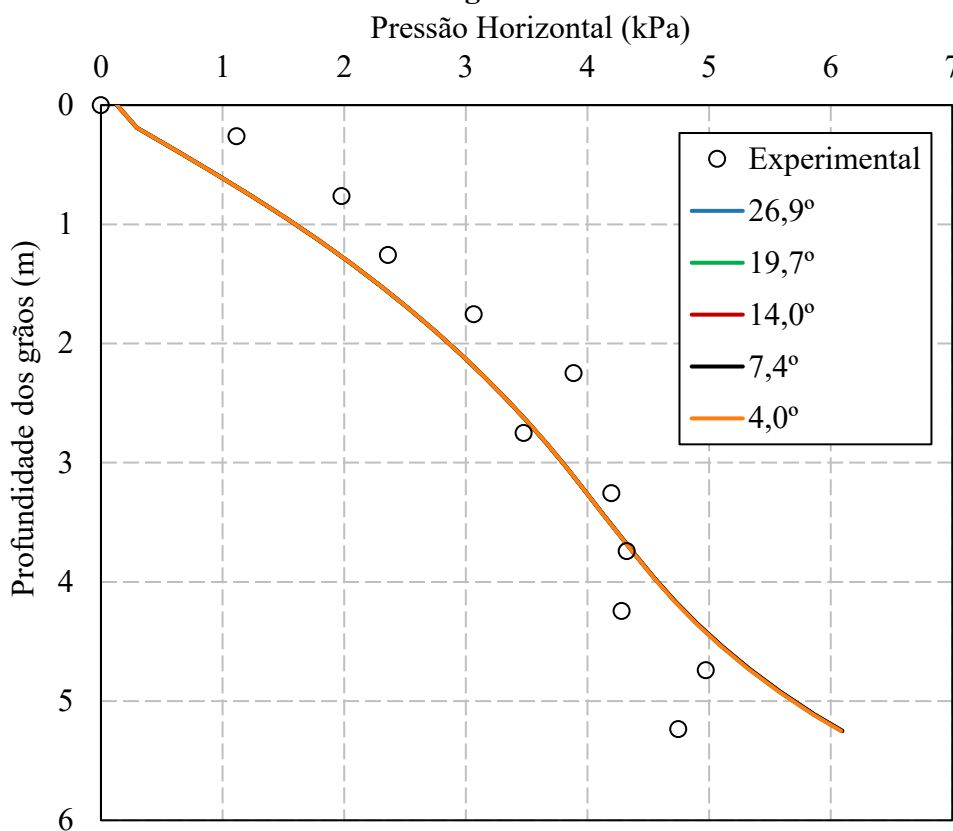


Fonte: Autor (2026)

Nota-se que o aumento do valor do coeficiente de Poisson resulta em uma maior discrepância entre os resultados do modelo numérico e os dados experimentais, com uma tendência de superestimação das pressões horizontais, especialmente nas regiões inferiores do silo. O valor de 0,20 adotado para o coeficiente de Poisson foi o que apresentou a melhor correlação com os dados experimentais de Cheung (2007).

A Figura 4.8 apresenta os resultados do estudo de sensibilidade para o ângulo de dilatância (ψ). Para este estudo, fixou-se o coeficiente de Poisson em 0,20 e o módulo de elasticidade em 35000 kPa. Os valores adotados para o ângulo de dilatância foram 26,9°, 19,7°, 14,0° (Martins, 2012), 7,4° e 4,0°.

Figura 4.8 - Distribuição das pressões horizontais ao longo da altura para diferentes valores de ângulo de dilatância

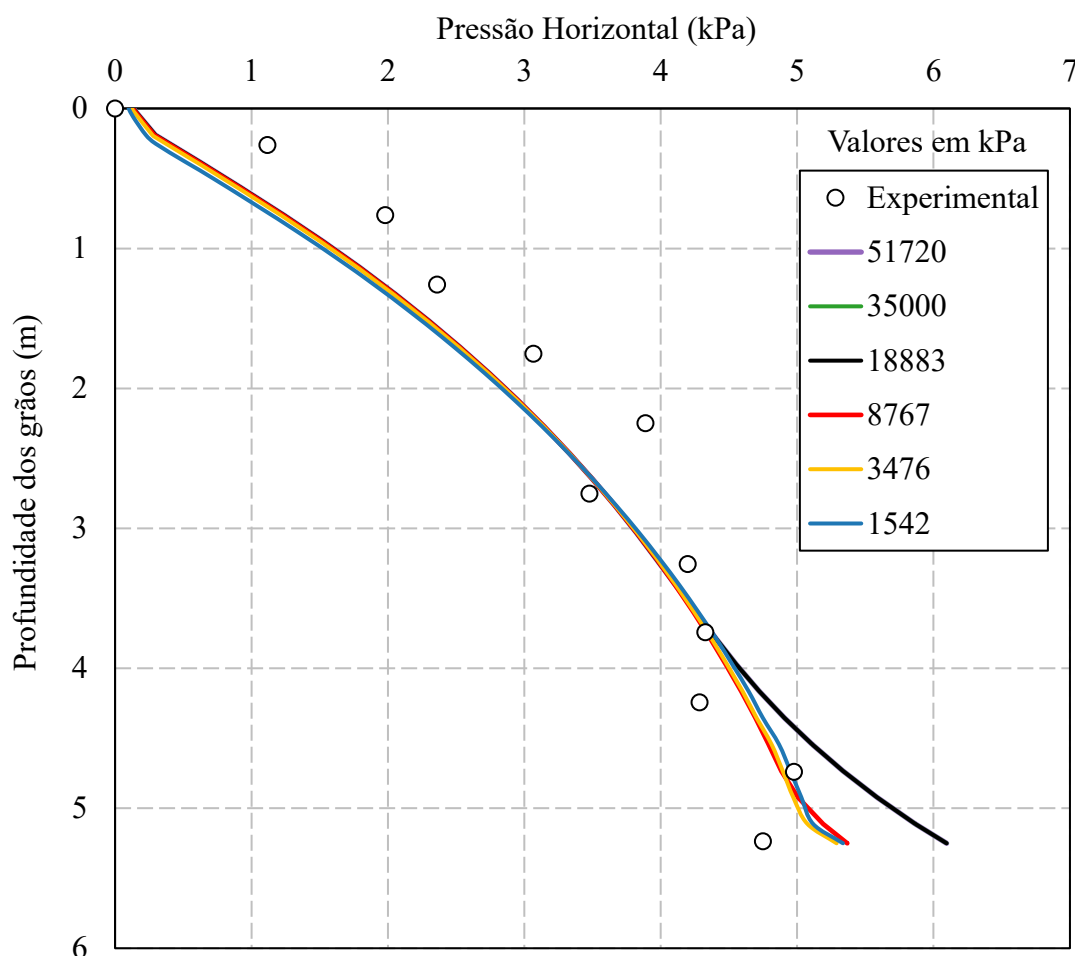


Fonte: Autor (2026)

Os resultados demonstraram que a variação desse parâmetro não exerceu influência significativa sobre as pressões horizontais, uma vez que todas as curvas coincidem ao longo da altura do silo, conforme observa-se na Figura 4.8. Portanto, neste estudo utilizou-se o valor adotado por Martins (2012) igual a 14° para o ângulo de dilatância.

A Figura 4.9 apresenta os resultados do estudo de sensibilidade para o módulo de elasticidade, no qual o coeficiente de Poisson foi mantido fixo em 0,20 e o ângulo de dilatância em 14° . Os valores deste parâmetro adotados foram os seguintes: 51720 kPa, 35000 kPa, 18883 kPa (Meira *et al.*, 2018), 8767 kPa (Meira *et al.*, 2018), 3476 kPa (Meira *et al.*, 2018) e 1542 kPa (Martins, 2012).

Figura 4.9 - Distribuição das pressões horizontais ao longo da altura para diferentes valores do módulo de elasticidade



Fonte: Autor (2026)

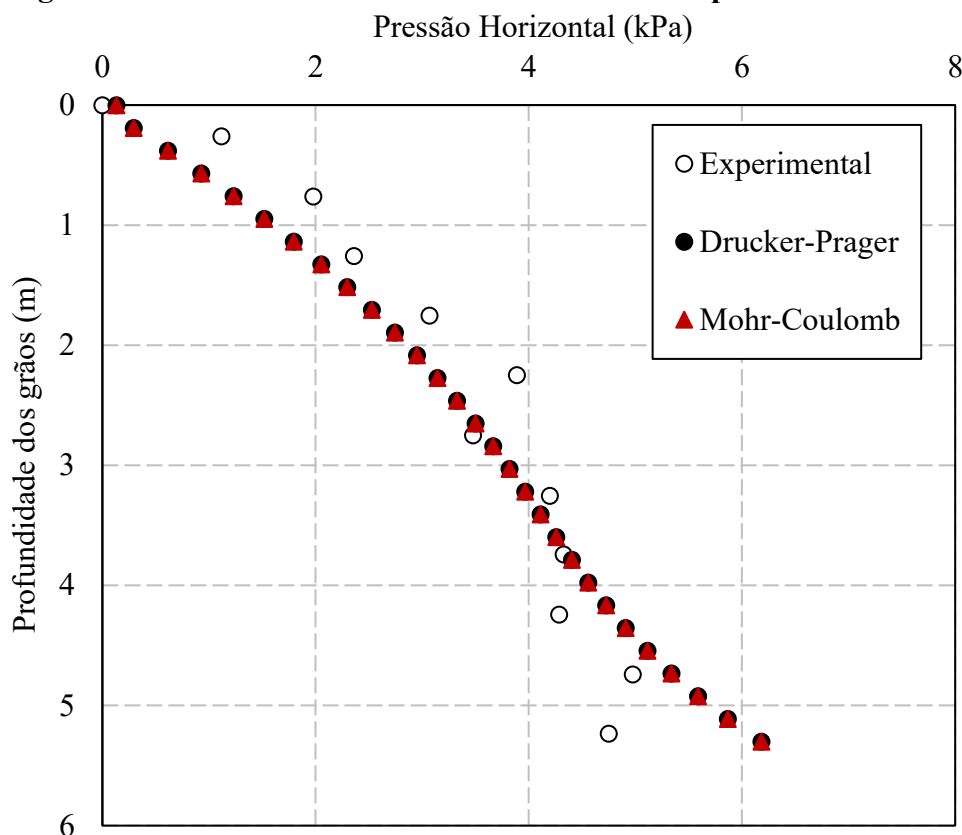
Observa-se na Figura 4.9 que a variação do módulo de elasticidade exerce maior influência sobre a distribuição das pressões horizontais apenas nas regiões inferiores do silo, enquanto nas camadas mais próximas ao topo as curvas apresentam comportamento bastante semelhante. Valores mais elevados do módulo de elasticidade resultaram em pressões horizontais ligeiramente superiores, com destaque para os três maiores valores analisados (51720 kPa, 35000 kPa e 18883 kPa), cujas curvas se sobrepuseram e apresentaram maior afastamento em relação às demais. Já para os valores reduzidos do módulo de elasticidade (1542 kPa, 3476 kPa e 8767 kPa) verifica-se uma tendência de estabilização das pressões, com as curvas praticamente coincidindo entre si e apresentando diferença na pressão horizontal máxima inferior a 1,49%. Portanto, optou-se por utilizar o valor de 3476 kPa por ter se correlacionado melhor com os resultados experimentais.

4.2.2 Definição do modelo constitutivo

Os dois principais modelos constitutivos utilizados na literatura para representar o comportamento dos grãos em estudos numéricos de pressões horizontais em silos são o critério de Mohr-Coulomb e o de Drucker-Prager. O critério de Drucker-Prager apresenta maior facilidade de implementação computacional, sendo, por isso, o mais frequentemente adotado, conforme observado nos trabalhos de Dornelas *et al.* (2024), Goodey, Brown e Rotter (2017), Hilal *et al.* (2022) e Martins (2012). O critério de Mohr-Coulomb, por sua vez, foi empregado por outros autores, como Hilal e Sanad (2025) e Zhao *et al.* (2023).

Nesta etapa da pesquisa, avaliou-se a influência do modelo constitutivo do produto granular nas pressões horizontais. Os resultados indicaram que a escolha do modelo constitutivo não exerceu influência na magnitude e nas distribuições das pressões ao longo da altura do silo durante a etapa de carregamento.

Observou-se concordância completa entre os modelos constitutivos avaliados, com erro relativo igual a 0,0%, sendo essa equivalência evidenciada pela sobreposição das curvas apresentadas na Figura 4.10. Esse resultado demonstra que a modelagem adotada é robusta em relação ao modelo constitutivo empregado, indicando que ambos são capazes de reproduzir o mesmo estado de tensões para as condições analisadas. Sob o ponto de vista metodológico, essa constatação reforça a confiabilidade das simulações realizadas e permite direcionar as análises subsequentes utilizando o modelo de menor complexidade computacional, sem comprometer a precisão dos resultados.

Figura 4.10 - Influência do modelo constitutivo nas pressões horizontais

Fonte: Autor (2026)

Como os modelos constitutivos apresentaram respostas equivalentes e a diferença no tempo de processamento foi insignificante, optou-se por utilizar o critério de Drucker–Prager para representar o comportamento elastoplástico dos grãos. Essa escolha também se fundamenta na ampla utilização desse modelo em estudos da área, como os de Hilal *et al.* (2022) e de Brown (2008), favorecendo a consistência metodológica e a comparação dos resultados com a literatura.

4.2.3 Análise Comparativa das Estratégias de Modelagem

Foram avaliadas três alternativas de modelagem em relação ao Modelo Inicial, com o objetivo de investigar a influência de diferentes estratégias numéricas na estimativa das pressões horizontais e sua concordância com os resultados experimentais de Cheung (2007). A primeira alternativa (Modelo I) consistiu na ativação da não linearidade geométrica. Na segunda (Modelo II), os travamentos laterais das paredes foram removidos, permitindo que a estrutura apresentasse comportamento flexível. Por fim, a terceira alternativa (Modelo III) substituiu o

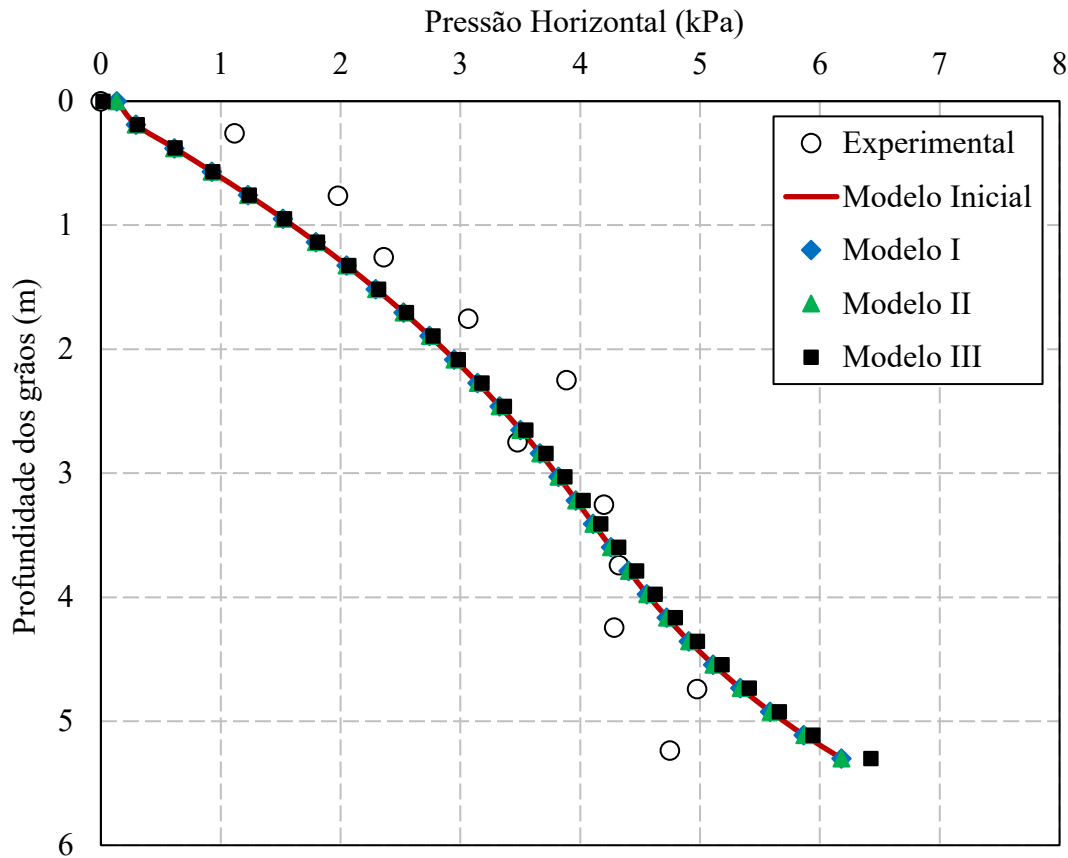
elemento linear C3D8R pelo elemento quadrático C3D20R. As configurações adotadas e os respectivos tempos de processamento são apresentados na Tabela 4.2, enquanto a Figura 4.11 apresenta a distribuição das pressões horizontais obtidas para cada estratégia de modelagem.

Tabela 4.2 - Estratégias de modelagem avaliadas e respectivos tempos de processamento

Modelo	Não linearidade geométrica	Paredes flexíveis	Elemento quadrático	Tempo de processamento (s)
Modelo Inicial	Não	Não	Não (C3D8R)	57
Modelo I	Sim	Não	Não (C3D8R)	57
Modelo II	Não	Sim	Não (C3D8R)	55
Modelo III	Não	Não	Sim (C3D20R)	11580

Fonte: Autor (2026)

Figura 4.11 - Influência das diferentes estratégias de modelagem nas pressões horizontais



Fonte: Autor (2026)

De um modo geral, os resultados mostraram que as diferentes estratégias de modelagem exerceram influência limitada tanto na magnitude quanto na distribuição das pressões horizontais ao longo da altura do silo. O Modelo Inicial e os Modelos I e II apresentaram

respostas praticamente coincidentes, com erro relativo médio, calculado como a média dos erros relativos ponto a ponto ao longo de toda a altura do silo, em relação aos dados experimentais de Cheung (2007), de 17,69%. Esse comportamento indica que a consideração da não linearidade geométrica e a remoção dos travamentos laterais das paredes, nas condições analisadas, não alteraram de forma significativa a resposta estrutural do modelo, sugerindo que esses efeitos possuem influência secundária sobre a estimativa das pressões horizontais.

O Modelo III, por sua vez, apresentou uma diferença média de 1,42% em relação às demais estratégias de modelagem, concentrada principalmente na região da base do silo, onde foi observada a maior discrepância, correspondente a um aumento de 3,96% na pressão horizontal. Apesar dessa pequena diferença, o Modelo III demandou um tempo de processamento de 11580 segundos (aproximadamente 3 horas e 13 minutos), cerca de 200 vezes superior ao tempo médio das demais estratégias (57 segundos). Esse elevado custo computacional inviabiliza a sua utilização em análises subsequentes, especialmente na etapa de análise paramétrica, que requer a simulação de múltiplas configurações geométricas de silo.

Considerando que as diferenças entre os resultados das quatro estratégias de modelagem foram pouco significativas, e visando à eficiência computacional, optou-se por adotar o Modelo Inicial nas etapas subsequentes deste trabalho, em concordância com a abordagem empregada por Hilal *et al.* (2022).

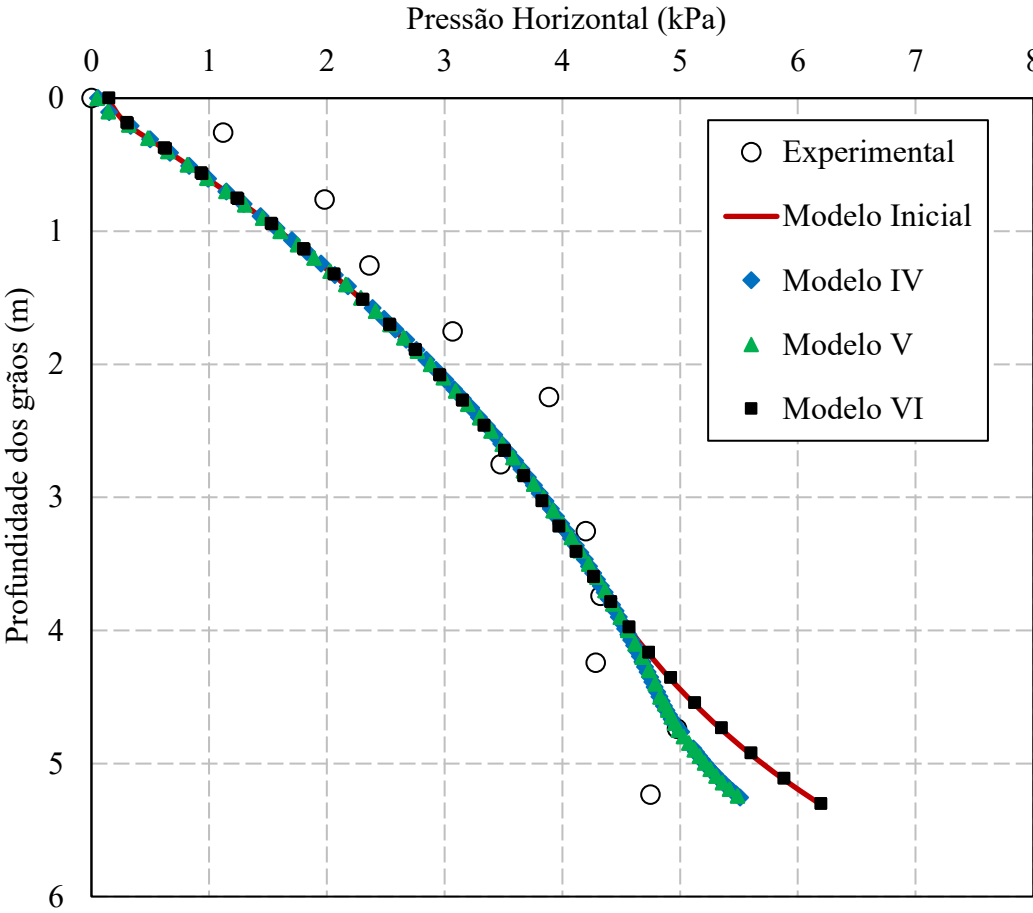
4.2.4 Estudo de malha

No estudo de malha, avaliaram-se três estratégias alternativas de discretização em relação à adotada no Modelo Inicial: malha gradual ao longo da altura do silo (Modelo IV), malha refinada apenas na região da base (Modelo V) e remoção do fundo do silo (Modelo VI), com o objetivo de aprimorar a qualidade da discretização. As configurações analisadas, bem como os respectivos tempos de processamento, são apresentados na Tabela 4.3, enquanto a Figura 4.12 e a Figura 4.13 ilustram a distribuição das pressões horizontais obtidas para cada estratégia.

Tabela 4.3 - Configurações de discretização de malha e respectivos tempos de processamento

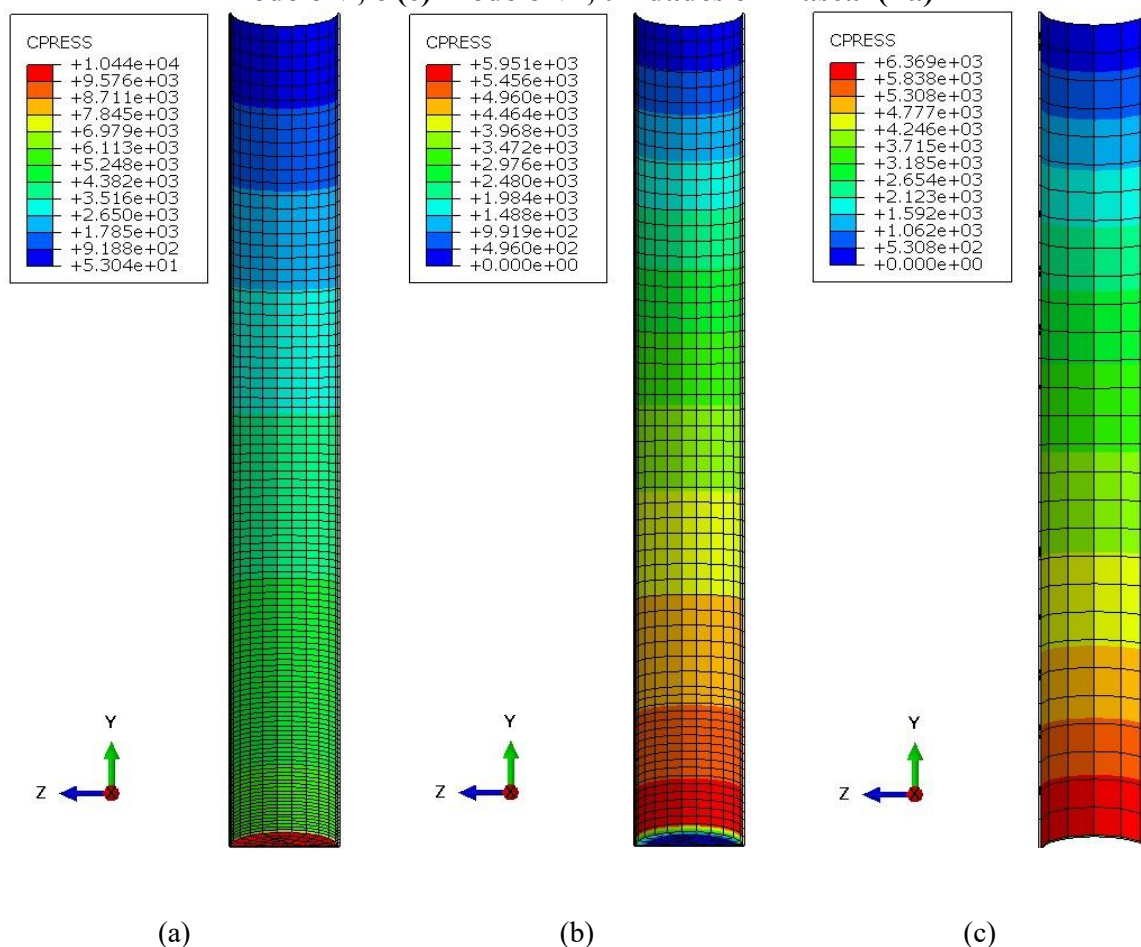
Modelo	Malha gradual	Malha refinada na base	Com fundo	Tempo de processamento (s)
Modelo Inicial	Não	Não	Sim	57
Modelo IV	Sim	Não	Sim	25260
Modelo V	Não	Sim	Sim	7440
Modelo VI	Não	Não	Não	57

Figura 4.12 - Influência da discretização da malha na distribuição pressões das horizontais



Fonte: Autor (2026)

Figura 4.13 - Distribuição das pressões horizontais na parede do silo: (a) Modelo IV; (b) Modelo V; e (c) Modelo VI, unidades em Pascal (Pa)



Fonte: Autor (2026)

Os resultados mostraram que os Modelos IV e V apresentaram respostas praticamente coincidentes quanto à magnitude e à distribuição das pressões horizontais, com erro relativo médio de 16,90% em relação aos dados experimentais de Cheung (2007), calculado como a média dos erros relativos ponto a ponto ao longo de toda a altura do silo. O Modelo VI, por sua vez, apresentou comportamento coincidente com o Modelo Inicial, com erro relativo médio de 17,69%, indicando que a remoção do fundo do silo não influenciou a resposta numérica do modelo.

Na comparação entre os Modelos IV e V e os Modelos Inicial e VI, observou-se uma redução de 11,22% na diferença em relação à pressão horizontal máxima na região próxima à base do silo, onde as pressões e as tensões atuantes são mais elevadas. Este resultado evidencia que o refinamento da discretização nessa região contribui para melhorar a representação das pressões horizontais.

Em termos de custo computacional, contudo, o Modelo VI não apresentou qualquer vantagem em relação ao Modelo Inicial, mantendo o mesmo tempo de processamento (57 segundos), o que refutou a hipótese de que a remoção do fundo reduziria o tempo de análise. Em contrapartida, os Modelos IV e V demandaram tempos de processamento significativamente superiores. O Modelo IV (malha gradual) apresentou o maior custo computacional, com 25260 segundos (7h 01min), cerca de 443 vezes superior ao do Modelo Inicial. O Modelo V (malha refinada na base), por sua vez, apresentou o menor custo entre as estratégias que proporcionaram melhoria nos resultados, com 7440 segundos (2h 04min), ainda assim cerca de 130 vezes superior ao do Modelo Inicial.

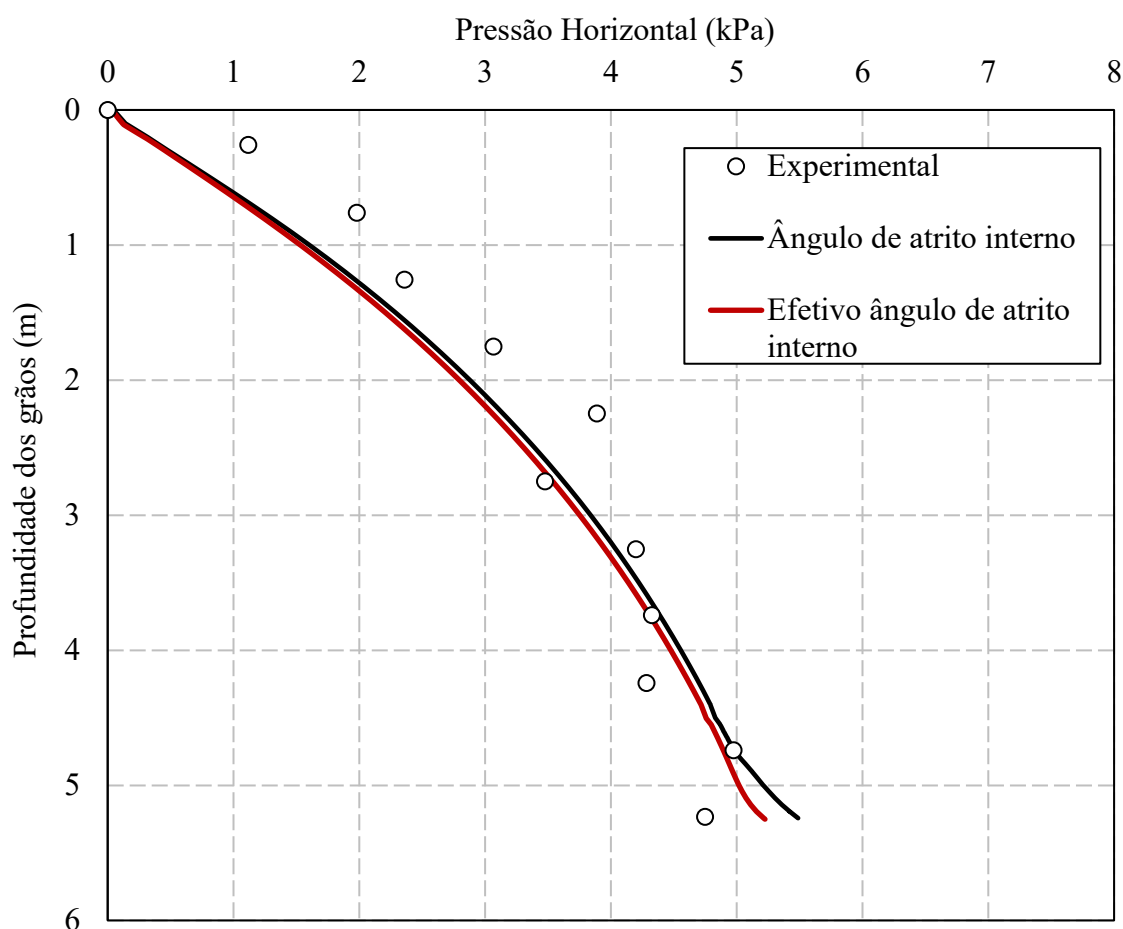
Diante desse cenário, considerando o compromisso entre a melhoria na aproximação aos resultados experimentais e a eficiência computacional, adotou-se como configuração final o Modelo V, com refinamento da malha na região da base do silo, por apresentar o menor custo computacional entre as estratégias avaliadas.

4.2.5 Ângulo de atrito interno

Para o cálculo analítico das pressões horizontais, algumas metodologias utilizam o efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e) em substituição ao ângulo de atrito interno (ϕ_i), como as formulações teóricas de Walker (1966) e de Walters (1973), bem como na norma australiana AS 3774 (1996). Com o objetivo de verificar a influência desse parâmetro e buscar uma melhor aproximação com os resultados experimentais de Cheung (2007), avaliou-se também sua adoção no modelo numérico.

Inicialmente, o modelo foi calibrado utilizando o ângulo de atrito interno de $34,81^\circ$. Em seguida, esse parâmetro foi substituído pelo efetivo ângulo de atrito interno de $35,71^\circ$, o que proporcionou melhor concordância entre os resultados numéricos e os dados experimentais de Cheung (2007), conforme apresentado na Figura 4.14. Além disso, essa substituição reduziu significativamente o tempo de processamento, que passou de aproximadamente 2 horas para cerca de 20 minutos.

Figura 4.14 - Análise comparativa entre o uso do efetivo ângulo de atrito interno e do ângulo de atrito interno na modelagem numérica



Fonte: Autor (2026)

Diante desses resultados, aliados e considerando o respaldo teórico apresentado pela literatura, adotou-se a utilização do efetivo ângulo de atrito interno na calibração final do modelo numérico.

4.2.6 Modelo numérico calibrado

Concluídas as etapas de estudo de sensibilidade, definição do modelo constitutivo, avaliação das estratégias de modelagem, estudo de malha e análise da influência do efetivo ângulo de atrito interno, esta seção apresenta a síntese dos parâmetros finais adotados para o modelo numérico. Na sequência, realiza-se sua calibração final por meio da comparação dos resultados numéricos com os dados experimentais de Cheung (2007) e com a equação de Janssen (1895), formulação clássica que fundamenta a maioria dos métodos analíticos

empregados no cálculo das pressões em silos.

Os parâmetros finais adotados para o modelo numérico estão apresentados na Tabela 4.4. Para a representação do comportamento do produto granular, foi empregado o critério constitutivo de Drucker-Prager. A discretização da malha correspondeu à estratégia definida no Modelo V, com elementos de 10 cm ao longo da estrutura e refinamento de 5 cm na região da base, estendendo-se até 1 m acima do fundo do silo.

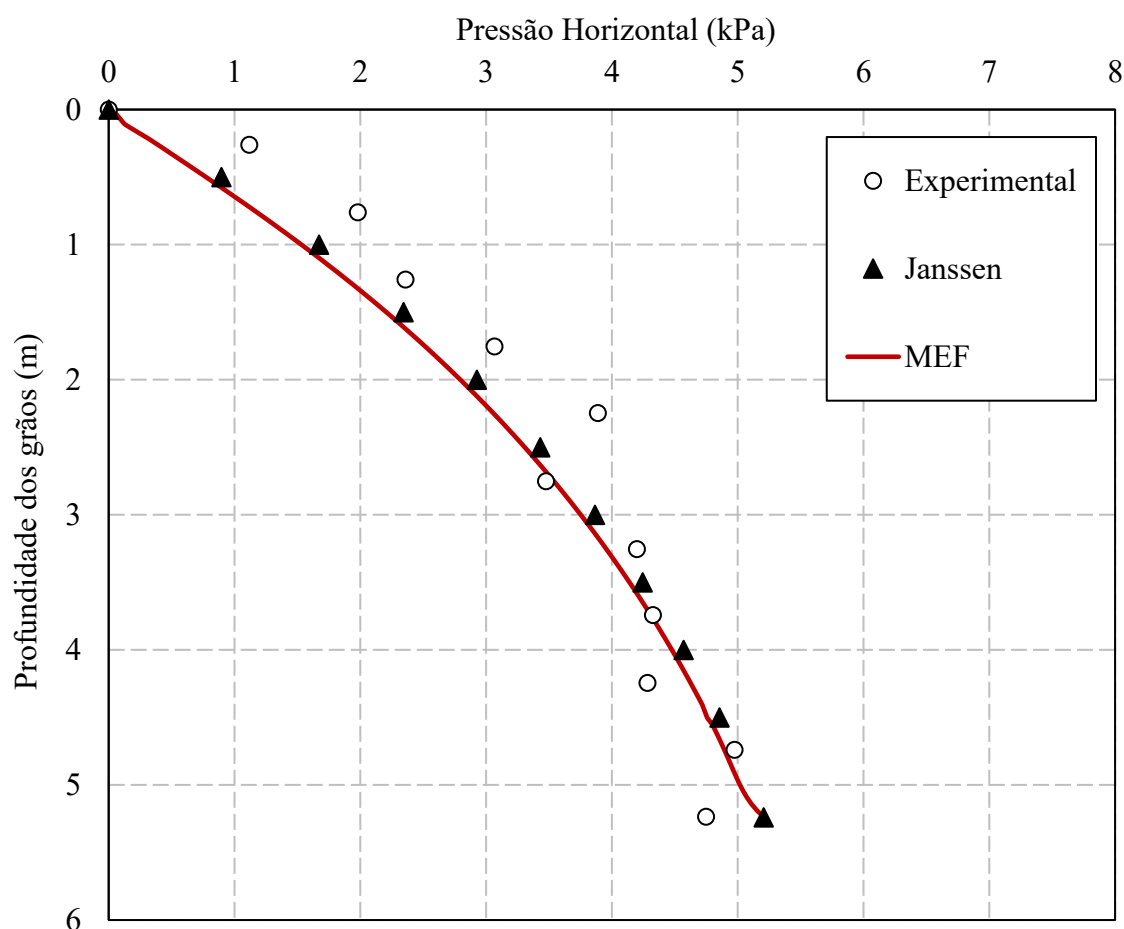
Tabela 4.4 - Parâmetros adotados para a calibração final do modelo numérico

Propriedade	Valor
Peso específico (kN/m ³)	7,18
μ_w	0,186
ϕ_e (°)	35,71
Coesão c (kPa)	0,23
E (kPa)	3476
ν	0,20
ψ (°)	14

Fonte: Autor (2026)

A Figura 4.15 apresenta a comparação entre a distribuição das pressões horizontais ao longo da altura do silo obtida experimentalmente por Cheung (2007), a prevista pela formulação teórica de Janssen (1895) e a determinada por meio da modelagem numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF).

Figura 4.15 - Pressão horizontal distribuída ao longo da altura do silo: comparação entre resultados experimentais, analíticos e numéricos



Fonte: Autor (2026)

A Tabela 4.5 apresenta a comparação quantitativa entre os resultados experimentais, analíticos e numéricos por meio dos erros relativos calculados entre o modelo numérico e os dados experimentais, bem como entre estes e os valores obtidos pela formulação analítica. De modo geral, o modelo numérico reproduziu satisfatoriamente o comportamento experimental ao longo de toda a altura do silo, com discrepâncias mais acentuadas na região superior (até aproximadamente 2,25 m de profundidade) e elevada concordância na região central e na base do silo, onde se concentram as maiores pressões horizontais.

Tabela 4.5 - Avaliação dos erros relativos do modelo numérico e da formulação de Janssen (1895) em relação aos dados experimentais de Cheung (2007)

Profundidade (m)	Exp. (kPa)	MEF (kPa)	Erro Relativo MEF (%)	Janssen (kPa)	Erro Relativo Janssen (%)
0	0	0,19	-	0,00	-
0,26	1,12	0,45	59,82	0,48	5,57
0,76	1,98	1,24	37,37	1,30	4,55
1,26	2,36	1,95	17,37	2,01	3,09
1,75	3,07	2,47	19,54	2,62	5,68
2,25	3,89	3,02	22,37	3,16	4,31
2,75	3,48	3,5	0,57	3,62	3,36
3,25	4,2	3,92	6,67	4,03	2,62
3,74	4,33	4,29	0,92	4,37	1,80
4,24	4,28	4,60	7,48	4,67	1,56
4,74	4,98	4,90	1,61	4,94	0,74
5,23	4,75	5,21	9,68	5,16	0,95

Fonte: Autor (2026)

O maior erro relativo entre o modelo numérico e os dados experimentais ocorreu na profundidade de 0,26 m, próximo ao topo do silo, atingindo 59,82%. Esse valor elevado decorre da baixa magnitude das pressões nessa região (0,45 kPa no MEF, e 1,12 kPa no ensaio experimental), de modo que pequenas diferenças absolutas resultam em grandes variações relativas, sem necessariamente indicar baixa aderência do modelo numérico aos resultados experimentais.

Adicionalmente, ressalta-se que discrepâncias mais elevadas podem estar associadas à própria variabilidade inerente aos dados experimentais, uma vez que as pressões horizontais medidas em ensaios apresentam dispersão natural em função de fatores como a heterogeneidade do produto granular e as condições de ensaio (Rotter *et al.*, 1998).

Por outro lado, o menor erro, de apenas 0,57%, foi observado na profundidade de 2,75 m, na região central do silo, onde as pressões apresentam magnitudes mais representativas.

Ao se analisar especificamente a região central e fundo do silo, de 2,75 m a 5,23 m, o erro relativo médio entre o modelo numérico e os dados experimentais foi de apenas 4,49%, evidenciando que o modelo numérico foi capaz de representar adequadamente o comportamento das pressões horizontais nas regiões mais críticas do silo, onde ocorre maior concentração de tensões e maiores valores de pressão. Quando a comparação é estendida para toda a altura do silo, o erro relativo médio aumenta para 16,67%, indicando que essa diferença é fortemente influenciada pelos valores obtidos na região superior, onde as pressões são

reduzidas e, conseqüentemente, mais sensíveis a pequenas variações.

Em relação aos resultados analíticos, a equação de Janssen (1895) apresentou comportamento bastante semelhante ao do modelo numérico quando comparada aos dados experimentais. Considerando toda a altura do silo, o erro relativo médio foi de 15,21%, valor próximo aos 16,67% obtidos pelo MEF. Na região central e na base, o erro médio foi de 4,59%, praticamente coincidente com os 4,49% obtidos pelo modelo numérico. Além disso, a comparação direta entre os resultados do MEF e da formulação de Janssen resultou em um erro relativo médio de apenas 3,11%.

De uma forma geral, esses resultados indicam que o modelo numérico desenvolvido reproduz o comportamento das pressões horizontais com precisão comparável ao da própria formulação analítica de Janssen (1895), o que reforça a coerência física e a confiabilidade do modelo calibrado.

4.3 ANÁLISES DESENVOLVIDAS NO SILO-PILOTO

Esta seção apresenta os resultados da análise paramétrica e dos modelos analíticos desenvolvidos com base na geometria do silo-piloto calibrado na Seção 4.2, avaliando a influência das propriedades geométricas e do tipo de produto armazenado sobre as pressões horizontais na condição estática.

4.3.1 Análise Paramétrica

A análise paramétrica desta seção foi conduzida a partir de variações nos parâmetros geométricos do silo-piloto (altura e diâmetro), conforme descrito na metodologia, bem como da variação do tipo de produto granular armazenado. Nas variações geométricas, buscou-se manter a relação altura/diâmetro (H/D) dentro da faixa característica de silos esbeltos, variando de 3,90 a 11,33 entre os seis modelos avaliados, com exceção do modelo de maior diâmetro (D2,824), cuja relação $H/D = 1,95$ se aproxima do limite inferior dessa classificação, conforme apresentado na Tabela 4.6.

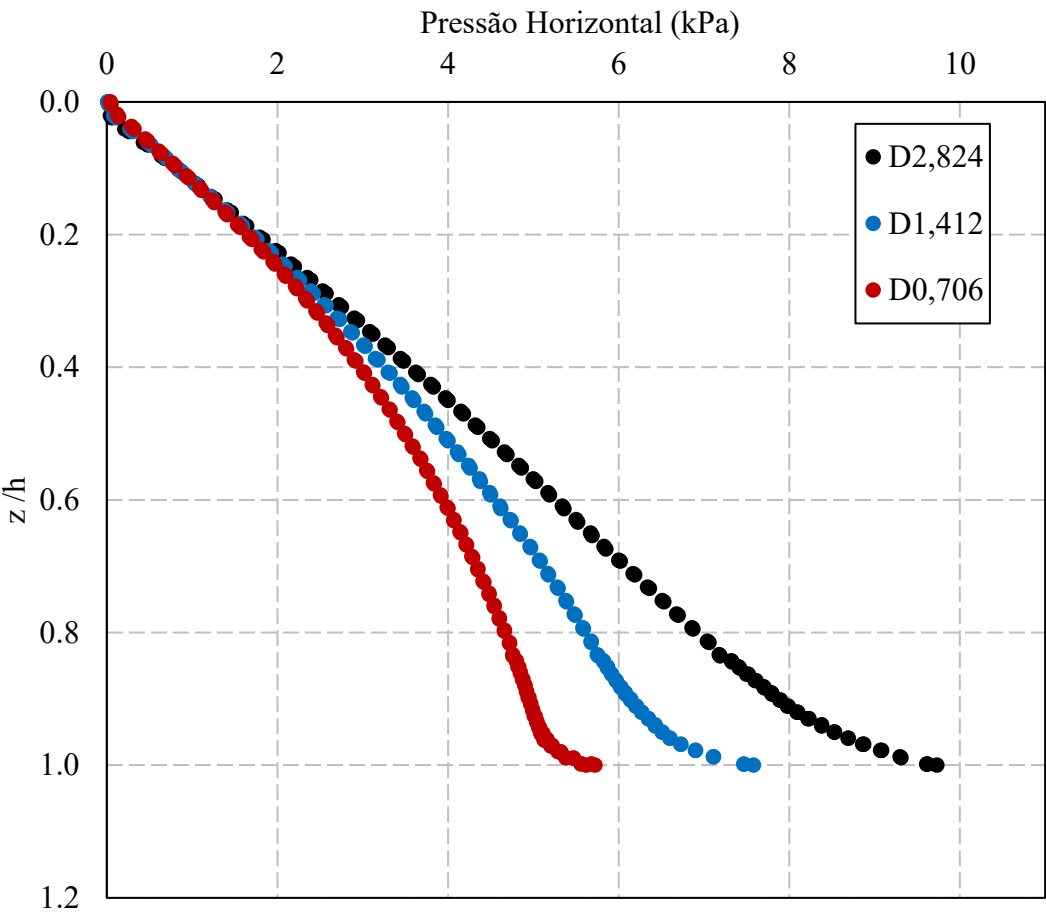
Tabela 4.6 - Dimensões geométricas dos silos avaliados na análise paramétrica

Identificação	Altura total (m)	Diâmetro (m)	Relação H/D
D0,706	5,50	0,706	7,79
D1,412		1,412	3,90
D2,824		2,824	1,95
H3,0	3,00	0,706	4,25
H5,5	5,50		7,79
H8,0	8,00		11,33

Fonte: Autor (2026)

A Figura 4.16 apresenta a distribuição das pressões horizontais ao longo da altura relativa (z/h) para os silos com altura constante de 5,5 m e diâmetro variável.

Figura 4.16 - Influência do diâmetro na distribuição das pressões horizontais no silo-piloto



Fonte: Autor (2026)

Observa-se na Figura 4.16 que o aumento do diâmetro resulta no incremento da

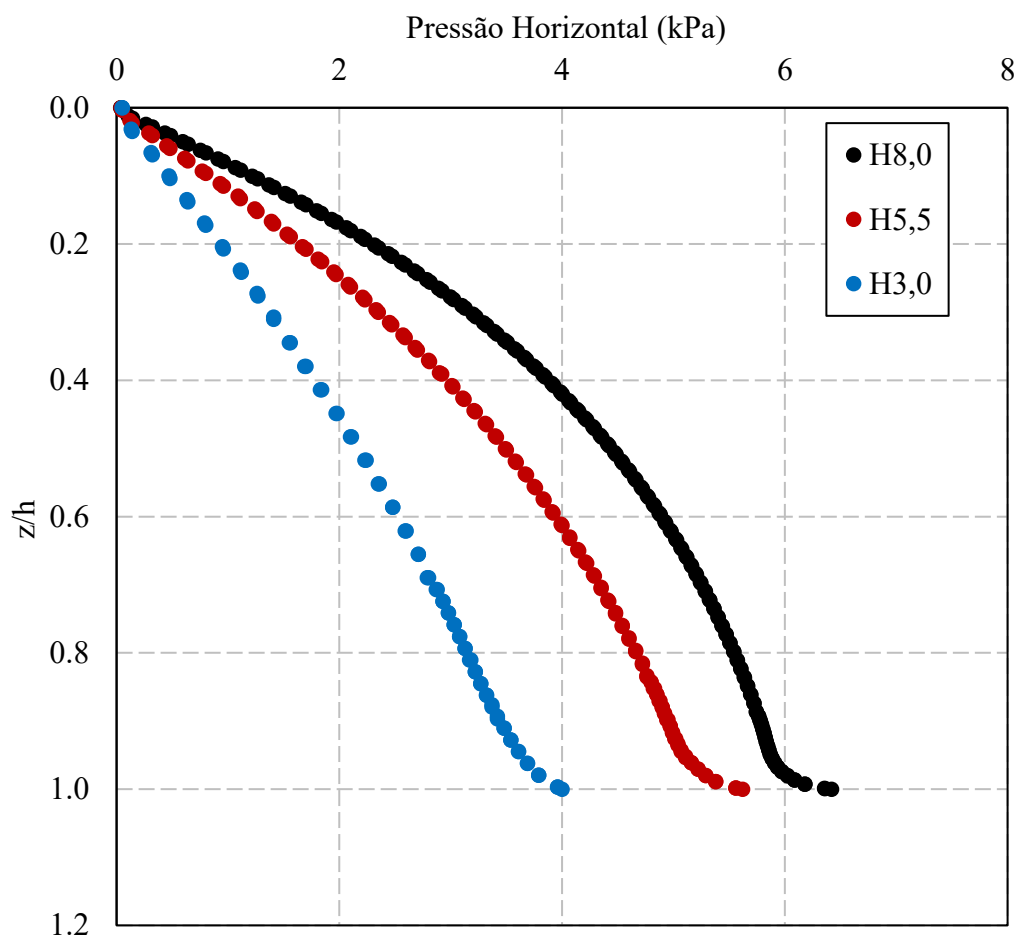
magnitude das pressões horizontais de carregamento. Além disso, verifica-se uma alteração forma da distribuição ao longo da altura: para os maiores diâmetros (D1,412 e D2,824), a curva tende a um comportamento aproximadamente linear, enquanto para o menor diâmetro (D0,706) mantém-se o padrão não linear, conforme também reportado por Hilal e Sanad (2025). Esses resultados indicam que a geometria transversal influencia diretamente o mecanismo de distribuição das tensões internas no silo.

Verifica-se ainda que o modelo de maior diâmetro (D2,824) apresenta os maiores valores de pressão, seguido pelo modelo intermediário (D1,412) e pelo de menor diâmetro (D0,706), comportamento também relatado por Hilal e Sanad (2025). Esse padrão se intensifica nas proximidades da base ($z/h \approx 1$), região em que são registrados os maiores valores de pressão.

Em termos quantitativos, o aumento do diâmetro do modelo menor para o intermediário (variação de 200%) resultou em acréscimo aproximado de 39,2% na pressão máxima na base. Entre o modelo intermediário e o de maior diâmetro (também com variação de 200%), o incremento adicional foi de 22,1%. Considerando os modelos extremos, um aumento de 400% no diâmetro implicou elevação de aproximadamente 70% na pressão máxima. Esses resultados mostram que o aumento das pressões horizontais ocorre de forma não linear em relação à variação do diâmetro.

A Figura 4.17 apresenta a distribuição das pressões horizontais ao longo da altura relativa (z/h) para os silos com diâmetro constante de 70,6 cm e altura variável.

Figura 4.17 - Influência da altura na distribuição das pressões horizontais no silo-piloto



Fonte: Autor (2026)

Na Figura 4.17 observa-se que o aumento da altura do silo também resulta no incremento da magnitude das pressões horizontais. O modelo de maior altura (H8,0) apresentou os maiores valores de pressão, seguido pelos modelos H5,5 e H3,0. Esse comportamento é explicado pelo aumento da coluna de produto granular armazenado, o que eleva o peso próprio atuante e, consequentemente, as tensões verticais com a profundidade, refletindo-se em maiores pressões horizontais transmitidas à parede do silo.

O aumento da altura do modelo H3,0 para H5,5 (83,3%) resultou em um acréscimo aproximado de 43% na pressão horizontal máxima na base. Entre os modelos H5,5 e H8,0 (variação de 45,5%), verificou-se incremento adicional de aproximadamente 12,2%. Considerados modelos extremos, um aumento de 166,7% na altura implicou elevação total de 60,5% na pressão horizontal máxima. Esses resultados evidenciam que a altura exerce influência significativa na magnitude das pressões horizontais. Entretanto, a relação entre essas grandezas não é proporcional, indicando um comportamento não linear das pressões em função

do aumento da altura do silo, tendência também observada por Hilal e Sanad (2025).

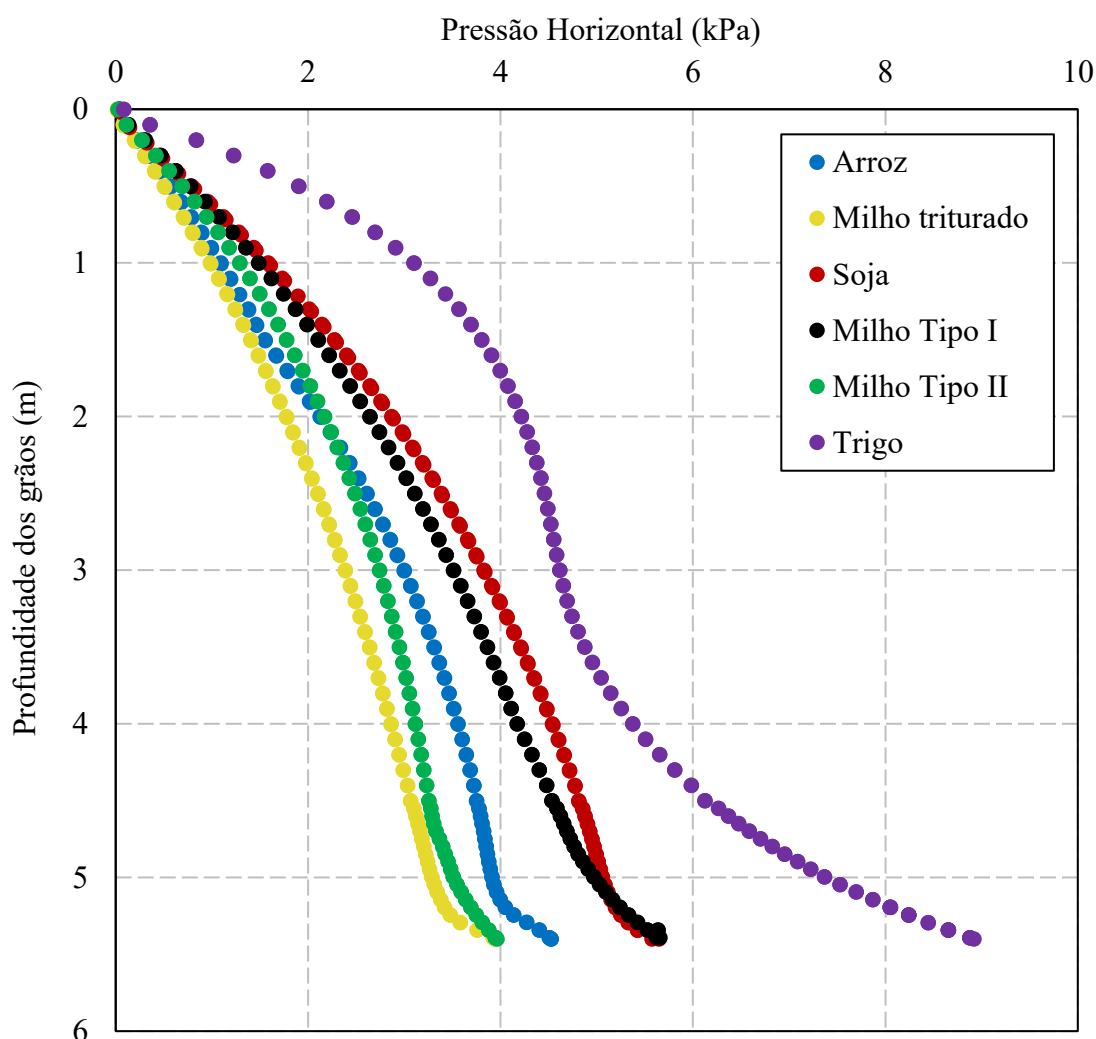
A Figura 4.18 apresenta os resultados da análise paramétrica referente à variação do tipo de produto armazenado, mantendo-se constante a geometria do silo-piloto (altura de 5,5 m e diâmetro de 70,6 cm), com o objetivo de avaliar a influência das propriedades dos grãos (Tabela 4.7) na magnitude e na distribuição das pressões horizontais ao longo da parede do silo.

Tabela 4.7 – Propriedades dos produtos consideradas na análise paramétrica

Produto	γ (kN/m³)	μ_w (°)	ϕ_i (°)	c (kPa)	E (MPa)	ν	ψ (°)
Arroz	8,07	0,306	37,00	3,49	12,75	0,14	18,08
Milho triturado	7,82	0,302	43,00	4,42	10,66	0,13	21,03
Soja	7,18	0,189	34,81	0,23	3,48	0,20	14,00
Milho Tipo I	8,10	0,226	29,53	0,04	34,80	0,18	33,60
Milho Tipo II	7,52	0,340	38,8	7,00	34,80	0,18	33,60
Trigo	8,03	0,290	19,3	6,60	37,35	0,39	19,70

Fonte: Autor (2026)

Figura 4.18 – Influência do tipo de produtos armazenado na distribuição das pressões horizontais



Fonte: Autor (2026)

Verifica-se que a variação do produto armazenado influenciou significativamente tanto a magnitude quanto a distribuição das pressões horizontais. Embora a teoria de Janssen (1895) estabeleça que as pressões horizontais são diretamente proporcionais ao peso específico do produto armazenado, os resultados numéricos indicam que esse parâmetro, quando considerado isoladamente, não é suficiente para explicar o comportamento observado. Isso ocorre porque, no modelo numérico, além do peso específico, propriedades mecânicas como o coeficiente de atrito do produto com a parede e o coeficiente de Poisson, também exercem influência sobre a magnitude e a distribuição das pressões horizontais.

Como exemplo, as curvas correspondentes ao arroz e ao milho triturado apresentaram comportamento compatível com a tendência prevista pela teoria de Janssen. Embora ambos

possuam coeficientes de atrito semelhantes ($\mu_w \approx 0,30$) e coeficientes de Poisson praticamente iguais (0,14 e 0,13, respectivamente), o arroz apresenta peso específico aproximadamente 3,1% superior, resultando em uma pressão máxima de 4,53 kPa, enquanto o milho triturado atingiu 3,94 kPa, diferença de aproximadamente 13%. Embora o aumento da pressão não seja proporcional ao incremento do peso específico, esse comportamento está em conformidade com a tendência prevista pela teoria de Janssen, evidenciando que, quando os demais parâmetros apresentam valores semelhantes, o peso específico exerce influência predominante sobre a magnitude das pressões horizontais.

Entretanto, essa tendência não foi observada para todos os produtos. A soja apresentou pressões horizontais superiores às do milho Tipo I ao longo de grande parte da altura do silo e pressão máxima praticamente equivalente (diferença de apenas 0,89%), embora seu peso específico seja aproximadamente 11,4% inferior. Esse resultado evidencia que, no modelo numérico, o peso específico não atua isoladamente na determinação das pressões horizontais. Nesse caso, o comportamento observado está associado à combinação de outras propriedades do produto, principalmente ao maior coeficiente de Poisson da soja ($\nu = 0,20$) e ao seu menor coeficiente de atrito com a parede ($\mu_w = 0,189$), em comparação ao milho Tipo I ($\nu = 0,18$ e $\mu_w = 0,226$).

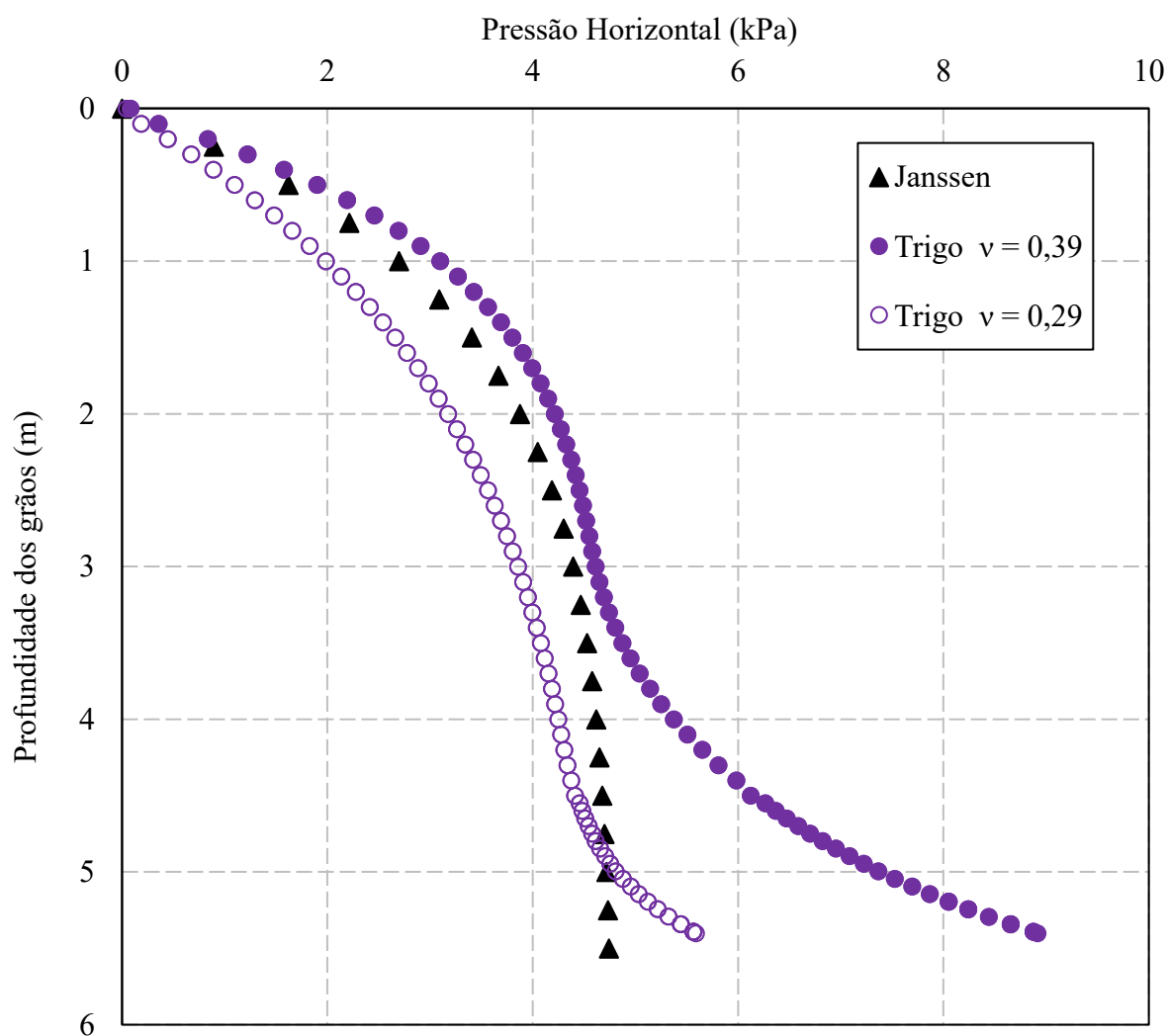
A redução do coeficiente de atrito favorece o aumento das pressões horizontais, comportamento também observado por Gandia *et al.* (2021) e por Hilal e Sanad (2025). Esse efeito contribui para explicar por que produtos com maior peso específico podem apresentar pressões horizontais inferiores às de produtos menos densos, como observado para o arroz e o milho triturado em comparação com a soja. Esse comportamento também é coerente com a teoria de Janssen, segundo a qual o aumento do coeficiente de atrito com a parede intensifica a transferência de parte da carga vertical para a estrutura por meio das tensões de atrito, reduzindo as tensões verticais na massa granular e, conseqüente, as pressões horizontais exercidas sobre a parede do silo.

Além disso, notou-se que a curva correspondente ao trigo apresentou comportamento significativamente distinto das demais, com valores que divergem da tendência prevista pela teoria de Janssen, especialmente nas maiores profundidades do silo, conforme ilustrado na Figura 4.19. Esse comportamento foi atribuído ao elevado coeficiente de Poisson ($\nu = 0,39$) adotado com base nas recomendações de Moya, Sánchez e Villar-Garcia (2022).

Com o objetivo de compreender a influência desse parâmetro sobre a resposta do modelo, foi realizada, em caráter complementar, uma análise exploratória de sensibilidade do

coeficiente de Poisson. Os resultados indicaram que a redução desse parâmetro para $\nu = 0,29$ proporcionou uma distribuição das pressões horizontais mais compatível com a prevista pela teoria de Janssen.

Figura 4.19 - Comparação das pressões horizontais obtidas pelo MEF e pela Teoria de Janssen para o trigo



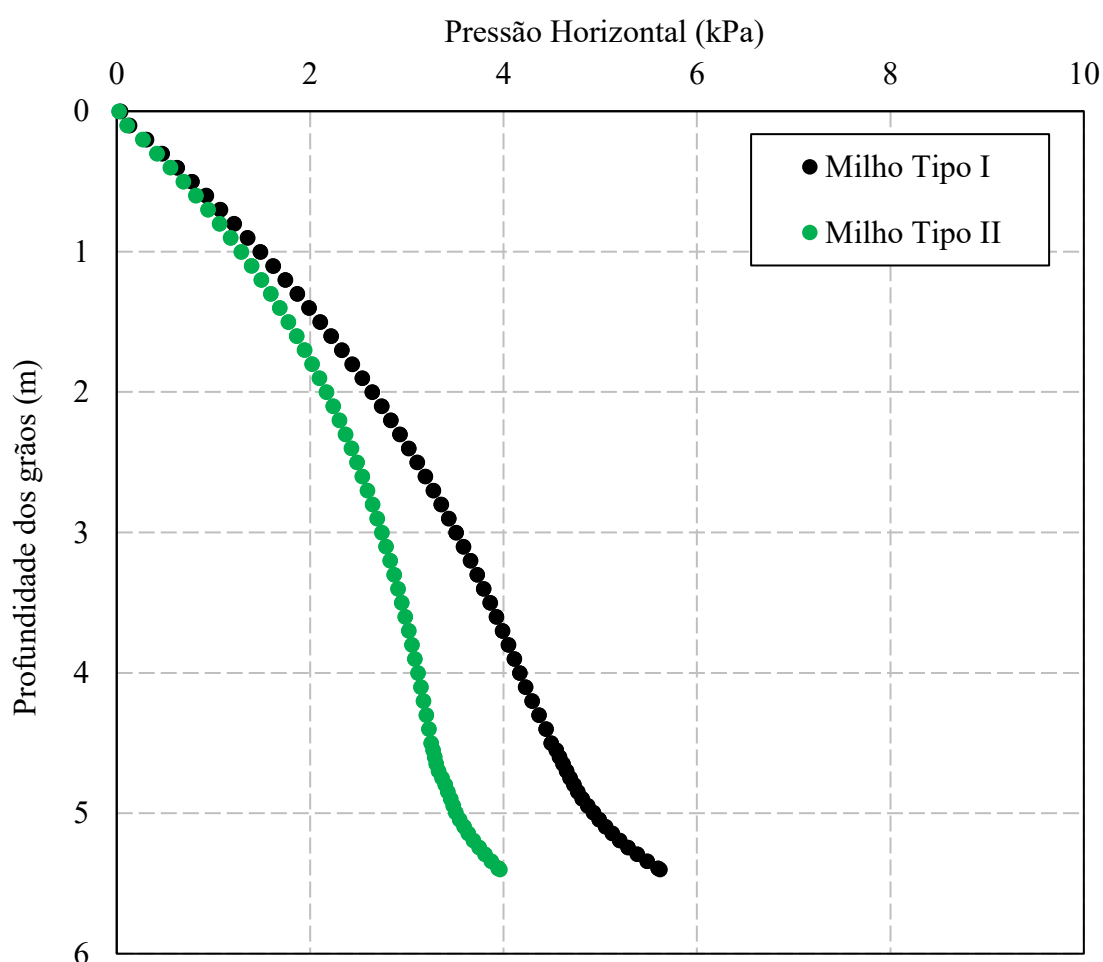
Fonte: Autor (2026)

A comparação entre os resultados numéricos para o trigo com coeficiente de Poisson igual a 0,39 e aqueles previstos pela teoria de Janssen evidenciou boa concordância ao longo dos primeiros 4 m de profundidade, intervalo em que as curvas apresentaram comportamento semelhante e erro relativo médio de 9,58%. Contudo, na região inferior do silo, correspondente aos 1,5 m finais, observou-se aumento expressivo das diferenças entre as previsões, elevando o

erro relativo médio para 54,68%. Em contrapartida, o comportamento da curva do trigo considerando um coeficiente de Poisson igual a 0,29, verificou-se uma melhor correlação com a teoria de Janssen, resultando em erro relativo médio de 7,21%.

Por fim, observa-se na Figura 4.20, que as curvas correspondentes aos dois tipos de milho apresentaram diferenças expressivas tanto na magnitude quanto na distribuição das pressões horizontais. O milho Tipo I apresentou os maiores valores de pressão, com diferença de 29,50% da pressão horizontal máxima, observada na base do silo. Essa discrepância está associada, principalmente, às diferenças no peso específico (7,16%), no coeficiente de atrito com a parede (50,44%) e no ângulo de atrito interno (30,29%).

Figura 4.20 - Comparação entre as curvas de pressão horizontal dos diferentes tipos de milho



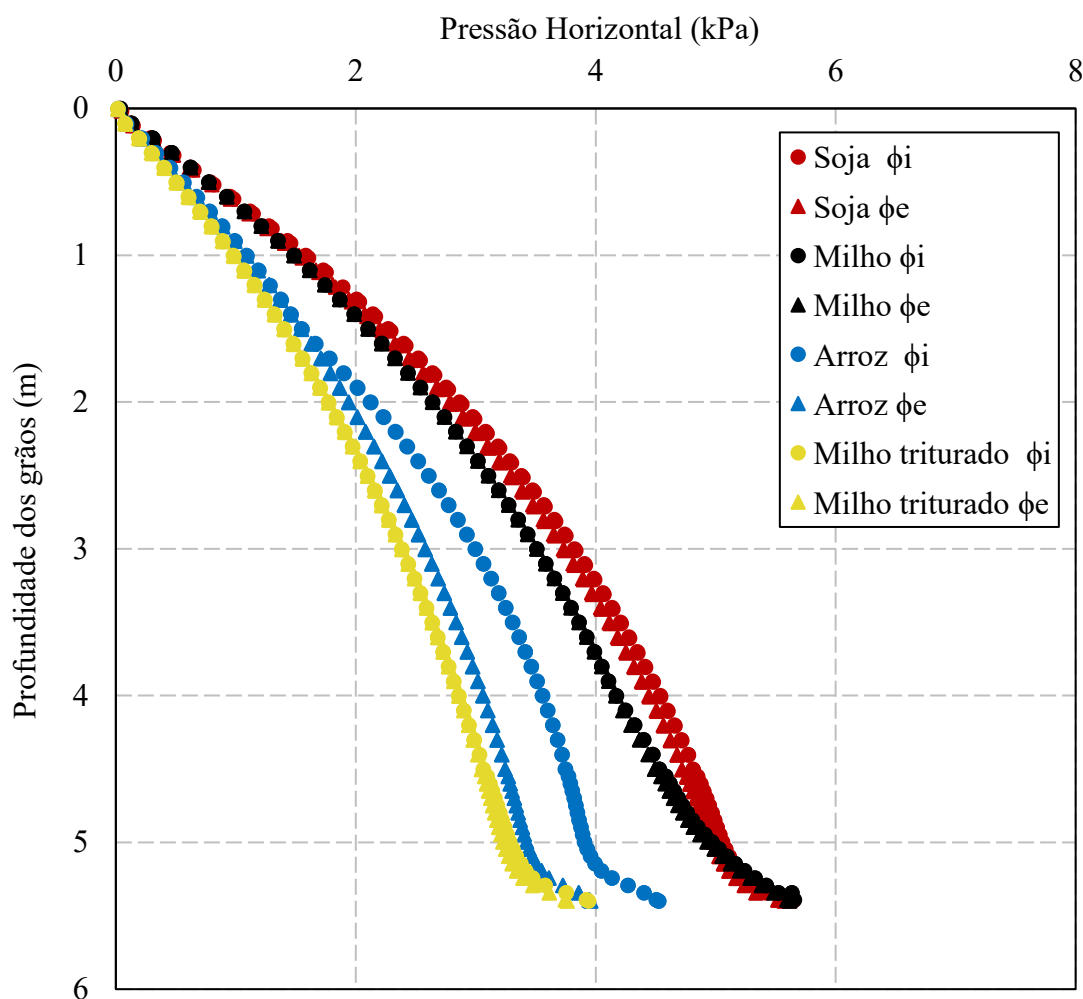
Fonte: Autor (2026)

Nota-se que o milho Tipo I possui um peso específico maior, menor coeficiente de atrito

com a parede e menor ângulo de atrito interno em comparação ao milho Tipo II. Os dois primeiros parâmetros já foram discutidos como fatores que contribuem para o aumento das pressões horizontais. Em relação ao ângulo de atrito interno, verifica-se que menores valores também estão associados a maiores pressões horizontais. Esse comportamento pode ser explicado pela teoria de Rankine, segundo a qual o aumento do ângulo de atrito interno reduz o coeficiente de empuxo horizontal. Do ponto de vista físico, maiores valores desse parâmetro indicam maior resistência ao cisalhamento do produto granular, restringindo sua tendência ao deslocamento lateral e, conseqüentemente, reduzindo as pressões horizontais exercidas sobre as paredes do silo (Hilal; Sanad, 2025).

Com o objetivo de avaliar de forma mais isolada a influência do ângulo de atrito interno sobre as pressões horizontais, realizou-se uma análise complementar utilizando o efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e), parâmetro que já vinha sendo empregado anteriormente nesta pesquisa, conforme ilustrado na Figura 4.21. Assim, foram adotados para o arroz, o milho triturado, a soja e o milho Tipo I os respectivos efetivos ângulos de atrito interno de 48,17°, 56,83°, 35,71° e 29,78°. Essa análise não foi realizada para o trigo e para o milho Tipo II, uma vez que, para esses produtos, foi determinado apenas o ângulo de atrito interno.

Figura 4.21 – Comparação entre o uso do ângulo de atrito interno (ϕ_i) e do efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e) nas pressões horizontais



Fonte: Autor (2026)

Segundo Hilal e Sanad (2025), a influência do ângulo de atrito interno nas pressões horizontais é relativamente baixa, comportamento que de fato foi observado para as curvas do milho triturado, da soja e do milho. Em contrapartida, a curva do arroz apresentou discrepância mais significativa, na qual uma diferença de 30,19% entre os ângulos de atrito resultou em uma diferença de 13,16% na pressão máxima na base.

4.3.2 Aplicação e comparação dos métodos analíticos para determinação das pressões horizontais

Nesta seção, os resultados experimentais obtidos no silo-piloto, caracterizado como silo esbelto ($H/D = 7,79$), são comparados às predições analíticas obtidas por meio da teoria de

Janssen (1895) e pelas normativas internacionais ANSI/ASAE EP433.1 (2024), EN 1991-4 (2006) e AS 3774 (1996). Inicialmente, são apresentados os principais parâmetros considerados por cada metodologia e a forma de determinação do parâmetro K. Em seguida, os resultados analíticos são comparados aos dados experimentais de Cheung (2007) em duas etapas. Na primeira etapa, são consideradas exclusivamente as equações de cálculo das pressões horizontais. Na segunda etapa, são incorporadas as combinações mais desfavoráveis previstas por cada norma, permitindo avaliar o grau de conservadorismo de cada metodologia e sua concordância com os resultados experimentais de Cheung (2007). Essa abordagem permite avaliar, separadamente, o desempenho dos métodos analíticos e a influência das margens de segurança previstas pelas normativas.

O Quadro 4.1 apresenta de forma comparativa os parâmetros que cada modelo analítico considera para o cálculo das pressões horizontais.

Quadro 4.1 - Parâmetros considerados pelos modelos analíticos no cálculo das pressões horizontais

Modelo Analítico	Janssen	ANSI/ASAE EP433.1	EN 1991-4	AS 3774
Parâmetro				
Peso específico (γ)	X	X	X	X
Coefficiente de atrito (μ_w)	X	X	X	X
Ângulo de atrito interno (ϕ_i)	X	X	X	
Efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e)				X
Parâmetro K	X	X	X	X
Profundidade dos grãos (z)	X	X	X	X
Área da seção transversal do silo (A)	X	X	X	
Perímetro da seção transversal do silo (U)	X	X	X	
Dimensão característica da seção transversal do silo (r_c)				X

Fonte: Autor (2026)

A comparação entre as metodologias analíticas indica que elas consideram, em sua maioria, os mesmos parâmetros para o cálculo das pressões horizontais. A teoria de Janssen (1895), a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) e a EN 1991-4 (2006), por exemplo, adotam os mesmos parâmetros. A AS 3774 (1996), por sua vez, apresenta algumas particularidades, como a utilização do efetivo ângulo de atrito interno em substituição ao ângulo de atrito interno, e utiliza a dimensão característica da seção transversal do silo (r_c) em sua metodologia, enquanto

os demais modelos utilizam a área (A) e o perímetro (U) da seção transversal do silo.

Embora todas as metodologias empreguem coeficiente de pressão lateral K para o cálculo das pressões horizontais, sua determinação difere entre elas. Como Janssen (1895) não apresentou uma formulação para a obtenção desse parâmetro, Koenen (1896) propôs sua estimativa por meio do coeficiente de empuxo ativo de Rankine, abordagem adotada neste trabalho. A ANSI/ASAE EP433.1 (2024), por sua vez, adota um valor constante de K igual a 0,50, independentemente do produto armazenado, enquanto as normas AS 3774 (1996) e EN 1991-4 (2006) determinam esse coeficiente por meio de formulações próprias. As respectivas equações e os valores obtidos para cada metodologia são apresentados na Tabela 4.8.

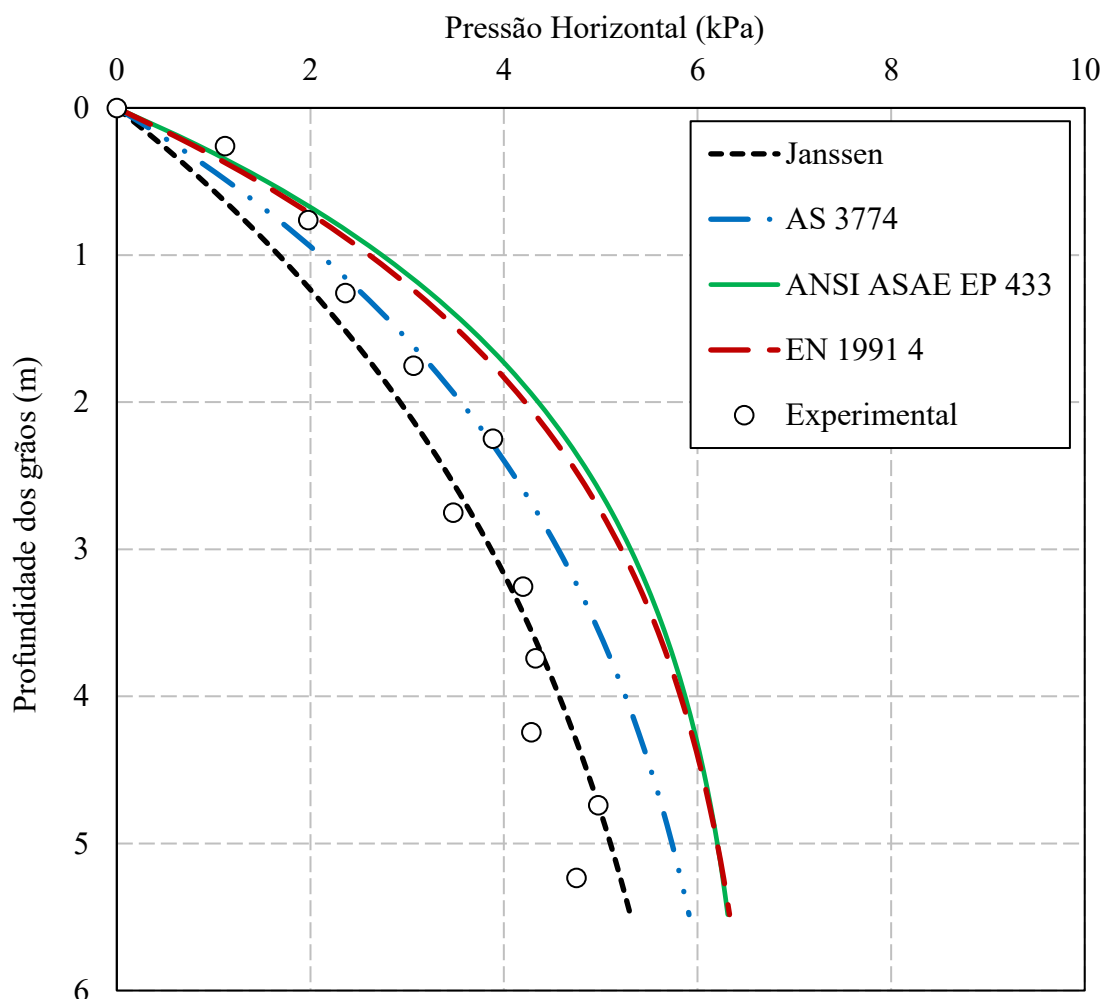
Tabela 4.8 - Equações e valores adotados do parâmetro K nos modelos analíticos

Modelo Analítico	Equação para obtenção do parâmetro K	Valor calculado
Janssen	$K = \frac{1 - \operatorname{sen} \phi_i}{1 + \operatorname{sen} \phi_i}$	0,27
ANSI/ASAE EP433.1	-	0,50
EN 1991-4	$K = 1,1(1 - \operatorname{sen} \phi_{im})$	0,46
AS 3774	$K = \frac{1 + \sin^2 \phi_e - 2\sqrt{(\sin^2 \phi_e - \mu^2 \cos^2 \phi_e)}}{4\mu^2 + \cos^2 \phi_e} \geq 0,35$	0,35

Fonte: Autor (2026)

A Figura 4.22 apresenta a comparação entre os resultados analíticos obtidos pela teoria de Janssen e pelas equações propostas pelas normas internacionais ANSI/ASAE EP433.1 (2024), EN 1991-4 (2006) e AS 3774 (1996), considerando exclusivamente as formulações para predição das pressões horizontais, sem a aplicação das combinações de carregamento mais desfavoráveis recomendadas por cada norma, comparação refere-se ao silo-piloto (silo metálico cilíndrico de fundo plano e paredes lisas) submetido ao armazenamento de soja na condição estática, tendo como referência com os resultados experimentais de Cheung (2007).

Figura 4.22 – Comparação entre os resultados dos modelos analíticos e experimentais



Fonte: Autor (2026)

Observa-se na Figura 4.22 que todos os modelos analíticos reproduzem a tendência característica de crescimento não linear das pressões horizontais com o aumento da profundidade, prevista pela teoria de Janssen (1895). Entretanto, diferenças significativas são observadas na magnitude das pressões estimadas por cada metodologia.

A curva de Janssen foi a menos conservadora e a que mais se aproximou dos resultados experimentais de Cheung (2007). Até a profundidade de 2 m, os modelos analíticos propostos pelas normas apresentaram valores relativamente próximos aos do experimental, sendo essa diferença mais acentuada nas camadas mais profundas, onde as pressões atingem seus maiores valores e, conseqüentemente, ocorrem as solicitações mais críticas em termos de dimensionamento. Nessa região, as normas AS 3774, ANSI/ASAE EP433.1 e EN 1991-4 forneceram pressões predominantemente superiores às experimentais, indicando

comportamento conservador a favor da segurança, enquanto a teoria de Janssen, por sua vez, apresentou maior proximidade com os valores experimentais, inclusive subestimando-os em alguns pontos.

Além disso, nota-se que no último ponto de instalação da célula de carga (profundidade de 5,23 m), as pressões calculadas pelos modelos analíticos apresentaram valores superiores aos do experimental. A norma EN 1991-4 (2006) superestimou a pressão horizontal neste ponto em 32,0%, sendo a mais conservadora, seguida da norma ANSI/ASAE EP433.1 (2024), da AS 3774 (1996) e da equação de Janssen, 31,8%, 22,7% e 9,6%, respectivamente.

A norma ANSI/ASAE EP433.1 (2024) adota a mesma equação proposta pela teoria de Janssen (1895) para o cálculo da pressão horizontal, contudo, as curvas não coincidem em razão do valor adotado para o parâmetro K. Para Janssen, o parâmetro K foi calculado com base na teoria de Rankine, ao passo que a norma americana recomenda a adoção de K igual a 0,50.

A Tabela 4.9 apresenta a comparação entre as pressões horizontais obtidas experimentalmente por meio das células de carga, e aquelas determinadas pelas metodologias analíticas, considerando as respectivas profundidades ao longo do silo.

Tabela 4.9 - Pressões experimentais e analíticas (sem combinações mais desfavoráveis)

Profundidade	Experimental	Janssen	AS 3774	ANSI/ASAE EP 433.1	EN 1991-4
z(m)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,26	1,12	0,48	0,62	0,85	0,80
0,76	1,98	1,32	1,67	2,21	2,09
1,26	2,36	2,03	2,53	3,24	3,10
1,75	3,07	2,65	3,24	4,03	3,89
2,25	3,89	3,18	3,84	4,64	4,51
2,75	3,48	3,66	4,34	5,11	5,01
3,25	4,20	4,06	4,76	5,48	5,40
3,74	4,33	4,41	5,10	5,75	5,69
4,24	4,28	4,71	5,39	5,97	5,93
4,74	4,98	4,98	5,63	6,13	6,12
5,23	4,75	5,20	5,82	6,26	6,27

Fonte: Autor (2026)

A análise dos dados da Tabela 4.9 evidencia que a teoria de Janssen apresentou a melhor concordância com os resultados experimentais ao longo de toda a profundidade do silo, com erro relativo médio de 15,12%. A norma AS 3774 (1996) apresentou desempenho

intermediário, com erro relativo médio de 17,42%. Por sua vez, as normas ANSI/ASAE EP433.1 (2024) e EN 1991-4 (2006) apresentaram os maiores desvios em relação aos resultados experimentais, com erros relativos médios de 29,82% e 27,77%, respectivamente, conforme detalhado na Tabela 4.10. Esses resultados indicam que, quando consideradas exclusivamente as equações de cálculo das pressões horizontais, sem a aplicação das combinações de carregamento previstas pelas normas, a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) e a EN 1991-4 (2006) tendem a fornecer estimativas mais conservadoras.

Tabela 4.10 - Erros relativos dos modelos analíticos em relação aos resultados experimentais (sem aplicação das combinações de carregamento)

Profundidade (m)	Janssen (%)	AS 3774 (%)	ANSI/ASAE EP 433.1 (%)	EN 1991-4 (%)
0,26	57,14	44,64	24,11	28,57
0,76	33,33	15,66	11,62	5,56
1,26	13,98	7,20	37,29	31,36
1,75	13,68	5,54	31,27	26,71
2,25	18,25	1,29	19,28	15,94
2,75	5,17	24,71	46,84	43,97
3,25	3,33	13,33	30,48	28,57
3,74	1,85	17,78	32,79	31,41
4,24	10,05	25,93	39,49	38,55
4,74	0,00	13,05	23,09	22,89
5,23	9,47	22,53	31,79	32,00
Média	15,12	17,42	29,82	27,77

Fonte: Autor (2026)

Em resumo, observa-se que, quando consideradas apenas as equações de cálculo das pressões horizontais, a teoria de Janssen apresentou a melhor concordância com os resultados experimentais, seguida da AS 3774 (1996). As normas ANSI/ASAE EP433.1 (2024) e EN 1991-4 (2006) forneceram estimativas mais conservadoras, comportamento associado principalmente aos maiores valores adotados para o parâmetro K. Esses resultados evidenciam que diferenças aparentemente pequenas na determinação desse parâmetro podem produzir variações significativas nas pressões horizontais previstas pelos modelos analíticos.

A Figura 4.23 apresenta os resultados analíticos obtidos pela equação de Janssen e pelas equações propostas pelas normativas internacionais AS 3774 (1996), ANSI/ASAE EP433.1 (2024) e EN 1991-4 (2006), desta vez com a aplicação das combinações mais desfavoráveis recomendadas por cada norma. A EN 1991-4 (2006) e a AS 3774 (1996) propõem combinações

de carregamento semelhantes entre si, adotando, para a pressão horizontal máxima, valor característico superior para o peso específico do produto e valores característicos inferiores para os ângulos de atrito do produto com a parede e de atrito interno (Tabela 4.11), com exceção da AS 3774 (1996), que especifica a utilização do efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e) em vez do ângulo de atrito interno (ϕ_i). Além disso, no caso da norma ANSI/ASAE EP433.1 (2024), adotou-se o coeficiente de atrito tabelado pela própria normativa ($\mu_w = 0,30$), referentes ao silo-piloto (silo cilíndrico metálico de fundo plano e paredes lisas) com armazenamento de soja na condição estática, em comparação com os resultados experimentais de Cheung (2007).

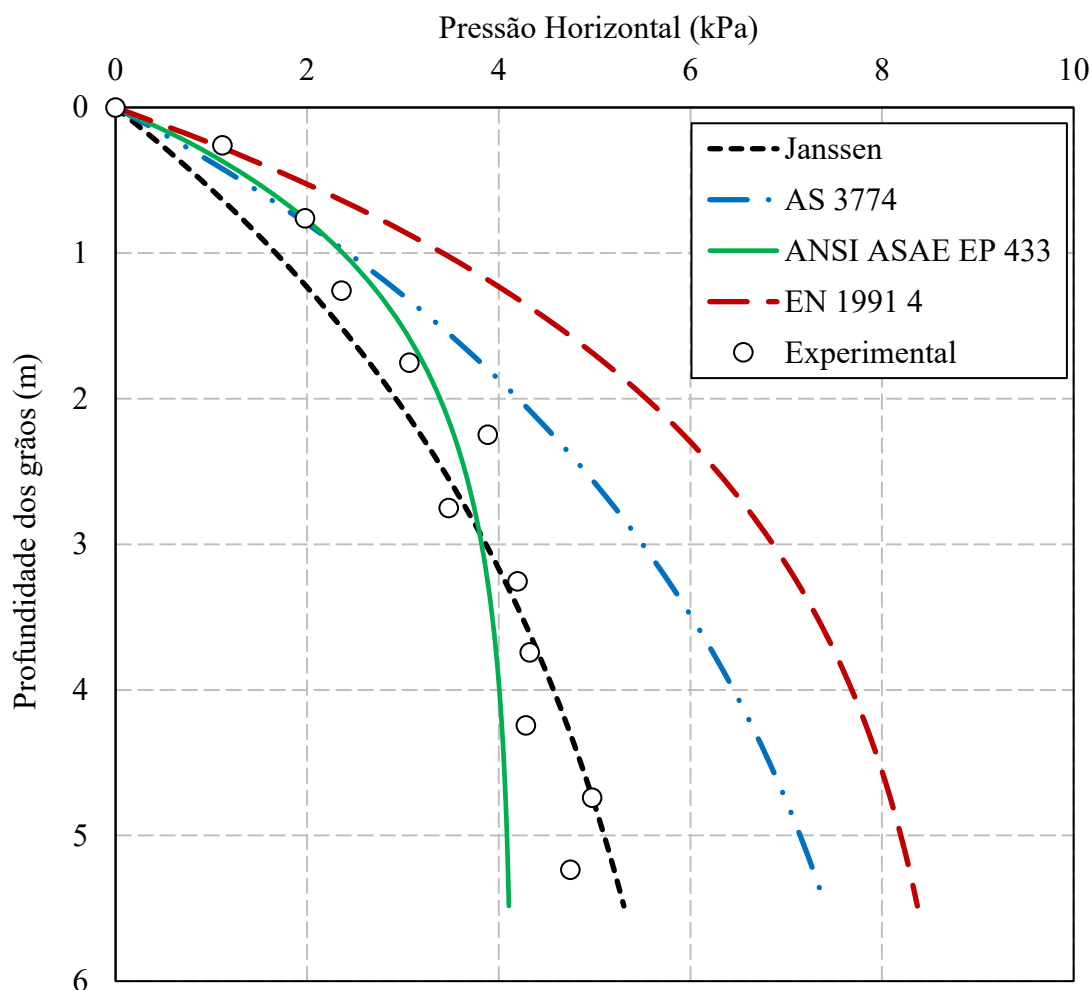
Tabela 4.11 - Combinações mais desfavoráveis para o cálculo das pressões horizontais

Aplicação	Valor característico a ser adotado		
	Peso específico (γ)	Ângulo de atrito do produto com a parede (ϕ_w)	Ângulo de atrito interno (ϕ_i) *
Pressão horizontal máxima	Superior	Inferior	Inferior
Pressão de atrito máxima	Superior	Superior	Inferior
Pressão vertical máxima	Superior	Inferior	Superior

* A AS 3774 (1996) considera o efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e).

Fonte: Autor (2026)

Figura 4.23 - Comparação entre os resultados experimentais e as metodologias analíticas com aplicação das combinações de carregamento



Fonte: Autor (2026)

Verifica-se na Figura 4.23 que a aplicação das combinações de carregamento mais desfavoráveis modificou significativamente o comportamento das curvas obtidas pelas normas, especialmente para a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) e para a EN 1991-4 (2006), que passaram a apresentar diferenças mais expressivas em relação aos resultados experimentais de Cheung (2007). Entre as duas, a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) foi a que apresentou a mudança de comportamento mais significativa. Enquanto a EN 1991-4 (2006) apenas intensificou seu caráter já conservador, a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) inverteu sua tendência, passando de um comportamento conservador para uma subestimação das pressões nas maiores profundidades, tornando-se mais desfavorável do ponto de vista da segurança estrutural, em razão do coeficiente de atrito superior adotado nessa combinação. No entanto, as curvas ainda apresentaram crescimento não linear da pressão horizontal com o aumento da profundidade,

com tendência à assíntota vertical nas maiores profundidades. A curva da ANSI/ASAE EP433.1 (2024) exhibe esse mesmo comportamento, porém com a assíntota vertical ainda mais pronunciada.

Observa-se que, no último ponto de instalação da célula de carga (profundidade de 5,23 m), as pressões horizontais previstas pelas metodologias analíticas foram superiores às medidas experimentalmente por Cheung (2007), com exceção da ANSI/ASAE EP433.1 (2024). A EN 1991-4 (2006) continuou sendo a mais conservadora, superestimando a pressão horizontal nesse ponto em 74,5%, seguida da norma AS 3774 (1996), com superestimação de 53,3% e pela teoria de Janssen com 9,6%. Em contrapartida, a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) subestimou a pressão horizontal em 13,8%, o que pode resultar em estimativas não conservadoras para o dimensionamento estrutural.

A Tabela 4.12 apresenta a comparação entre as pressões horizontais medidas experimentalmente por Cheung (2007) e as estimadas pelas metodologias analíticas, considerando as respectivas profundidades de medição.

Tabela 4.12 - Pressões experimentais e analíticas (com combinações de carregamentos)

Profundidade	Experimental	Janssen	AS 3774	ANSI/ASAE EP 433.1	EN 1991-4
z(m)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)	$p_h(z)$ (kPa)
0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0,26	1,12	0,48	0,70	0,82	1,05
0,76	1,98	1,32	1,91	1,97	2,74
1,26	2,36	2,03	2,94	2,72	4,06
1,75	3,07	2,65	3,81	3,21	5,10
2,25	3,89	3,18	4,56	3,53	5,93
2,75	3,48	3,66	5,21	3,74	6,59
3,25	4,20	4,06	5,77	3,88	7,11
3,74	4,33	4,41	6,23	3,97	7,51
4,24	4,28	4,71	6,64	4,03	7,83
4,74	4,98	4,98	6,98	4,07	8,08
5,23	4,75	5,20	7,28	4,10	8,28

Fonte: Autor (2026)

A análise dos dados da Tabela 4.12 evidencia uma inversão de comportamento em relação à condição sem aplicação das combinações de carregamento mais desfavoráveis. Nesse cenário, a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) passou a apresentar o menor erro relativo médio (10,69%), seguida pela teoria de Janssen (1895) (15,12%), pela AS 3774 (1996) (35,13%) e

pela EN 1991-4 (2006) (62,44%), em comparação aos resultados de Cheung (2007), conforme detalhado na Tabela 4.13.

Dessa forma, a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) mostrou-se a metodologia com melhor correlação com os resultados experimentais. Em contrapartida, a EN 1991-4 (2006), apresentou comportamento excessivamente conservador, com potencial para um superdimensionamento da estrutura.

Tabela 4.13 - Erros relativos das metodologias analíticas em relação aos resultados experimentais (com aplicação das combinações de carregamento previstas pelas normas).

Profundidade (m)	Janssen (%)	AS 3774 (%)	ANSI/ASAE EP 433.1 (%)	EN 1991-4 (%)
0,26	57,14	37,50	26,79	6,25
0,76	33,33	3,54	0,51	38,38
1,26	13,98	24,58	15,25	72,03
1,75	13,68	24,10	4,56	66,12
2,25	18,25	17,22	9,25	52,44
2,75	5,17	49,71	7,47	89,37
3,25	3,33	37,38	7,62	69,29
3,74	1,85	43,88	8,31	73,44
4,24	10,05	55,14	5,84	82,94
4,74	0,00	40,16	18,27	62,25
5,23	9,47	53,26	13,68	74,32
Média	15,12	35,13	10,69	62,44

Fonte: Autor (2026)

A norma brasileira ABNT NBR 17066 (2022) recomenda a utilização da ANSI/ASAE EP433.1 (2024) para o cálculo das pressões em silos metálicos. No presente estudo, essa metodologia apresentou o menor erro relativo médio em relação aos resultados experimentais quando adotado o coeficiente de atrito tabelado pela própria norma.

Contudo, nas maiores profundidades do silo, onde se concentram as maiores pressões horizontais e as solicitações mais críticas para o dimensionamento estrutural, observou-se a subestimação dos valores experimentais.

Ainda assim, considerando que a ANSI/ASAE EP433.1 (2024) adota valores tabelados para o coeficiente de atrito e para o parâmetro K, os resultados indicam que tais parâmetros devem ser empregados com cautela para diferentes produtos armazenados. Além disso, recomenda-se considerar coeficientes de sobrepressão, de modo a possibilitar estimativas mais

seguras das pressões horizontais.

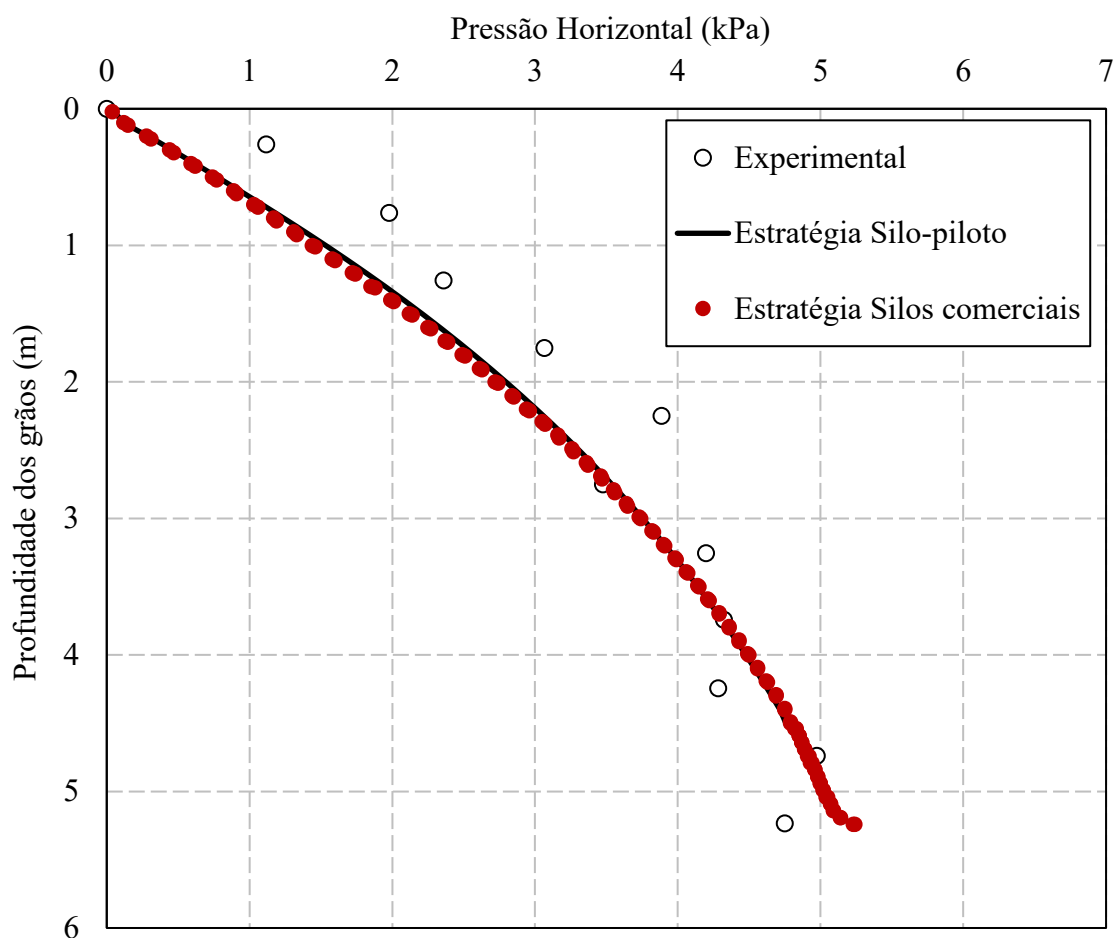
4.4 SILOS COMERCIAIS

Nesta seção, realiza-se a análise paramétrica das pressões horizontais em silos de dimensões comerciais, classificados como silos baixos. Essa etapa é relevante, uma vez que a maior parte dos silos empregados na armazenagem de grãos pertence a essa categoria. Com o objetivo de aplicar o modelo numérico a geometrias usualmente adotadas na prática (com relação H/D inferior a 2), foram selecionados silos do catálogo da CASP (2023). Entretanto, as dimensões dos silos comerciais tornam o modelo numérico significativamente mais complexo. Enquanto o silo-piloto possui volume de $2,15 \text{ m}^3$, o menor silo comercial considerado na análise paramétrica apresenta volume de 1882 m^3 , aproximadamente 875 vezes maior, o que resulta em elevado custo computacional e, em alguns casos, em resultados inconclusivos. Dessa forma, tornou-se necessário adotar estratégias de modelagem que reduzissem a demanda computacional sem comprometer a precisão dos resultados.

As estratégias adotadas para redução do custo computacional foram: modelagem de apenas um quarto do silo; adoção do modelo constitutivo de Mohr-Coulomb; utilização do elemento C3D8; e definição adequada das condições de contorno. Na base do silo, os deslocamentos foram restringidos nas três direções (x, y e z), enquanto para o produto granular foram aplicadas condições de simetria do tipo XSYMM e ZSYMM. Essas modificações foram propostas com base no desenvolvimento dos modelos e nos problemas observados durante o processamento numérico.

Como não há dados experimentais disponíveis para os silos comerciais selecionados, realizou-se a validação da nova estratégia de modelagem com base nos dados experimentais de Cheung (2007), obtidos no silo-piloto. Para isso, as estratégias de modelagem foram aplicadas em um modelo numérico com a geometria do silo-piloto, e a comparação entre as diferentes estratégias está ilustrada na Figura 4.24.

Figura 4.24 - Comparação das estratégias de modelagem entre o silo-piloto e os silos comerciais



Fonte: Autor (2026)

Como as duas curvas apresentaram comportamento praticamente coincidente, a estratégia adotada mostra-se válida para aplicação nos silos comerciais.

4.4.1 Análise Paramétrica

A análise paramétrica desta seção foi conduzida a partir de variações nos parâmetros geométricos dos silos comerciais (altura e diâmetro), conforme descrito na metodologia, cujas dimensões estão apresentadas na Tabela 4.14.

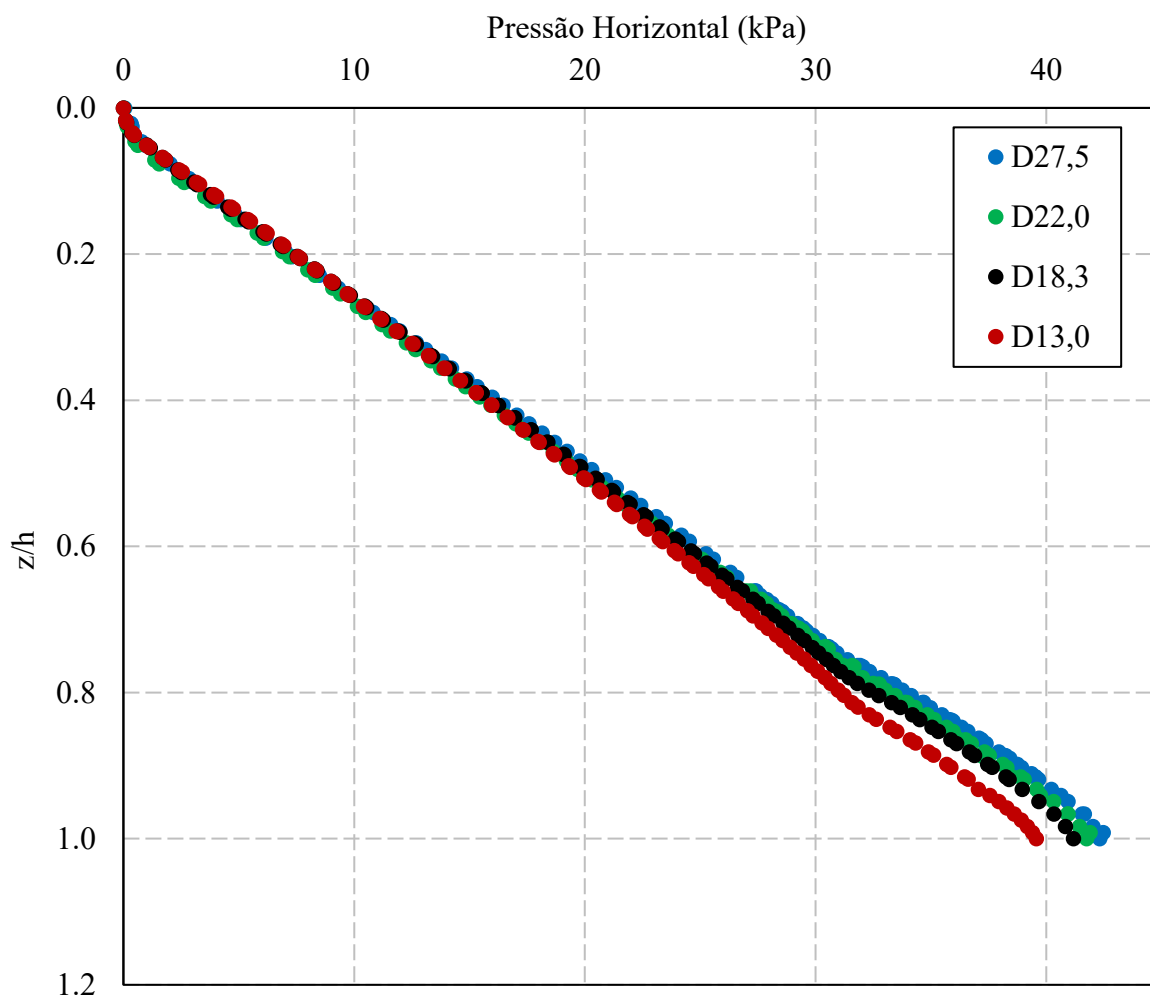
Tabela 4.14 - Dimensões geométricas dos silos comerciais avaliados na análise paramétrica

Identificação	Altura total (m)	Diâmetro (m)	Volume (m³)	Relação H/D
D13,0	24,00	13,00	1986	1,85
D18,3		18,30	5512	1,31
D22,0		22,00	7361	1,09
D27,5		27,50	11234	0,87
H12,13	12,13	16,50	1882	0,74
H15,80	15,80		2667	0,96
H18,56	18,56		3256	1,12
H24,98	24,98		4630	1,51

Fonte: Adaptado do catálogo da CASP (2023)

A Figura 4.25 apresenta a distribuição das pressões horizontais ao longo da altura relativa (z/h) para os silos comerciais com altura constante de 24 m e diâmetro variável.

Figura 4.25 - Influência do diâmetro na distribuição das pressões horizontais em silos comerciais



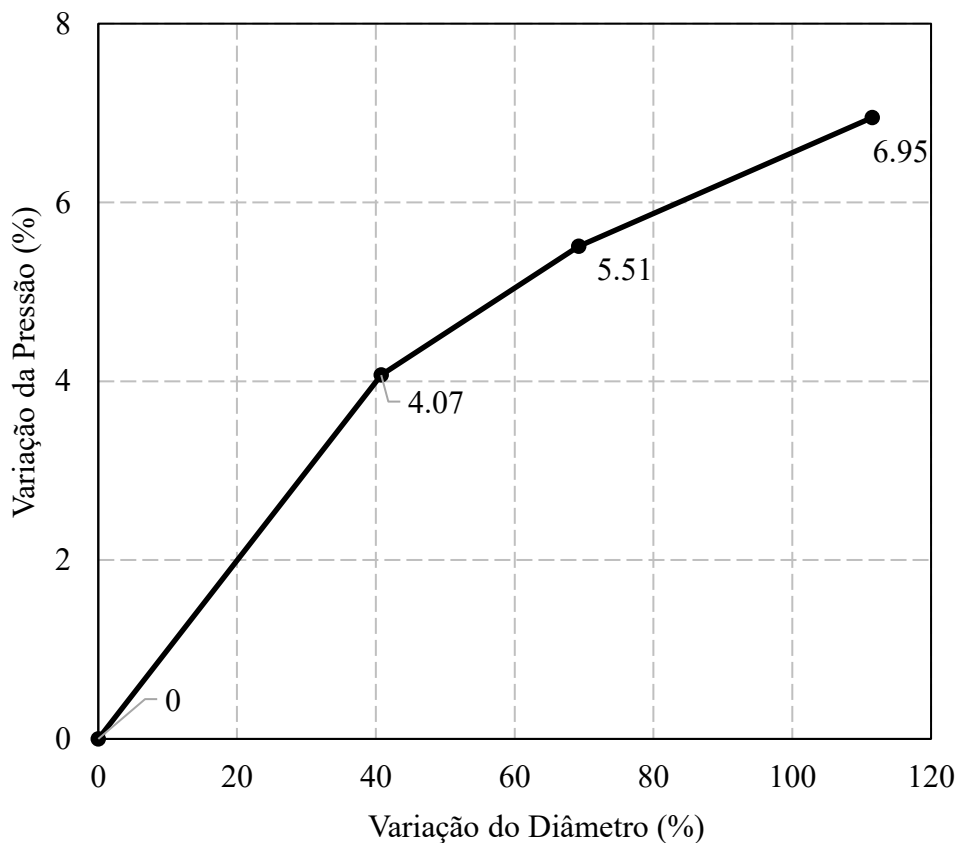
Fonte: Autor (2026)

Na Figura 4.25 referente aos silos com altura constante e diâmetro variável, verifica-se que o aumento do diâmetro resulta em uma variação pouco significativa da magnitude das pressões horizontais ao longo de toda a altura, especialmente no topo até a região central do silo, em contraste com o observado para os silos esbeltos. O modelo com maior diâmetro (D27,5) apresenta os maiores valores de pressão, seguido pelos modelos D22,0, D18,3 e D13,0, tendência compatível com os resultados apresentados por Hilal e Sanad (2025), que também observaram aumento das pressões horizontais com o incremento da seção transversal.

A influência do diâmetro no aumento das pressões foi avaliada por meio da variação percentual da pressão na base em relação ao silo de menor diâmetro (D13,0), conforme a Figura 4.26. Observa-se que o aumento do diâmetro em 40,77%, 69,23% e 111,54% resultou em incrementos de 4,07%, 5,51% e 6,95% na pressão máxima, respectivamente. Esses resultados

indicam uma relação não linear entre o diâmetro e as pressões horizontais, com tendência de redução na taxa de crescimento da pressão à medida que o diâmetro aumenta.

Figura 4.26 - Variação percentual das pressões em função do aumento do diâmetro em relação ao silo D13,0

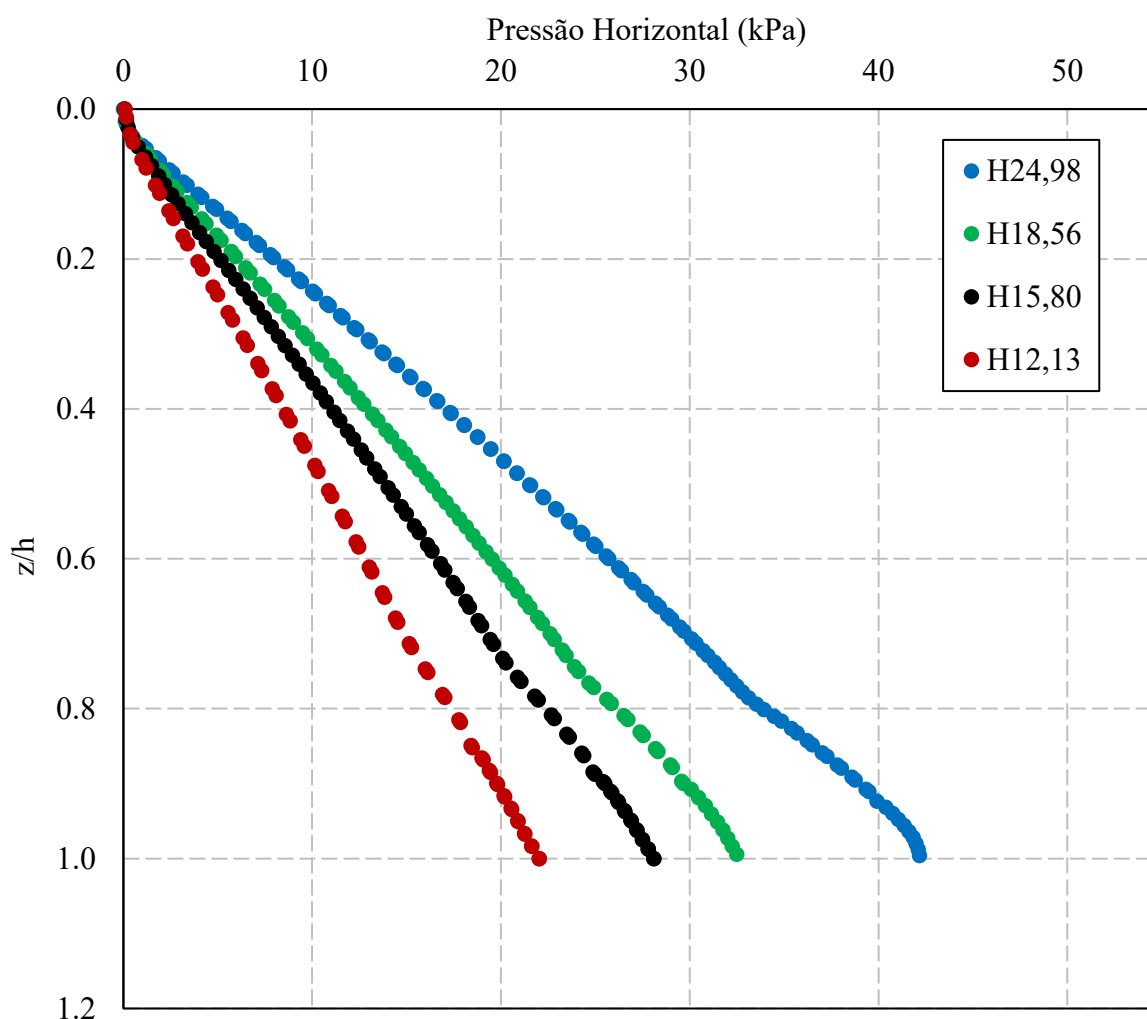


Fonte: Autor (2026)

Essa tendência é reforçada pela comparação entre modelos consecutivos, na qual o aumento de 20,22% no diâmetro (de D18,3 para D22,0) resultou em acréscimo de apenas 1,38% na pressão, enquanto o aumento de 25,00% (de D22,0 para D27,5) gerou acréscimo de 1,37%. Ambos os valores são consideravelmente inferiores ao acréscimo de 4,07% observado no primeiro intervalo (de D13,0 para D18,3), correspondente a um aumento de 40,77% no diâmetro. Esse comportamento evidencia a redução da sensibilidade das pressões horizontais ao aumento do diâmetro à medida que o porte do silo se eleva.

A Figura 4.27 apresenta a distribuição das pressões horizontais ao longo da altura relativa (z/h) para os silos comerciais com diâmetro constante de 24 m e altura variável.

Figura 4.27 - Influência da altura na distribuição das pressões horizontais em silos comerciais



Fonte: Autor (2026)

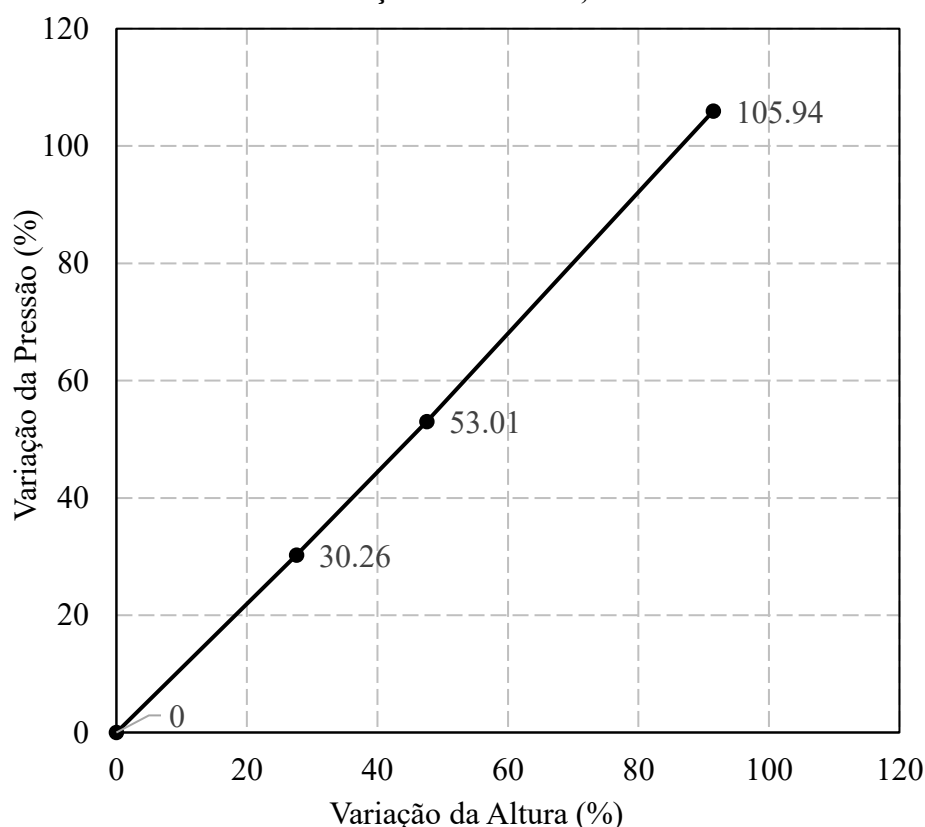
Na Figura 4.27, observa-se que o aumento da altura do silo resulta na elevação significativa da magnitude das pressões horizontais, em contraste com o efeito menos expressivo observado para o aumento do diâmetro. O modelo de maior altura (H24,98) apresenta os maiores valores de pressão, seguido pelos modelos H18,56, H15,80 e H12,13. Esse comportamento está diretamente associado ao aumento da coluna de produto armazenado, que implica maior peso próprio atuante. Como consequência, ocorre incremento das tensões verticais com a profundidade, refletindo-se no aumento das pressões horizontais transmitidas à parede do silo, conforme previsto por Janssen (1895).

Adicionalmente, observa-se que as curvas mantêm o comportamento semelhante ao longo da altura, indicando que a variação da altura influencia predominantemente a magnitude

das pressões, sem alterar de forma significativa o comportamento das curvas. Nota-se ainda que as maiores diferenças entre os modelos ocorrem nas regiões mais profundas, próximas à base ($z/h \approx 1$), onde as pressões atingem seus valores máximos.

A influência da altura no aumento das pressões foi avaliada a partir da variação percentual da pressão na base (pressão máxima) em relação ao silo de menor altura (H12,13), conforme a Figura 4.28. Observa-se que o aumento da altura em 30,26%, 53,01% e 105,94% resultaram em acréscimos de pressão de 27,59%, 47,54% e 91,45%, respectivamente. Esses resultados indicam uma relação aproximadamente proporcional entre a altura e as pressões atuantes.

Figura 4.28 - Variação porcentual das pressões em função do aumento da altura em relação ao silo H12,13



Fonte: Autor (2026)

Essa tendência é reforçada pela comparação entre modelos consecutivos: o incremento de altura de 30,26% (de H12,13 para H15,80) resultou em acréscimo de pressão de 27,59%, o incremento de 17,47% (de H15,80 para H18,56) resultou em acréscimo de 15,63% e o incremento de 34,59% (de H18,56 para H24,98) resultou em acréscimo de 29,77%. Em todos

os casos, os acréscimos de pressão permaneceram próximos dos respectivos acréscimos de altura, evidenciando uma relação aproximadamente proporcional entre essas grandezas. Esse comportamento está relacionado ao aumento da coluna de produto e, conseqüentemente, das tensões verticais, que são parcialmente transferidas para as paredes por meio do atrito na interação produto-parede, caracterizando o efeito de arqueamento.

Diferentemente do observado para o diâmetro, não se verifica, neste caso, uma redução expressiva na taxa de crescimento das pressões à medida que os incrementos de altura aumentam. Isso indica que, na faixa de alturas analisada, o efeito de arqueamento não foi suficiente para reduzir de forma significativa a taxa de crescimento das pressões, resultando em uma relação aproximadamente proporcional entre a variação da altura e a variação da pressão na base. Os resultados evidenciam que tanto a altura quanto o diâmetro influenciam as pressões horizontais, sendo a altura o parâmetro que apresenta maior impacto na magnitude das pressões nos silos analisados.

5 CONCLUSÕES

O presente trabalho teve como objetivo avaliar a magnitude e a distribuição das pressões horizontais atuantes nas paredes de silos metálicos cilíndricos de fundo plano, submetidos, na condição estática, ao carregamento proveniente do armazenamento de grãos, por meio de modelagem computacional no *software* Abaqus, versão 6.14. Os resultados obtidos demonstram que os objetivos geral e específicos propostos foram plenamente alcançados.

O modelo numérico desenvolvido reproduziu satisfatoriamente o comportamento observado experimentalmente e possibilitou avaliar, de forma sistemática, a influência conjunta da geometria do silo e das propriedades mecânicas do produto armazenado, contribuindo para a compreensão dos mecanismos responsáveis pela distribuição das pressões horizontais e fornecendo subsídios técnicos para o aperfeiçoamento do dimensionamento estrutural de silos metálicos.

O estudo de sensibilidade mostrou que o módulo de elasticidade (E) e o ângulo de dilatação (ψ) exercem pouca influência sobre os resultados, enquanto o coeficiente de Poisson (ν) foi o parâmetro de maior impacto. Na etapa de calibração, verificou-se ainda que a adoção do efetivo ângulo de atrito interno (ϕ_e), em vez do ângulo de atrito interno (ϕ_i), proporcionou melhor concordância com os resultados experimentais.

A análise paramétrica indicou que a altura e o diâmetro do silo influenciam a magnitude e a distribuição das pressões horizontais, sendo a altura o parâmetro de maior impacto. Nos silos de tamanhos comerciais (silos baixos), o aumento da altura resultou em acréscimos aproximadamente proporcionais nas pressões, enquanto o aumento do diâmetro exerceu influência menos significativa. Em contrapartida, nos silos esbeltos, o diâmetro alterou tanto a magnitude quanto o perfil de distribuição das pressões, evidenciando que a relação H/D constitui um parâmetro determinante para o comportamento estrutural.

Quanto à influência do produto armazenado, verificou-se que o peso específico, isoladamente, não é suficiente para explicar a magnitude das pressões horizontais. Os resultados demonstraram, ainda, que diferentes produtos armazenados podem apresentar comportamentos significativamente distintos, reforçando a importância da adequada caracterização de suas propriedades, uma vez que a adoção de parâmetros inadequados pode conduzir ao subdimensionamento ou ao superdimensionamento da estrutura.

A excelente concordância entre os resultados numéricos e a teoria de Janssen reforça a consistência física do modelo desenvolvido, evidenciando sua capacidade de reproduzir o

comportamento esperado das pressões horizontais ao longo da altura do silo. Esse resultado é particularmente relevante por se tratar da formulação que fundamenta boa parte das normativas internacionais de dimensionamento de silos, o que reforça a consistência do modelo numérico como referência para a comparação com essas normativas.

Na comparação entre os modelos analíticos e os resultados experimentais, considerando exclusivamente as equações de cada metodologia, verificou-se comportamento conservador, sobretudo na metade inferior do silo, comportamento ainda mais pronunciado após a aplicação das combinações de carregamento, especialmente para as normas australiana e europeia, sendo esta última a mais conservadora.

Destaca-se, entretanto, que a norma americana ANSI/ASAE EP433.1 (2024), cuja aplicação é recomendada pela própria ABNT NBR 17066 (2022), apresentou a melhor correlação com os resultados experimentais, embora subestime as pressões na região inferior do silo, situação potencialmente desfavorável ao dimensionamento estrutural.

De maneira geral, esta pesquisa reforça o papel do Método dos Elementos Finitos como ferramenta complementar robusta ao dimensionamento de silos metálicos, ampliando a compreensão dos mecanismos de transferência de carga entre o produto e a estrutura.

5.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Após o desenvolvimento deste trabalho, verificou-se a possibilidade da realização de trabalhos futuros na abordagem dos seguintes itens:

- Incorporar a etapa de descarregamento na modelagem numérica, de modo a avaliar as pressões horizontais também sob condições de fluxo;
- Estender a modelagem numérica a silos com tremonha, avaliando a influência da geometria da tremonha na magnitude e na distribuição das pressões horizontais;
- Comparar os resultados numéricos e experimentais com as previsões fornecidas por formulações analíticas da literatura não abordadas no presente trabalho, incluindo a EN 1991-4 (2026), avaliando a influência dos fatores modificadores de carga por ela introduzidos e sua aplicabilidade na estimativa das pressões em silos;
- Determinar experimentalmente propriedades do produto armazenado relevantes para a modelagem numérica, como o coeficiente de Poisson, o ângulo de

dilatância e o módulo de elasticidade, de modo a reduzir a dependência de valores de calibração e de referências da literatura para parâmetros que se mostraram determinantes nos resultados.

REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **ABNT NBR 17066**: Silos Metálicos de Chapas Corrugadas. elaboração. Rio de Janeiro, 2022.

AMERICAN SOCIETY OF AGRICULTURAL ENGINEERS (ASAE). **ANSI/ASAE EP433.1 JAN 2019 (R2024)**: Loads exerted by free-flowing grain on bins. St. Joseph, Michigan, 2024.

AUSTRALIAN STANDARD. **AS 3774**: Loads on bulks containers. Sydney, 1996.

BANÁS, K.; KRÚŽEL, F.; BIELAŃSKI, J. Finite element numerical integration for first order approximations on multi- and many-core architectures. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering** v.305, p.827–848, Abr. 2016.

BROWN, J. **Numerical analysis of silo discharge**. Dissertação Mestrado em mecânica estrutural. Lund University. Lund, Suécia, 2008.

CALIL JUNIOR. **Recomendações de Fluxo e de Cargas para o Projeto de Silos Verticais**. Tese de Livre Docência em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 1990.

CASP. **Soluções em Armazenagem de Grãos**. Amparo, São Paulo, 2023. 11 p. Disponível em: <https://casp.com.br/wp-content/uploads/2023/08/Catalogo-Completo-2023-reduzido.pdf>. Acesso em: 29 ago. 2025.

CHEUNG, A. B. **Modelo estocástico de pressões de produtos armazenados para a estimativa da confiabilidade estrutural de silos esbeltos**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2007.

COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO (CONAB). **Acompanhamento da safra brasileira de grãos**. Brasília, v. 13 – Safra 2025/26, n. 9 – Nono levantamento, 137 p., jun. 2026.

COSTA, Carlos A. da; LOPES NETO, José P.; NASCIMENTO, José W. B. do; DINIZ, Marineide J.; SILVA, Valneide R. da. Propriedades mecânicas e de fluxo de produtos agroindustriais. **Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental**, Campina Grande, v. 18, n. 7, p. 774–780, 2014. DOI: 10.1590/S1415-43662014000700016.

DORNELAS, K. C. Análises numérica e experimental das pressões em silos verticais de **fundo plano com diferentes relações altura/diâmetro (h/d)**. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Campina Grande. Campina Grande, 2022.

DORNELAS, K. C.; RODRIGUES, H. C. S.; CHEUNG, A. B.; CALIL JUNIOR, C.; NASCIMENTO, J. W. B. Pressures in squat steel silo with flat bottom storing maize grain. **Journal of Stored Products Research**, [S.I], v. 109, p. 1-12, jul./set, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jspr.2024.102424>.

EN 1991-4: EUROCODE 1. **Actions on structures - Part 4: Silos and tanks**. European Committee for Normalisation. Bruxelas, 2006.

FANK, M. Z. **Pressões em silos verticais: instrumentação de um protótipo e análise**

numérica pelo método dos elementos finitos. Campina Grande: Universidade Federal de Campina Grande, 2017. Tese de doutorado.

FREITAS, E. G. **Estudo teórico e experimental das pressões em silos cilíndricos de baixa relação altura/diâmetro e fundo plano.** Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2001.

GANDIA, R. M. **Evaluation of pressures in slender cylindrical silos: experimental and numerical study.** Tese de Doutorado. Doutorado em Engenharia Agrícola, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2022.

GANDIA, R. M.; GOMES, F. C.; PAULA, W. C.; AGUADO RODRIGUEZ, P. J. Evaluation of pressures in slender silos varying hopper angle and silo slenderness. **Powder Technology**, Amsterdam, v. 394, p. 478–495, 2021.

GOMES, F. C. **Estudo teórico e experimental das ações em silos horizontais.** Tese de doutorado em engenharia civil, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2000.

GOODEY, R. J.; BROWN, C. J.; ROTTER, J. M. Rectangular steel silos: finite element predictions of filling wall pressures. **Engineering Structures**, Amsterdam, v. 132, n. 1, p. 61–69, 2017. DOI: 10.1016/j.engstruct.2016.11.023.

HILAL, A.; SANAD, A. M.; ABDELBARR, M. H.; RAMADAN, O. M. O.; ABDALLA, H. A.; Three-Dimensional Finite Element Analysis for Pressure on Flexible Wall Silos. **Applied Sciences**, Basel, Suíça, v. 12, n. 18, p. 1-19, aug./set, 2022. DOI: <https://doi.org/10.3390/app12189251>.

HILAL, A.; SANAD, A. M. Finite element analysis of lateral pressure variations in square steel silos considering parametric impacts. **Scientific Reports**, London, v. 15, n. 34291, p. 1–18 2025. DOI: 10.1038/s41598-025-20867-0.

JANSSEN, H. A. Versuche uber Getriededruck in Silozellen. Z. **Verein Deutcher Ingenieure** v. 39, p. 1045-1049, 1895.

JENIKE, A. W. **Gravity flow of bulk solids.** Salt Lake City: University of Utah, 1961. (Bulletin. Utah Engineering Experiment Station, nº108).

JENIKE, A. W. **Storage and flow of solids.** Salt Lake City: University of Utah, 1964. (Bulletin. Utah Engineering Experiment Station, nº123).

LAHLOUH, E.H.; BROWN, C.J.; ROTTER, J.M. Loads on Rectangular Planform Steel Silos; **Research Report**, Edinburgh, UK. 1995.

MADRONA, F.S. **Pressões em silos esbeltos com descarga excêntrica.** Dissertação Mestrado em engenharia civil, Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2008.

Manual do Usuário ABAQUS/CAE 6.14. **Abaqus 6.14: user documentation.** Providence: Dassault Systèmes Simulia Corp., 2017. Software.

MARTINS, G. C. A. **Estudo teórico e experimental de esforços devidos a cabos de termometria fixados em estruturas de coberturas de silos cilíndricos para armazenamento de grãos.** Dissertação Mestrado em engenharia de estruturas, Escola de Engenharia de São Carlos. Universidade de São Paulo. São Carlos, 2012.

MATA, F. R. **Estudo teórico e experimental dos esforços estruturais induzidos por cabos de termometria em coberturas de silos metálicos para armazenamento de ração avícola.** Dissertação Mestrado em engenharia de estruturas e geotecnia. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2026.

MEIRA, A. S.; SILVA, V. R.; ARAÚJO, K. D.; LEITE, P. G.; DIAS, R. T.; MARQUES, J. I. Propriedades mecânicas de produtos granulares para simulação de pressão e fluxo em silos verticais. In: CONGRESSO TÉCNICO CIENTÍFICO DA ENGENHARIA E DA AGRONOMIA – CONTECC'2018, 75^a, 2018, Maceió. **Anais[...]**. Maceió: SOEA, 2018.

MOYA, M.; SÁNCHEZ, D.; VILLAR-GARCÍA, J. R. Values for the mechanical properties of wheat, maize and wood pellets for use in silo load calculations involving numerical methods. **Agronomy**, Basel, Suíça, v. 12, n. 6, p. 1-18, abr./mai, 2022. DOI: [10.3390/agronomy12061261](https://doi.org/10.3390/agronomy12061261).

NASCIMENTO, F. C. **A relação entre as pressões horizontais e verticais em silos elevados: o parâmetro k.** Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2008.

NATEGHI, F.; YAKHCHALIAN, M. Seismic behavior of reinforced concrete silos considering granular material-structure interaction. **Procedia Engineering**, v.14, p.3050–3058, Jul. 2011.

OOI, J. Y.; CHEN, J. F.; LOHNES, R. A.; ROTTER, J. M. Prediction of static wall pressures in coal silos. **Construction and Building Materials**, v. 10, n. 2, p. 109-116, 1996. DOI: 10.1016/0950-0618(95)00090-9. Disponível em: [https://doi.org/10.1016/0950-0618\(95\)00090-9](https://doi.org/10.1016/0950-0618(95)00090-9).

PALMA, G. **Pressões e fluxos em silos esbeltos ($h/d \geq 1,5$).** Dissertação Mestrado em Engenharia de Estruturas. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2005.

PAULA, W. C. **Influência da geometria de tremonhas concêntricas e excêntricas nos esforços de silos esbeltos metálicos.** Tese de doutorado em Engenharia Agrícola. Universidade Federal de Lavras. Lavras, 2020.

PISARCIUC, C.; DAN, I.; CIOARĂ, R. The Influence of Mesh Density on the Results Obtained by Finite Element Analysis of Complex Bodies. **Materials**, Basel, v. 16, n. 7, p. 1-16, Jul. 2023.

REIMBERT, M.; REIMBERT, A. (1979). **Silos: Teoría e Práctica.** Editorial Américalee S.R.L. Buenos Aires. 464 p.

RODRIGUES, M. H. B. S.; SOUSA, V. F. O.; SANTOS, G. L.; NOBREGA, E. P.; ANDRADE, F. E. Armazenamento de grãos em pequenas propriedades de São Francisco, Paraíba, Brasil. **Colloquium Agrariae**, Presidente Prudente, v.14, n.2, p.35-47, abr./jun. 2018.

ROTTER, J. M.; HOLST, J. M. F. G.; OOI, J. Y.; SANAD, A. M. Silo pressure predictions using discrete-element and finite-element analyses. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, Londres, v. 356, n. 1747, p. 2685–2712, 1998. DOI: 10.1098/rsta.1998.0293. Disponível em: <https://doi.org/10.1098/rsta.1998.0293>

SILVA NETO, W.A.; SANTOS, T.L. O déficit na capacidade estática de armazenamento nas regiões centro-oeste e sul do Brasil. **Revista de Economia e Agronegócio**, Goiânia, v. 17, n.3, p. 507-530, nov, 2019.

TEIXEIRA, L. G. D. R. **Determinação das propriedades físicas e de fluxo do café para projeto estrutural de silos e equipamentos**. Dissertação de mestrado em engenharia agrícola. Universidade Federal de Lavras. Lavras, 2006.

UFPR. **Reservatórios cilíndricos e silos metálicos usando o Abaqus 6.12 Student Edition**. Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2017. Disponível em: <https://estruturas.ufpr.br/wp-content/uploads/MEF/AulasAbaqus/Aula17.pdf>. Acesso em: 27 nov. 2024.

WALKER, D. M. An Approximate Theory for Pressures and Arching in Hoppers. **Chemical Engineering Science**, v. 21, p. 975-997, 1966. DOI: [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(66\)85095-9](https://doi.org/10.1016/0009-2509(66)85095-9)

WALTERS, J. K. A theoretical analysis of stresses in silos with vertical walls. **Chemical Engineering Science**, v. 28, p. 13 – 21, 1973. DOI: [https://doi.org/10.1016/0009-2509\(73\)85081-X](https://doi.org/10.1016/0009-2509(73)85081-X)

WANG, Y.; LU, Y.; OOI, J. Y. A numerical study of wall pressure and granular flow in a flat-bottomed silo. **Powder Technology**, v. 278, p. 1–10, 2015. <https://doi.org/10.1016/j.powtec.2015.01.078>.

YANG, Y.; OOI, J.; ROTTER, M.; WANG, Y. Numerical analysis of silo behavior using non-coaxial models. **Chemical Engineering Science**, v. 44, n. 1, out. 2011.

ZHANG, Y.; JIA, F.; ZENG Y.; HAN, Y.; XIAO, Y. DEM study in the critical height of flow mechanism transition in a conical silo. **Powder Technology**, Harbin, v.331, p.98-106, Mar. 2018.

ZHAO, C.; FENG, Y.; WANG, W.; NIU, Z. Mechanical properties and numerical analysis of underground continuous wall in underground grain silo foundation pit. **Buildings**, Basel, v. 13, n. 2, p. 1-20. DOI: 10.3390/buildings13020293.