

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
CIVIL**

GUILHERME NAOTO ENDO

**PROPOSIÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS PROBABILÍSTICOS DE
MATERIAIS: ESTUDO NA TRAÇÃO E COMPRESSÃO DO UHPC**

**MARINGÁ
2024**

GUILHERME NAOTO ENDO

**PROPOSIÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS PROBABILÍSTICOS DE
MATERIAIS: ESTUDO NA TRAÇÃO E COMPRESSÃO DO UHPC**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Romel Dias Vanderlei

MARINGÁ
2024

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

E56p

Endo, Guilherme Naoto

Proposição de modelos constitutivos probabilísticos de materiais : Estudos na tração e compressão do UHPC / Guilherme Naoto Endo. -- Maringá, PR, 2024.
95 f. : il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Romel Dias Vanderlei.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2024.

1. Modelo constitutivo - Distribuição Modificada de Weibull. 2. Tração. 3. Compressão . 4. UHPC - Ultra High Performance Concrete. 5. Degradação probabilística - . I. Vanderlei, Romel Dias, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. III. Título.

CDD 23.ed. 624.1834

GUILHERME NAOTO ENDO

**PROPOSIÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS PROBABILÍSTICO DE MATERIAIS:
ESTUDO NA TRAÇÃO E COMPRESSÃO DO UHPC**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 08/03/2024, julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

BANCA EXAMINADORA

Documento assinado digitalmente
 **ROMEL DIAS VANDERLEI**
Data: 08/03/2024 18:18:23-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Romel Dias Vanderlei
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá
Professor Orientador

Documento assinado digitalmente
 **DIOGO FRANCISCO ROSSONI**
Data: 25/03/2024 15:39:58-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Diogo Francisco Rossoni
Programa de Pós-Graduação em Bioestatística
Universidade Estadual de Maringá

Documento assinado digitalmente
 **PABLO AUGUSTO KRAHL**
Data: 18/03/2024 19:12-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Pablo Augusto Krah
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Estadual de Maringá

Documento assinado digitalmente
 **GUSTAVO SAVARIS**
Data: 09/03/2024 21:14:28-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. Gustavo Savaris
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Este trabalho é dedicado aos meus pais, Mauro e Adriana, pelos motivos que não caberiam apenas nas páginas dessa dissertação.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

Ao meu professor orientador, Romel Dias Vanderlei, pelos sábios conselhos, conversas enriquecedoras, vasta experiência e inabalável paciência. Agradeço por ter me auxiliado a construir passo a passo este trabalho.

Aos meus pais, Mauro e Adriana, pela fé incansável, pela educação exemplar, pelo tempo dedicado e pelo amor constante que permearam minha vida.

À minha namorada e companheira, Diana, pela cumplicidade, cuidado, carinho, amizade e apoio incondicional nos momentos mais desafiadores.

Ao meu irmão Leonardo, à minha irmã Stephane, ao meu tio Marlon, ao meu primo Gabriel e à minha cunhada Julia, expresso minha gratidão por todo apoio e companheirismo.

Ao Professor Dr. Diogo Francisco Rossoni, agradeço pela atenção e valioso auxílio na realização deste trabalho, assim como pelas inspiradoras conversas sobre livros e matemática.

Ao Professor Dr. Pablo Augusto Krahll, manifesto meu reconhecimento pela orientação, pelas instrutivas aulas e por disponibilizar materiais que contribuíram significativamente para a elaboração deste trabalho.

Estendo meus agradecimentos a todos os funcionários e professores da pós-graduação em Engenharia Civil (PCV), em especial à Joseane, pela dedicação e auxílio sempre presentes, e ao senhor Luís, que gentilmente se dispôs a abrir e fechar portas mesmo quando precisei trabalhar além do horário.

Aos meus amigos do curso de pós-graduação do PCV, Aloisio, Daniel, Gustavo Leonardo, Lucas e Vinicius, e a todos que contribuíram de alguma forma, meu sincero agradecimento.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

“Apenas admitindo uma unidade infinitesimal para observação, o diferencial da história, ou seja, as tendências homogêneas das pessoas, e alcançando a arte de integrar (...), podemos esperar apreender as leis da história.”

(Lev Nikolaevitch Tolstoi)

RESUMO

ENDO, G.N. (2024). *Proposição de modelos constitutivos probabilístico de Materiais: Estudo na tração e compressão do UHPC*. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2024.

Os modelos constitutivos analíticos, cruciais na engenharia e ciência dos materiais, possibilitam a análise, diagnóstico, dimensionamento de estruturas e contribuem para o desenvolvimento, otimização e fabricação de novos produtos. Contudo, encontrar equacionamentos para o comportamento não linear, que sejam simultaneamente simples e versáteis para prever materiais de diversas classes, é desafiador devido à natureza heterogênea dos mecanismos e variáveis que influenciam o comportamento de cada elemento. O compósito cimentício denominado de concreto de ultra alto desempenho, da sigla em inglês “UHPC”, é um exemplo de variabilidade comportamental expressiva, caracterizada por fatores aleatórios e combinações de efeitos de difícil quantificação, carecendo, portanto, de modelos constitutivos analíticos específicos. Nesse contexto, este trabalho propõe duas alternativas de modelos constitutivos generalizados para tração e compressão do UHPC, fundamentados em teorias de estatística e probabilidade. Desenvolvendo o conceito de área efetiva probabilística, inspirado nos estudos de Wallodi Weibull e em teorias estatísticas, são apresentados o desenvolvimento lógico-matemático, simplificações teóricas e considerações utilizadas na concepção. Dois modelos, são derivados dessas considerações, uma utilizando da DEW (distribuição exponenciada de Weibull) e a outra da DMW (Distribuição Modificada de Weibull). Ambos os modelos são testados e validados com dados experimentais de três autores diferentes para os esforços de compressão e tração direta para UHPC com 1% e 2% de fibras metálicas. A regressão computacional é realizada através do desenvolvimento de um algoritmo da linguagem R, e a validação e parametrização dos modelos são executadas por meio do comando de regressão não linear "nlsLM", método dos mínimos quadrados com otimização do algoritmo Leverberg–Marquardt. Ambos os modelos convergem e apresentam resultados satisfatórios com pequenos erros residuais. Os modelos são então analisados e comparados entre si. Sendo então propostos parâmetros e as respectivas equações para cada um dos dois modelos, representando as curvas tensão por deformação para compressão simples e tração direta nos comportamentos específicos do UHPC-1% e UHPC-2%. A tecnologia e estudo desenvolvida nessa pesquisa é uma excelente ferramenta para análise de materiais e uma opção de caminho para um modelo constitutivo genérico.

Palavras chaves: Modelo constitutivo, tração; compressão; UHPC; Weibull; degradação probabilística.

ABSTRACT

ENDO, G.N. (2024). Proposition of Probabilistic Constitutive Models for Materials: Study on Tensile and Compressive Behavior of UHPC. Dissertation (Master's) – State University of Maringá, Maringá, 2024.

Analytical constitutive models, crucial in engineering and materials science, enable the analysis, diagnosis, and sizing of structures, contributing to the development, optimization, and manufacturing of new products. However, finding equations for nonlinear behavior that are both simple and versatile for predicting materials of different classes is challenging due to the heterogeneous nature of mechanisms and variables influencing each element. The cementitious composite known as Ultra High-Performance Concrete (UHPC) is an example of expressive behavioral variability, characterized by random factors and combinations of effects that are difficult to quantify, thus lacking specific analytical constitutive models. In this context, this work proposes two alternatives of generalized constitutive models for tension and compression of UHPC, based on theories of statistics and probability. Developing the concept of probabilistic effective area, inspired by Wallodi Weibull's studies and statistical theories, the logical-mathematical development, theoretical simplifications, and considerations used in the design are presented. Two models are derived from these considerations, one using the DEW (Exponential Weibull Distribution) and the other using the DMW (Modified Weibull Distribution). Both models are tested and validated with experimental data from three different authors for compression and direct tension efforts for UHPC with 1% and 2% metallic fibers. Computational regression is performed through the development of an algorithm in the R language, and model validation and parameterization are executed using the non-linear regression command "nlsLM," the least squares method with Leverberg–Marquardt algorithm optimization. Both models converge and present satisfactory results with small residual errors. The models are then analyzed and compared with each other. Finally, parameters and respective equations are proposed for each of the two models, representing stress-strain curves for simple compression and direct tension in the specific behaviors of UHPC-1% and UHPC-2%. The technology and study developed in this research can be an excellent tool for material analysis and an option for the path to a generic constitutive model.

Keywords: Constitutive model; tension, compression, UHPC; Weibull; Probabilistic degradation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Fluxograma da estrutura seguida na metodologia	21
Figura 2 - Corpo de prova tipo <i>Dogbone</i> e Cilíndrico.....	23
Figura 3 – Representação do UHPC como resultado da tecnologia do CA do CAA e CAD. .	25
Figura 4 - (a) e (b) representação do comportamento <i>strain softening</i> , (c) e (d) comportamento <i>strain hardening</i>	27
Figura 5 - Transferência de tensões entre fibra e matriz	28
Figura 6 - UHPC: Pontes de transferência de tensão rompidas.....	28
Figura 7 - Representação do modelo analítico e suas variáveis.	30
Figura 8 -Modelo idealizado para contribuição da matriz e fibra (tensão por deformação)	32
Figura 9 - Experimento mental de Weibull.	36
Figura 10 - Esquema de falha a tração da corrente de elos	38
Figura 11 – Função de Densidade de Probabilidade e Função de Distribuição Acumulada de Weibull para diferentes parâmetros	40
Figura 12 – Função de Densidade de Probabilidade e Função de Distribuição Acumulada Exponenciada de Weibull para diferentes parâmetros de “m” “g”.	42
Figura 13 - Função de Densidade de Probabilidade e Função de Distribuição Acumulada Modificada de Weibull para diferentes parâmetros ζ	43
Figura 14 – Ilustração de área inicial e infinitesimal dA	45
Figura 15- Elos de uma corrente na deformação e espaço amostral para variação da deformação	46
Figura 16 – Gráficos ilustrativos da densidade probabilística, deformação e Área	47
Figura 17 - Fluxograma do equacionamento resumido da degradação probabilística	48
Figura 18 - Exemplificação da degradação da área aplicando probabilidade.	49
Figura 19 – Efeito da variação dos parâmetros e alteração das curvas.	51
Figura 20 – Fluxograma do programa criado para regressão não linear.	54
Figura 21 -Comparação da ordem de grandeza dos parâmetros de tração e compressão Modelo I (dados COMPILADOS).....	56
Figura 22 - Comparação da ordem de grandeza dos parâmetros de tração e compressão Modelo II (dados COMPILADOS)	57
Figura 23 -Regressão do Modelo I por autor (Compressão UHPC-1%).....	57
Figura 24 - Regressão do Modelo I por autor (Compressão UHPC-2%).....	58
Figura 25 - Regressão do Modelo I por autor (Tração UHPC-1%).....	59

Figura 26 - Regressão do Modelo I por autor (Tração UHPC-2%).....	61
Figura 27 - Regressão do Modelo II por autor (Compressão UHPC-1%).....	62
Figura 28 - Regressão do Modelo II por autor (Compressão UHPC-2%).....	62
Figura 29 - Regressão do Modelo II por autor (Tração UHPC-1%)	63
Figura 30 - Regressão do Modelo II por autor (Tração UHPC-2%)	64
Figura 31 - Comparativo dos dados experimentais e os modelos propostos para compressão.	66
Figura 32 - Comparativo dos dados experimentais e os modelos propostos para tração	66
Figura 33 - Esquema do cálculo das áreas dos ensaios coletados	67

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Dados coletados por autor e resistência média informada	22
Tabela 2- Características dos corpos de provas.....	23
Tabela 3 – Relação entre valores de parâmetro e comportamento da função.	41
Tabela 4 – Redefinição da simbologia das distribuições acumulada de EW e MW.	50
Tabela 5 – Modelos constitutivos probabilísticos I e II.....	50
Tabela 6 – Matriz dos grupos de ensaios para análise computacional	52
Tabela 7 - Valores estabelecidos para e_0 , σ_0 e E por análise de imagem <i>raster</i> (ensaio) a tração	53
Tabela 8 – Parâmetros e erros residuais obtidos (modelo, autor, material e tipo de ensaio)....	55
Tabela 9 - Erros residuais relativos em porcentagem ($E_r/\sigma_{m\acute{a}x}$)	56
Tabela 10 – Parâmetros para os modelos de acordo com o tipo e porcentagem de adição de fibras no UHPC	67
Tabela 11 – Valores da densidade de energia de deformação.	68
Tabela 12 - Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-1% (MODELO I).....	69
Tabela 13 -Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-2% (MODELO I)	69
Tabela 14 - Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-1% (MODELO II).....	70
Tabela 15 - Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-2% (MODELO II).....	70
Tabela 16 - Valores de tensão última “ $\sigma_{m\acute{a}x}$ ”, tensão pós-fissuração “ σ_{pc} ”, módulo de elasticidade “E” para compressão e tração	71

LISTA DE SÍMBOLOS

ALFABETO LATINO

A_m	Área da matriz
A	Área transversal
A_0	Área inicial perpendicular a força
dA	Diferencial de área
d_f	Diâmetro da fibra
dF	Diferencial de força relacionada a cada parcela de dA
E	Módulo de Elasticidade
E_c	Módulo de elasticidade do compósito
E_f	Módulo de elasticidade da fibra
E_{it}	Módulo de elasticidade tangencial inicial
E_m	Módulo de Elasticidade da Matriz
F	Força
F_f	Força e arrancamento de uma fibra
g	Parâmetro exponencial (formulação de Mudholkar e Kumar)
I_p	Ponto de inflexão da curva no ramo descendente
k	Coefficiente determinado a partir da inclinação inicial da curva de deslizamento de aderência
l_e	Comprimento da fibra submersa na matriz
l_f	Comprimento da fibra
m	Parâmetro de forma (formulação de Weibull)
p_n	Função de densidade de probabilidade
P_n	Função de distribuição acumulada
r	Parâmetro da taxa de aceleração (Modelo II)
r_i	Índice de reforço obtido empiricamente
V_f	Volume de fibra
ν_f	Coefficientes de Poisson da fibra
V_m	Volume da matriz
ν_m	Coefficientes de Poisson da matriz
w	Abertura da fissura
w_0	Início da fase de deslizamento por atrito
w_{cr}	Abertura de fissura crítica
w_{deb}	Abertura de fissura que marca o início da fase de arrancamento das fibras
W_t	Energia total consumida
x_0	Parâmetro de locação (formulação de Weibull)
x_p	Denominado como Parâmetro de escala ou característico (formulação de Weibull)

ALFABETO GREGO

α_0	Fator da orientação das fibras usadas na formulação (Abrishambaf et al)
α_1	Fator da eficiência da fibra de acordo com a orientação (formulação Abrishambaf et al)
α_3	Valor empírico que na formulação Abrishambaf et al é igual a 4
α_4	Fator da inclinação inicial do deslizamento de uma única fibra (formulação de Zhou e Qiao)
α_5	Fator da forma do ramo exponencialmente descendente da curva de aderência-deslizamento (formulação de Zhou e Qiao)
α_6	Coefficiente de atrito na interface entre a fibra e a matriz (formulação de Zhou e Qiao)
α_7	Fator do efeito combinado das fibras dispersas na matriz (formulação de Zhou e Qiao)
α_8	Fator que estabelece o reforço causado pela fibra (formulação de Zhou e Qiao)
β	parâmetro de silhueta da curva tensão por deformação característica do material (Formulação de Carreira e Chu)
β_2	Parâmetro de silhueta da curva tensão por deformação característica do material pós pico (Formulação de Ezeldi e Balaguru)
γ_2	Coefficiente determinado a partir da inclinação inicial do comportamento de deslizamento por atrito
ε	Deformação
ε_0	Deformação limite da fase elástica
ε_{01}	Deformação específica limite da fase elástica (Modelo I)
ε_{02}	Deformação específica limite da fase elástica (Modelo II)
ε_f	Deformação última
ε_f	Deformação última ou final da análise computacional
ε_{lim}	Deformação limite superior
$\varepsilon_{máx}$	Deformação cujo a tensão é máxima
ε_p	Deformação de pós fissuração
ε_{p1}	Fator de escala (Modelo I)
ε_{p2}	Fator de escala (Modelo II)
η_1	Parâmetro de forma (Modelo I)
η_2	Parâmetro de forma (Modelo II)
κ	Parâmetro exponencial (Modelo I)
ς	Parâmetro de taxa de aceleração (formulação de Lai et al.)
σ_{cc}	Tensão de fissuração
σ_{eng}	Tensão de engenharia
σ_f	Parcela da tensão suportada pelas fibras
σ_{fpc}	Tensão de tração na fibra
σ_m	Parcela da tensão suportada pelas matrizes

$\sigma_{m\acute{a}x}$	- Máxima tensão
$\sigma_{m\acute{e}d}$	- Tensão máxima média (formulação de Weibull)
σ_{pc}	- Tensão de pós fissuração ou tensão de pós pico
σ_u	- Tensão residual
τ_f	- Tensão de aderência na interface fibra-matriz
$\tau_{m\acute{a}x}$	- Tensão máxima de adesão

PREFIXOS

m	Mili (10^{-3})
K	Kilo (10^3)
M	Mega (10^6)
G	Giga (10^9)

UNIDADES

m	Metro
N	Newton
Pa	Pascal
J	Joule

SUMÁRIO

CAPÍTULO I - Introdução	17
1.1 INTRODUÇÃO	17
1.2 JUSTIFICATIVA	18
1.3 OBJETIVOS	19
1.4 LIMITAÇÕES DA PESQUISA	20
CAPÍTULO II -Metodologia	21
2.1 Revisão bibliográfica (Metodologia)	22
2.2 Desenvolvimento teórico matemático. (Metodologia)	22
2.3 Análise de dados (Metodologia)	22
2.4 Coleta, seleção e tratamento de dados	22
2.3.1 Regressão não linear e estimativa de parâmetros.....	23
2.3.2 Discussão dos resultados	23
CAPÍTULO III-Revisão Bibliográfica	24
3.1 Introdução ao material	24
3.2 Modelos constitutivos à tração.....	29
3.3 Modelos constitutivos à compressão	34
3.4 Distribuição Clássica de Weibull.....	35
3.5 Distribuição Exponenciada de Weibull	40
3.6 Distribuição Modificada de Weibull.....	42
CAPÍTULO IV – Desenvolvimento teórico-matemático	44
4.1 Concepção e desenvolvimento teórico matemática	44
CAPÍTULO V – Análise e discussões	52
5.1. Coleta de dados.....	52
5.2. Regressão dos parâmetros.....	53
5.3. MODELO I – Compressão UHPC-1%	57
5.4. MODELO I – Compressão UHPC-2%	58
5.5. MODELO I – Tração UHPC-1%.....	59
5.6. MODELO I – Tração UHPC-2%.....	60
5.7. MODELO II– Compressão UHPC-1%.....	61
5.8. MODELO II – Compressão UHPC-2%.....	62
5.9. MODELO II – Tração UHPC-1%	63
5.10. MODELO II – Tração UHPC-2%.....	64

5.11.	Comparação e análise entre os Modelos I e II	65
5.12.	Proposição de parâmetros para o Modelos I e II.....	66
CONCLUSÕES.....		73
SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS		74
REFERÊNCIAS		75
APÊNDICES		79
APÊNDICE A - Resultados da regressão Compressão 1% de KRAHL (2018)		80
APÊNDICE B - Resultados da regressão Compressão 1% de OLIVEIRA (2019).....		81
APÊNDICE C - Resultados da regressão Compressão 1% RIBEIRO (2022)		82
APÊNDICE D - Resultados da regressão da compressão 1% RIBEIRO (2022),KRAHL (2018), OLIVEIRA (2019).....		83
APÊNDICE E - - Resultados da regressão Compressão 2% de KRAHL (2018).....		84
APÊNDICE F - Resultados da regressão Compressão 2% de OLIVEIRA (2021).....		85
APÊNDICE G - Resultados da regressão Compressão 2% de RIBEIRO (2022)		86
APÊNDICE H - Resultados da regressão Compressão 2% de KRAHL (2018), OLIVEIRA (2021), RIBEIRO (2022).....		87
APÊNDICE I - Resultados da regressão Tração 1% de KRAHL (2018).....		88
APÊNDICE J - Resultados da regressão Tração 1% de OLIVEIRA (2021)		89
APÊNDICE K - Resultados da regressão Tração 1% de RIBEIRO (2022).....		90
APÊNDICE L - Resultados da regressão Tração 1% de KRAHL (2018), OLIVEIRA (2021), RIBEIRO (2022).....		91
APÊNDICE M - Resultado da regressão Tração 2% de KRAHL (2018).		92
APÊNDICE N - Resultado da regressão Tração 2% de OLIVEIRA (2021).....		93
APÊNDICE O - Resultado da regressão Tração 2% de RIBEIRO (2022)		94
APÊNDICE P - Resultados da regressão Tração 2% de KRAHL (2018), OLIVEIRA (2021), RIBEIRO (2022).....		95

CAPÍTULO I - Introdução

1.1 INTRODUÇÃO

Modelos constitutivos são ferramentas de extrema importância no estudo dos materiais. Equacionar funções que descrevam esse comportamento de forma analítica e matemática com boa predição é essencial quando se trata da caracterização dos materiais. A dificuldade em obter-se equações mais genéricas, muitas vezes esbarra na heterogeneidade e variabilidade dos elementos.

Além da diversidade, considerar todos os fenômenos físicos observados, efeitos e correlações para que seja possível um modelo generalista e eficiente é desafiador. Cada material submetido a esforços possui comportamentos característicos, influenciados pela sua natureza química, sua microestrutura, presença de defeitos, condição e histórico de carregamento, temperatura entre outros diversos fatores. Considerar todas as variáveis e peculiaridades de cada material e construir um modelo analítico mais abrangente baseado nas causas pode ser uma tarefa complexa e inviável. Logo o problema muitas vezes não é explicar os diversos comportamentos de um material por um efeito causal observado, mas sim quantificar essa interferência e a combinação desses diversos efeitos.

Alguns materiais ainda possuem alta variabilidade e heterogeneidade dentro de sua própria classe. Um desses materiais com alta variações de comportamentos e combinações de efeitos aleatórios são os compósitos cimentícios com adição de fibras. Dentro desse grupo está situado o concreto de ultra alto desempenho, conhecido por UHPC. Este tipo especial de compósito, pela sua própria natureza, possui características interessantes apresentando comportamentos com alta variabilidade.

O UHPC, segundo definição de ABRISHAMBAF et al. (2019) é o resultado do reforço de grande proporção de fibras curtas de aço uniformemente dispersas em uma matriz cimentícia densa, com grande quantidade de materiais finos e altamente compactados. Sendo um material heterogêneo, bi composto, cujo materiais possui em propriedades não uniformes, o UHPC, é um material com fenômenos de complexa quantificação.

Um dos principais parâmetros mecânicos que se obtém com a adição das fibras é a substancial melhora da ductibilidade e da resistência à tração, possibilitando até mesmo casos em que não há necessidade de armaduras adicionais em peças estruturais de UHPFRC. Porém,

justamente as fibras na maioria dos estudos são dispersas de forma aleatória que causam variações e interferem diretamente na previsibilidade do comportamento do material.

Fatores geométricos e de posição não são os únicos efeitos que compõe o complexo universo do material UHPFRC, pois há inúmeras outras variáveis com maior ou menor grau de interferência, que quando sobrepostas influenciam o comportamento de forma significativa. Muitos pesquisadores estudam a variação dos efeitos da adição das fibras como a proporção (VANDERLEI, 2004), (BISWAS et al., 2021), (SHEHAB EL-DIN et al., 2016), (CHKHEIWER e KADIM, 2019), a orientação (YANG et al., 2023), (SHEN e BRÜHWILER, 2020), (KANG e KIM, 2012), (MAYA DUQUE e GRAYBEAL, 2017), além do formato e dimensões (TAYEH et al., 2022). Determinar os efeitos individuais que essas considerações causam nas propriedades mecânicas são importantes para a compreensão e desenvolvimento tecnológico do material, em contraponto é notável a dificuldade de integrar todos os fenômenos individuais, suas causas, efeitos e interações. Algumas condições alcançadas e estudadas em laboratório podem exigir uma tecnologia específica de produção ou aferição e de difícil reprodutibilidade, o que pode encarecer o uso do UHPC em uma escala maior.

Assim modelos matemáticos que mesclam a teoria da probabilidade e aleatoriedade com a teoria da mecânica dos materiais parece uma solução promissora. Considerar o comportamento de um material regido por uma distribuição estatística pode gerar equações mais abrangentes, com uma gama de aplicações e simplificações.

Este estudo propõe a desenvolver modelos analíticos que não visam a identificação exaustiva e parametrização de cada fator causal individual, como no caso do UHPC, que abrange características como tamanho, direção, orientação das fibras entre outros. Em vez disso, busca estudar primeiramente o efeito conjunto, criando parâmetros que descrevam a tendência “populacional” desses efeitos, tratando cada fator como “indivíduo”, através de uma visão teórica probabilística.

1.2 JUSTIFICATIVA

O desenvolvimento de modelos não lineares simplificados, com fundamentos estatísticos dos comportamentos observados, apresenta uma abordagem de interesse ao não se concentrar necessariamente na quantificação e qualificação dos mecanismos individualmente. Essa metodologia revela-se vantajosa, uma vez que permite realizar análises abrangentes e descrever uma ampla gama de comportamentos distintos utilizando equações comuns, variando apenas as constantes específicas para cada material ou tipo de esforço. Além disso, a

implementação de modelos genéricos é uma ótima ferramenta para comparações entre materiais com propriedades dispares, contribuem para a otimização e monitoramento de processos de fabricação, controle de qualidade, além de fornecer uma facilidade em obtenção de curvas para análises numéricas computacionais.

Já a seleção do material UHPC (Ultra High-Performance Concrete) como objeto de estudo é motivada pela sua marcante variabilidade e complexidade no comportamento mecânico. Este material apresenta fatores intrínsecos com elevada aleatoriedade, sobreposição de efeitos e difícil mensuração. Outro fator é que segundo KRAHL (2018) poucos modelos na literatura predizem o comportamento a tração do UHPC em todas as etapas de forma simplificada. Para RIBEIRO (2022) um fator crítico para o uso generalizado do UHPC em projetos é ainda uma certa carência de modelos analíticos. O material UHPC, comparado a outros materiais convencionais como o concreto armado, aço e a madeira, possui uma relativa carência na literatura de modelos analíticos próprios. Essa lacuna na literatura ressalta a necessidade premente de desenvolver e aplicar modelos que possam elucidar e caracterizar adequadamente o comportamento mecânico do UHPC.

1.3 OBJETIVOS

O objetivo geral propõe desenvolver modelos constitutivos genéricos, flexíveis e simplificados, como ferramenta de análise e representação de diferentes tipos de curva tensão por deformação observados em ensaios de tração e compressão, usando-se das teorias de probabilidade e da mecânica clássica. Para alcançar tal objetivo, foram delineados os seguintes objetivos específicos:

- Desenvolver de maneira matemática uma teoria que harmonize e fundamente a incorporação de distribuições probabilísticas estatísticas com os comportamentos mecânicos de materiais, proporcionando uma base sólida para justificar a implementação nos modelos constitutivos
- Implementar e aprimorar um programa de regressão não linear para otimizar as regressões e obter os parâmetros e constantes para os modelos propostos.
- Investigar a eficácia desses modelos na análise dos comportamentos tensão por deformação para UHPC (Concreto de Ultra Alto Desempenho) com 1% e 2% de adição de fibras, tanto em situações de tração direta quanto em compressão.

- Propor equações de tensão por deformação que representem o comportamento a tração e a compressão do UHPC com adição de 1% do volume em relação ao volume total de fibras metálicas (UHPC-1%) e o UHPC com adição de 2% de fibras metálicas (UHPC-2%).

1.4 LIMITAÇÕES DA PESQUISA

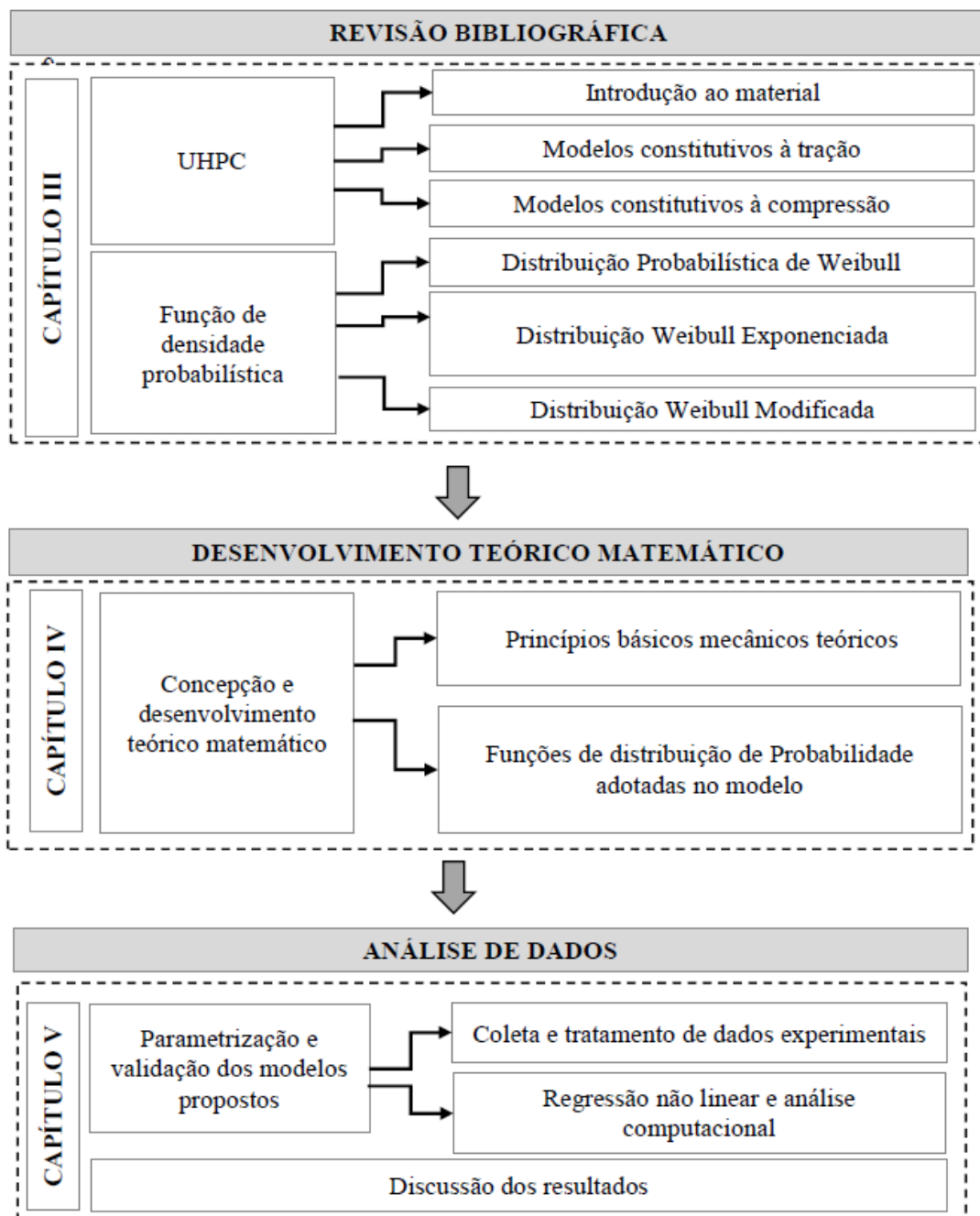
Essa pesquisa terá as seguintes limitações:

- As análises foram realizadas apenas para UHPC com taxas de adição de fibras metálicas na proporção de 1% e 2% do volume total.
- Embora os dados tenham sido coletados por diferentes autores, a composição da matriz, os materiais, tipo e as especificações da fibra, bem como os equipamentos laboratoriais, local e condições do ensaio são semelhantes e apresentam pouca variabilidade na amostragem.
- A coleta de dados foi realizada utilizando o método de análise de imagens por coordenadas *raster*. Este método pode apresentar algumas limitações e pequenas distorções na coleta e processamento dos dados.

CAPÍTULO II -Metodologia

Neste capítulo é apresentada a metodologia adotada no trabalho. O estudo divide-se em partes que são desenvolvidas em capítulos diferentes. O capítulo terceiro foi destinada para Revisão Bibliográfica, o quarto para o desenvolvimento físico-matemático e no quinto capítulo é apresentada a análise de dados, exemplificados no fluxograma Figura 1.

Figura 1 - Fluxograma da estrutura seguida na metodologia



2.1 Revisão bibliográfica (Metodologia)

Desenvolvida no Capítulo III, a Revisão Bibliográfica é um estudo inicial sobre os princípios teóricos que orientam o trabalho. Além de contextualizar os avanços científicos e premissa sobre o tema, tem como principal intuito esclarecer as abordagens e vertentes escolhidas no desenvolvimento da pesquisa.

2.2 Desenvolvimento teórico matemático. (Metodologia)

O Capítulo IV foi exclusivamente destinado para proposição e desenvolvimento do modelo teórico matemático e argumentação teórica. Nessa seção é desenvolvida detalhadamente a linha de processos e equacionamentos para obtenção dos modelos propostos. Buscando um raciocínio lógico e linear, vários conceitos apresentados na Revisão Bibliográfica são, convenientemente, revisitados e expandidos.

2.3 Análise de dados (Metodologia)

Análise de dados é a última parte desse trabalho e está contemplada no Capítulo V. Trata-se basicamente da compilação, separação, organização, tratamento e interpretação dos dados coletado. A análise de dados é composta por três etapas: Coleta, seleção e tratamento de dados, Regressão não-Linear e estimativa dos parâmetros e Discussão dos resultados.

2.4 Coleta, seleção e tratamento de dados

Foram coletados dados de ensaios experimentais realizados por três diferentes autores (KRAHL, 2018, OLIVEIRA, 2019 e RIBEIRO, 2022). Os dados de compressão e tração direta do UHPC-1% e UHPC-2%, foram extraídos das imagens divulgadas nos trabalhos pelo método de capturas de pontos via determinação de coordenadas em imagem *raster*.

A relação dos dados coletados de cada autor com o número de ensaios coletados (n°) e a média da máxima tensão resistida informada para cada ensaio ($\sigma_{m\acute{a}x}$) são mostrados na Tabela 1, já as dimensões e formatos dos corpos de provas utilizados nos ensaios coletados e são especificados na Tabela 2 e na Figura 2.

Tabela 1 - Dados coletados por autor e resistência média informada

	Compressão				Tração			
	UHPC-1%		UHPC-2%		UHPC-1%		UHPC-2%	
	n°	$\sigma_{m\acute{a}x}(\text{MPa})$	n°	$\sigma_{m\acute{a}x}(\text{MPa})$	n°	$\sigma_{m\acute{a}x}(\text{MPa})$	n°	$\sigma_{m\acute{a}x}(\text{MPa})$
Krahl (2018)	6	145,2	6	150,5	5	6,1	5	7,2
Oliveira (2019)	5	135,5	5	145,7	6	7,4	5	8,3
Ribeiro (2022)	1	163,41	1	142,68	2	8,745	2	9,41
Total	12		12		13		12	

FONTE: De autoria própria

Tabela 2- Características dos corpos de provas

Autor	Tipo	Tração direta						Compressão	
		Dimensões (mm)						Dimensões (mm)	
		a	b	c	d	e	f	g	h
Krahl (2018)	<i>Dogbone</i>	85	40	80	60	30	30	Cilíndrico	50
Oliveira (2019)	<i>Dogbone</i>	85	40	80	60	30	30	Cilíndrico	50
Ribeiro (2022)	<i>Dogbone</i>	85	40	80	60	30	30	Cilíndrico	50

FONTE: De autoria própria

Figura 2 - Corpo de prova tipo *Dogbone* e Cilíndrico.

FONTE: De autoria própria

2.3.1 Regressão não linear e estimativa de parâmetros

Inicialmente, grupos de dados foram criados com base nos parâmetros dos trabalhos, como tipo e quantidade de fibras. Ambos os modelos desenvolvidos, detalhados no Capítulo IV, foram parametrizados e analisados individualmente para cada um desses grupos. Para realizar essa análise, desenvolveu-se um programa na linguagem R, utilizando o comando 'nlsLN' do pacote 'minpack.lm()' para regressão não-linear, que emprega o método dos mínimos quadrados e o algoritmo de otimização de Leverberg–Marquardt.

2.3.2 Discussão dos resultados

Com os resultados fornecidos pelo programa discutiu-se e analisou cada resultado obtido, assim como os erros, desvios, correlações e parâmetros encontrados. Também foram plotados gráficos para melhor visualização do comportamento da curva tensão por deformação obtidas pela regressão e dos dados experimentais coletados.

Por fim se propôs parâmetros que representem cada grupo analisado, apresentando assim um paralelo dos resultados dos modelos constitutivos e os comportamentos do UHPC observado na literatura.

CAPÍTULO III-Revisão Bibliográfica

Nesse capítulo buscou-se as diferentes definições encontradas sobre o material UHPC, apontando diversas interpretações sobre o compósito que podem ser encontradas na literatura. Por conseguinte, definiu-se os termos utilizados no trabalho, e as razões para algumas decisões na nomenclatura são devidamente justificadas.

Em seguida, são apresentados alguns modelos teóricos sobre o comportamento do compósito quando submetido a esforços uniaxiais, assim como os mecanismos de transferência de tensões entre a fibra e a matriz cimentícia. Em um subtópico são apresentados modelos analíticos constitutivos propostos por diferentes autores para tração e compressão.

Também é apresentado histórico da teoria da densidade probabilística desenvolvida por Wallodi Weibull, além da formulação e fundamentação teórica do autor em seus trabalhos desenvolvidos no século XX.

Por fim elaborou-se um resumo de dois modelos derivados da Distribuição de Weibull: a Distribuição Exponenciada de Weibull e a Modificada de Weibull. São apresentados as características e peculiaridades de cada distribuição, seus parâmetros e interrelações, além das funções de Densidade Probabilística e Distribuição Acumulada.

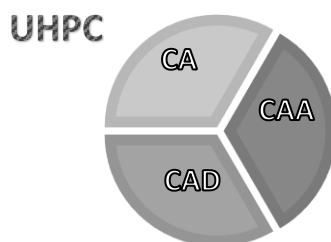
3.1 Introdução ao material

Amplamente difundido desde a década de 90 o termo UHPC é uma sigla oriunda da língua inglesa e significa Concreto de Ultra Alto Desempenho (“*Ultra-high Performance Concrete*”). O termo é utilizado para designar uma família de materiais cimentícios com alto desempenho.

Este material de acordo com AKHNOUKH; BUCKHALTER (2021) é uma compilação de três tipos de concretos: o concreto de alto desempenho (CAD), o autoadensável (CAA), e o concreto armado (CA), esquematizado na Figura 3. Além de melhoras no estado fresco como alta fluidez e trabalhabilidade, o compósito se destaca no estado endurecido, pois possui alta resistência a compressão, significativa resistência à tração, boa ductibilidade e ganhos na durabilidade.

Foram os autores LARRARD e SEDRAN (1994) pioneiros e difusores da nomenclatura UHPC, descreveram, em seu artigo “*Optimization of Ultra-High-Performance Concrete by the use of packing model*”, o processo de alta densificação e empacotamento de partículas aplicado em uma matriz cimentícia. O resultado observado por esses pesquisadores foi a obtenção de um concreto com propriedades com altíssima performance.

Figura 3 – Representação do UHPC como resultado da tecnologia do CA do CAA e CAD.



FONTE: De autoria própria.

Com o crescente interesse nesse material, diversos autores propuseram parâmetros com base na resistência mecânica, no comportamento, no processo de fabricação e na composição para a definir e classificar esse material de forma mais objetiva.

A exemplo a Administração Rodoviária Federal dos Estados Unidos que considera o UHPC um compósito cimentício reforçado com alta proporção de fibras dispersas na matriz, com propriedades vantajosas tanto no estado fresco quanto endurecido, com resistência à compressão acima de 150 MPa, fator água-cimento menor que 0,25 e resistência à tração pós-fissuração superior a 5 MPa (GRAYBEAL, 2014)

De acordo com HUANG et al. (2023) o UHPC como um material compósito rico em cimento, fibras e agregados finos, com relação água/cimento baixa geralmente em torno de 0,25, resistência à compressão acima de 120 MPa, resistência à tração pós-fissuração mínima de 5 MPa e adição de fibras entre 1% e 2% do volume.

A Associação Francesa de Engenharia Civil AFGC (2013) define o UHPC como um material estrutural de matriz cimentícia com resistência mecânica à compressão entre 150 MPa e 250 MPa, apresentando comportamento dúctil devido à alta resistência à tração pós-fissuração, proporção de volume de fibra superior a 2% e resistência da matriz a tração maior que 7 MPa.

Os autores YOO; BANTHIA (2016) consideram o "concreto de pós reativo" como precursor do UHPC e estabelecem alguns parâmetros, como resistência à compressão acima de 150 MPa, alta fluidez, quantidade de fibra não inferior a 2% do volume e relação água-aglomerante geralmente em torno de 0,2.

Na literatura é possível ainda encontrar a nomenclatura UHPFRC (do inglês “*Ultra-high Performance Fiber-Reinforced Concrete*”) para referir-se especificamente ao compósito com adição de fibras (ABRISHAMBAF et al, 2019; YOO; BANTHIA, 2016; BASTIEN-MASSE et al, 2016), KRAHL et al, 2021).

É importante ressaltar que essas definições e terminologias podem variar entre diferentes pesquisadores e instituições. Neste trabalho optou-se por utilizar o termo UHPC de forma mais genérica e abrangente considerando UHPFRC como um subgrupo. Adotou-se também a definição de que o UHPC é um material cimentício composto por materiais reativos e fabricado através do processo de alta densidade de empacotamento e baixo fator água cimento e resistência a compressão não inferior a 120 MPa.

O volume de adição de fibras, geralmente metálicas, proporciona algumas mudanças nas propriedades do material à compressão. Submetido à tração as características são ainda mais impressionantes tendo um significativo aumento da ductibilidade e alteração de sua resistência.

A dificuldade em parametrizar o material vem justamente da sua natureza heterogênea composta por duas fases bem distintas formada por matriz e fibras. Essa heterogeneidade é impactante para as propriedades mecânicas do composto. Comparando individualmente as características entre os dois componentes é evidente a diferença de comportamento mecânico entre elas.

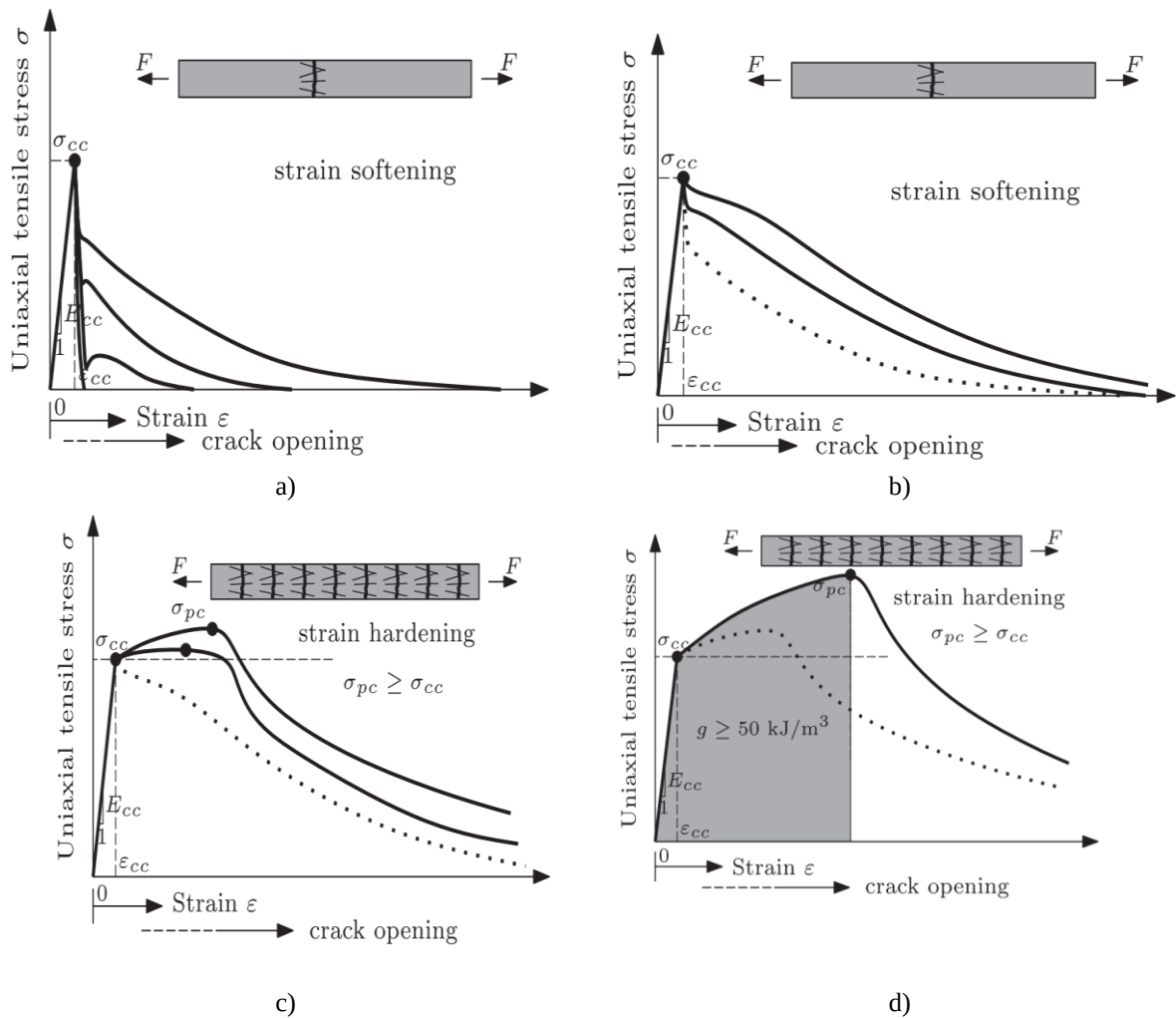
A dispersão aleatória das fibras na matriz pode gerar infinitas combinações. Essas combinações resultam em um comportamento complexo. Estudos apontam que esses resultados variam de acordo com diversos fatores relacionados a adição das fibras como: a proporção (VANDERLEI, 2004), (BISWAS et al., 2021), (SHEHAB EL-DIN et al., 2016), (CHKHEIWER e KADIM, 2019), a orientação (YANG et al., 2023), (SHEN e BRÜHWILER, 2020), (KANG e KIM, 2012), (MAYA DUQUE e GRAYBEAL, 2017), além do formato e dimensões das fibras (TAYEH et al., 2022).

Portanto para compreender melhor as características do UHPC à tração, é importante compreender os diversos mecanismos e comportamento da sua família, os compósitos cimentícios.

Segundo WILLE et al. (2014) o compósito cimentício com fibras submetido à tração pode apresentar dois comportamentos distintos pós o início da fissuração: *strain softening* e *strain hardening*. No primeiro comportamento, há ganho de ductibilidade, controle da fissuração e um escoamento mais suave, porém com pouco ganho nas propriedades mecânicas. Esse comportamento é caracterizado pela dissipação da energia pela formação de uma fissura principal. Essa característica pode ser observada graficamente na Figura 4 (a) e (b), onde a tensão de fissuração (σ_{cc}) é também a máxima tensão obtida durante o ensaio do corpo de prova. Após a fissuração inicial, a energia é dissipada através dessa fissura até que ocorra o rompimento do corpo de prova.

O comportamento *strain hardening* mostra um aumento significativo nas propriedades mecânicas após a formação da primeira fissura, como pode ser observado na Figura 4. Após a ocorrência da tensão de fissuração (σ_{cc}) e o surgimento da primeira fissura, ainda há um ganho de resistência até atingir uma tensão de pós-fissuração (σ_{pc}). Esse aumento de resistência, de acordo com os mesmos autores, ocorre devido à dissipação de energia através do surgimento de novas fissuras e da redistribuição de tensões.

Figura 4 - (a) e (b) representação do comportamento *strain softening*, (c) e (d) comportamento *strain hardening*.



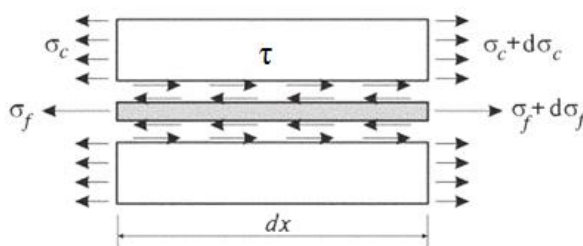
FONTE: "WILLE et al. (2014)

Para ZHOU e QIAO (2019) o comportamento do compósito pode ser explicado como uma sobreposição de efeitos entre os dois materiais nas diferentes fases de deformação e a relação das suas interfaces. Para compreender os efeitos e a parcela correspondente à fibra ou à matriz no UHPC é importante estudar os mecanismos de transferência de esforços matriz/fibra.

Conforme LEE et al. (2011) os esforços de tração na matriz são transferidos para a fibra através da tensão cisalhante causada pelo contato entre os materiais. A tração na fibra é

resultante dessa transferência entre as superfícies em contato, como mostra no esquema da Figura 5. Na fase anterior a abertura da primeira fissura, há uma colaboração conjunta entre os materiais pois não há deslizamento significativo entre eles. Aberta a primeira fissura, a matriz é rompida e parte da energia é dissipada. As fibras localizadas na seção fissurada funcionam como uma ponte de transferência de tensões.

Figura 5 - Transferência de tensões entre fibra e matriz



FONTE: LEE et al. (2011)

Em resumo, no caso da fissuração, se as pontes de transferência de tensões forem suficientes para resistirem aos esforços através da fissura, ocorre o comportamento *strain hardening*. Por outro lado, se no início da fissuração a transferência pelas pontes (Figura 6) for insuficiente para redistribuir os esforços, ocorre o comportamento de *strain softening*.

Figura 6 - UHPC: Pontes de transferência de tensão rompidas.



FONTE: De autoria própria.

No estudo de DENG et al. (2018) através do ensaio de arrancamento, dividiu o comportamento de arrancamento da fibra reta em 3 principais estágios: aderência completa, estágio híbrido de deformação-deslizamento e deslizamento por atrito.

No primeiro estágio, correspondente a fase linear do diagrama tensão por deformação, a aderência na interface dos dois componentes se mantém intacta. Podem aparecer na matriz algumas micro fissuras próximas à superfície da fibra, a parcela de deslizamento entre os materiais é insignificante e a adesão química é predominante em relação às resistências mecânicas de atrito.

No estágio seguinte a adesão da interface começa a se degradar, a parcela da resistência mecânica por atrito começa a aumentar, e há uma colaboração conjunta na transferência das tensões. Com o acréscimo da tensão na interface fibra e matriz, a parcela correspondente a adesão vai diminuindo, chegando a um mínimo quando a força de arrancamento é máxima.

Por fim no terceiro estágio, que ocorre após o pico da tensão, toda resistência restante é devido à parcela correspondente ao atrito na interface, ocorre deslizamento significativo entre os componentes. Logo o comprimento de ancoragem vai ficando cada vez mais curto, até que toda fibra seja arrancada da matriz.

3.2 Modelos constitutivos à tração

Importantes pesquisas foram desenvolvidas na proposição e análise de modelos constitutivos que descrevam os mecanismos do comportamento a tração do UHPC, nesta seção tratou-se de expor alguns estudos e modelos teóricos propostos por diferentes autores.

Os autores WILLE et al. (2014) propuseram em sua análise simplificações para estimativa de parâmetros para UHPC, analisando ensaios de tração com comportamento strain hardening.

Os autores definiram o módulo de elasticidade do compósito (E_c) no regime elástico como uma função linear do volume de Fibras (V_f), do módulo de elasticidade da fibra (E_f) e da matriz (E_m), vide equação (1). Através da análise de dados experimentais, correlações e equacionamento os autores adotaram simplificações que consideram a tensão de fissuração (σ_{cc}) equação (2), a tensão de pós-fissuração (σ_{pc}) (3), a tensão de tração na fibra (σ_{fpc}) equação (4) em função apenas do volume de fibras.

Importante ressaltar que por meio das análises dos ensaios de tração WILLE et al. (2014) constatou uma alta dependência entre os comportamentos a tração e o volume de fibra, já o formato da fibra (lisas, curvas e torcidas) não alteraram de forma expressiva as propriedades de tensão máxima e absorção de energia.

$$E_c = (1 - V_f) \cdot E_m + V_f \cdot E_f \quad (1)$$

$$\sigma_{cc} = -(V_f - 4) + 14 \quad (2)$$

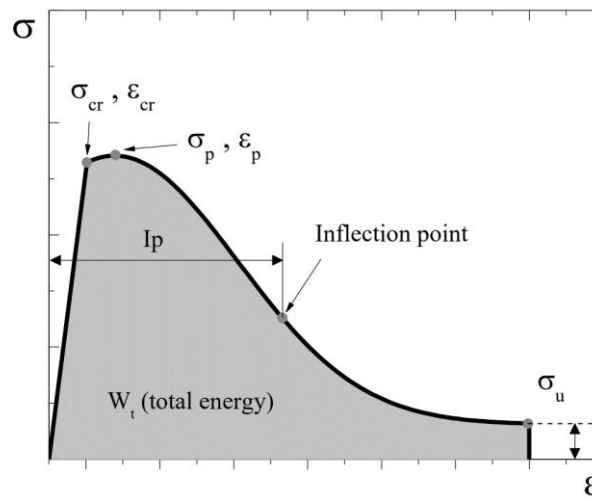
$$\sigma_{pc} = -0,9.V_f^2 + 900.V_f^2 \quad (3)$$

$$\sigma_{fpc} = -100.V_f + 1000 \quad (4)$$

Em uma outra perspectiva KRAHL (2018) adotou um modelo constitutivo à tração para fase de fissuração e pós fissuração baseada na curva probabilística gaussiana, equação (5). O modelo tem como conceito principal a energia total consumida (W_t) calculada através da média das áreas dos diagramas obtidas nos resultados experimentais. A função ($\sigma(\varepsilon)$) depende de parâmetros como: o ponto de inflexão da curva no ramo descendente (I_p), da deformação de pós fissuração (ε_p), da energia total consumida e da tensão residual (σ_u). A equação é exemplificada na Figura 7.

$$\sigma(\varepsilon) = \left(\frac{W_t}{I_p \cdot \sqrt{\pi/2}} \cdot e^{\left(-2 \cdot \frac{\varepsilon - \varepsilon_p}{I_p^2}\right)} \right) + \sigma_u \quad (5)$$

Figura 7 - Representação do modelo analítico e suas variáveis.



FONTE: KRAHL (2018)

Uma proposição de ABRISHAMBAF et al. (2019) foi um modelo simplificado para estimar o comportamento à tração do UHPC tanto para *strain hardening* como *strain softening*. Considerou-se uma análise dependente das propriedades mecânicas da fibra e propriedades da matriz. Realizaram ensaios de arrancamento com diferentes ângulos de orientação e

comprimentos embutidos. Assim estimaram o valor representativo da resistência média da ligação fibra-matriz a ser adotada, bem como para definir a função de sua eficiência, descrevendo os efeitos da orientação da fibra na força de arrancamento. A tensão no compósito (σ) é descrita como função da abertura da fissura (w)

Para regime elástico adotaram o módulo de elasticidade do compósito (E_c) baseado parcialmente no modelo semiempírico de Cox equação (6) dependente do módulo de elasticidade da matriz (E_m) e da fibra (E_f), além de um fator de orientação das fibras (α_0).

$$E_c = E_m \cdot \left[1 + \left(\alpha_0 \cdot \frac{E_f}{E_m} - 1 \right) \cdot V_f \right] \quad (6)$$

O início da fase de arrancamento das fibras (w_{deb}) e a tensão de pós-fissuração foram estabelecidas de acordo com as equações (7) e equação (8), respectivamente. Onde (τ_f) representa a tensão média de aderência na interface fibra-matriz, (d_f) é o diâmetro e (l_f) o comprimento das fibras, (α_1) é o fator de eficiência em relação a orientação da fibra.

$$w_{deb} = \left(\frac{\tau_f \cdot l_f^2}{E_f \cdot d_f} \right) \quad (7)$$

$$\sigma_{cc} = \alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot V_f \cdot \frac{l_f}{d_f} \quad (8)$$

Na fase de fissuração, duas equações são propostas: uma para (w) menor ou igual a (w_{deb}) equação (9), e outra para (w) maior que (w_{deb}) equação (10). O valor da variável (α_3) presente na equação pode variar, no entanto no estudo apresentado os pesquisadores adotaram o valor 4. Para fase de pós-fissuração adotaram um comportamento exponencial vide equação (11).

$$\sigma_c(w) = \sigma_{pc} \cdot \left(2 \cdot \sqrt{\frac{w}{w_{deb}}} - \frac{w}{w_{deb}} \right) \quad w \leq w_{deb} \quad (9)$$

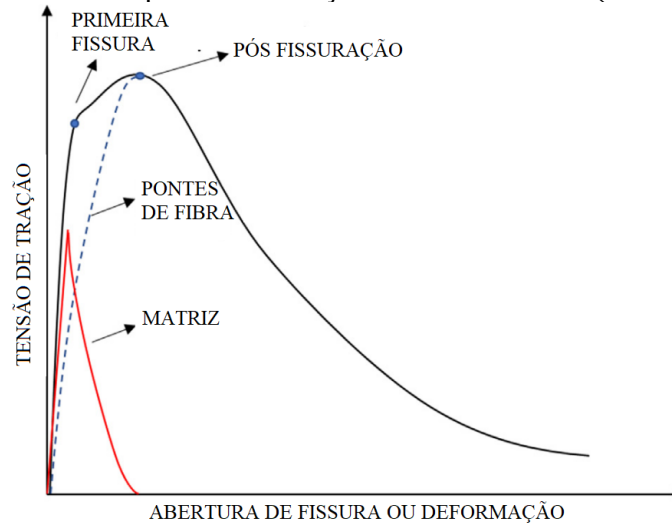
$$\sigma_c(w) = \sigma_{pc} \cdot \left[1 - 2 \cdot \frac{w}{l_f} \right]^{\alpha_3} \quad w > w_{deb} \quad (10)$$

$$\sigma_c(w) = \sigma_{pc} \cdot e^{\left(\frac{l_f^2}{E_f \cdot d_f} \right)} \quad (11)$$

A proposta de ZHOU e QIAO (2019) para um modelo analítico à tração considera principalmente a sobreposição dos efeitos da fibra e da matriz, principalmente a interação entre elas. Assim a tensão pode ser dividida em duas partes: uma correspondente às tensões suportadas pelas fibras (σ_f) e outra correspondente à matriz (σ_m) equação (12), como exemplificado na Figura 8.

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_f(\varepsilon) + \sigma_m(\varepsilon) \quad (12)$$

Figura 8 -Modelo idealizado para contribuição da matriz e fibra (tensão por deformação)



FONTE: ZHOU; QIAO (2019) modificada pelo autor

Para a parcela da tensão associada à matriz, os autores separaram em dois comportamentos distintos. O comportamento inicial consiste na fase anterior a abertura da primeira fissura onde adotaram o regime linear elástico. Já para o comportamento posterior a abertura da primeira fissura selecionaram um comportamento exponencial, como mostrado na equação (13). Onde a Espessura da abertura da fissura no início da fissuração é representado por (w_{cc})

$$\sigma_m(\varepsilon) = \sigma_{cc} \cdot \left(1 - \left(\frac{w}{w_{deb}}\right)^m\right) \quad w \geq w_{deb} \quad (13)$$

Para determinar a parcela correspondente à tensão nas pontes de fibra ZHOU; QIAO (2019) consideraram para o estudo a resistência ao arrancamento simples de uma fibra. Foram estabelecidas as três equações para estimar a força no arrancamento (F_f) de uma fibra em função da abertura da fissura (w). A primeira equação (14) é atribuída para a região de perfeita aderência. Onde a (A_m) é a área da matriz, (α_4) o coeficiente determinado a partir da inclinação

inicial do deslizamento, comprimento da fibra submersa na matriz (l_e), abertura de fissura crítica correspondente (w_{cr}) e (V_m) volume da matriz.

$$F_f(w) = \left(\frac{\alpha_4 \cdot A_m \cdot E_m}{Q - 2} \right) \cdot \frac{(1 + e^{-\alpha_4 \cdot l_e})}{(1 - e^{-\alpha_4 \cdot l_e})} \quad 0 \leq w \leq w_{cr} \quad (14)$$

$$Q = 1 + \frac{V_m \cdot E_m}{V_f \cdot E_f}$$

A fase de deslocamento parcial é descrita pela equação (15), onde (τ_f) é a tensão de atrito na adesão entre as interfaces, ($\tau_{m\acute{a}x}$) é a tensão máxima de adesão, (l_e) é o comprimento da fibra na zona de descolamento, o coeficiente determinado a partir da inclinação inicial da curva de deslizamento de aderência (k), (d_f) é o diâmetro da fibra e (w_0) é o início da fase de deslizamento por atrito.

$$F_f(w) = \pi d_f \tau_f k + \frac{\pi \cdot d_f \cdot \tau_{m\acute{a}x}}{(1 - e^{-\alpha_4 \cdot l_e})} \cdot \frac{1 - e^{-2 \cdot \alpha_4 \cdot (l_e - k)}}{\frac{Q}{2} \cdot e^{-\alpha_4 \cdot (l_e - k)} + \left(1 - \frac{1}{Q}\right) \cdot [1 + e^{-2 \cdot \alpha_4 \cdot (l_e - k)}]} \quad (15)$$

$$w_{cr} \leq w \leq w_0$$

E a terceira equação para o deslizamento por atrito (16). Onde (α_5) o coeficiente que representa a forma do ramo exponencialmente descendente da curva de aderência-deslizamento, (α_6) é o coeficiente de atrito na interface entre a fibra e a matriz, (v_m) e (v_f) são respectivamente os coeficientes de Poisson da matriz e da fibra, (γ_2) é coeficiente determinado a partir da inclinação inicial do comportamento de deslizamento por atrito.

$$F_f(w) = \pi \cdot d_f \cdot \tau_{fd}(w) \cdot x \quad w_{cr} \leq w \leq w_0$$

$$x = \frac{(l_e^2 - w \cdot l_e)}{(l_e - l_0)}$$

$$\tau_{fd}(w) = \tau_f \cdot e^{((\gamma_2(s-s_0))^{\alpha_5})} \cdot \frac{1 - \exp\left(\frac{-4v_f \cdot \alpha_6 - (l_e^2 - w + w_0)}{E_f \cdot d_f \cdot \left(\frac{1+v_m}{E_m} + \frac{1+v_f}{E_f}\right)}\right)}{1 - \exp\left(\frac{-4 \cdot v_f \cdot \alpha_6 \cdot l_e}{E_f \cdot d_f \cdot \left(\frac{1+v_m}{E_m} + \frac{1+v_f}{E_f}\right)}\right)} \quad (16)$$

Por meio de um estudo paramétrico estabeleceram os efeitos da orientação na interação da fibra e fragmentação e coeficientes de deslizamento da matriz. Com a função ($F_f(w)$),

utilizando o efeito combinado das fibras dispersas na matriz estabelecido pelo um parâmetro (α_7), e um coeficiente (α_8) que estabelece o reforço causado pela fibra é possível obter a equação (17) que estabelece o comportamento das pontes das fibras.

$$\sigma_f(w) = \alpha_8 \cdot F_f(w) \cdot \frac{4V_f}{\pi \cdot d_f^2} \cdot \alpha_7 \quad (17)$$

3.3 Modelos constitutivos à compressão

Devido ao fato de o UHPC pertencer à classe de compósitos cimentícios e, consequentemente, possuir propriedades comuns a essa classe, alguns dos modelos mais amplamente utilizados para descrever seu comportamento foram desenvolvidos ou derivam de estudos em argamassas e concretos convencionais.

De acordo com ALSOMIRI et al. (2023) o modelo proposto por CARREIRA e CHU (1985) é um exemplo de modelo analítico amplamente empregado para o comportamento à compressão do concreto, sendo aplicado com frequência ao UHPC.

Utilizando três parâmetros principais, CARREIRA e CHU (1985) propuseram uma equação que envolve a máxima tensão à compressão ($\sigma_{m\acute{a}x}$), a deformação na qual a tensão é máxima ($\varepsilon_{m\acute{a}x}$) e o módulo de elasticidade tangencial inicial (E_{it}). Este último pode ser substituído diretamente na equação por um parâmetro de silhueta da curva tensão por deformação característica do material (β). O valor de β pode ser obtido através da relação dos outros três parâmetros, vide equação (18) e o modelo é apresentado na equação (19) onde (ε_f) é a deformação última.

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{\sigma_{m\acute{a}x}}{\varepsilon_{m\acute{a}x} \cdot E_{it}}} \quad \beta \geq 1.0 \quad \varepsilon \leq \varepsilon_f \quad (18)$$

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma_{m\acute{a}x} \cdot \frac{\beta \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{m\acute{a}x}}\right)}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{m\acute{a}x}}\right)^\beta} \quad (19)$$

Embora versátil, o estudo de CARREIRA e CHU (1985) foi realizado em concretos simples, sem a adição de fibras. Nesse contexto, EZELDIN e BALAGURU (1992) investigaram o impacto das fibras e, em seus experimentos, observaram que a principal diferença no comportamento do compósito com fibras, em comparação com o concreto simples na compressão, estava na região pós-falha. Assim separaram o comportamento da curva em

dois limites utilizando ferramentas estatísticas, identificaram o melhor ajuste para a relação do parâmetro β e propuseram modificações para outro parâmetro (β_2) pós falha, para que adequasse de maneira mais precisa ao comportamento observado pelo efeito das fibras. Assim adota-se a equação de β para limite onde $\varepsilon_{m\acute{a}x} > \varepsilon$ e um novo parâmetro β_2 , vide equação (20) para fibras lisas, para $\varepsilon_{m\acute{a}x} \leq \varepsilon$, onde r_i é o índice de reforço obtido empiricamente. Logo observa-se a equação (21) modificação proposta por EZELDIN e BALAGURU (1992)

$$\beta_2 = 1,093 + 7,4818(r_i)^{-1,387} \quad (20)$$

$$\sigma(\varepsilon) = \begin{cases} \sigma_{m\acute{a}x} \cdot \frac{\beta \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{m\acute{a}x}}\right)}{\beta - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{m\acute{a}x}}\right)^\beta} & \text{para } \varepsilon \leq \varepsilon_{m\acute{a}x} \\ \sigma_{m\acute{a}x} \cdot \frac{\beta_2 \cdot \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{m\acute{a}x}}\right)}{\beta_2 - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_{m\acute{a}x}}\right)^{\beta_2}} & \text{para } \varepsilon > \varepsilon_{m\acute{a}x} \end{cases} \quad (21)$$

3.4 Distribuição Clássica de Weibull

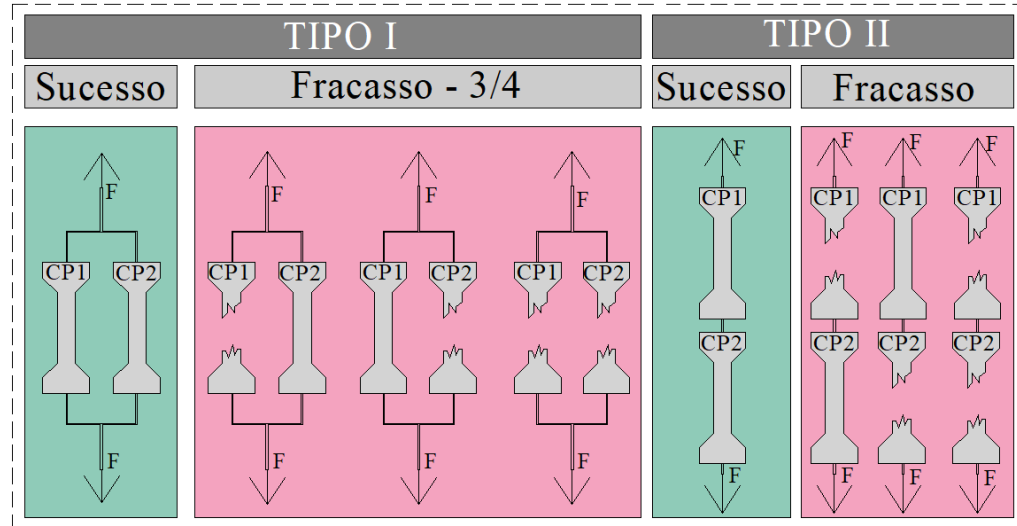
No ano de 1939, foi publicado “*A Statistical Theory of Strength of Material*” escrito pelo engenheiro sueco Wallodi Weibull (WEIBULL, 1939). O artigo introduzia um modelo de distribuição estatística para determinação das tensões de tração, flexão e torção em bastões feitos de ácido esteárico e gesso-de-Paris.

Uma parte do trabalho era destinada a fundamentação teórica baseada na distribuição binominal e na probabilidade clássica. A ideia consistia basicamente de um experimento mental. Tendo-se um grupo de corpo de provas, cujo a tensão de resistência média à tração era dada por $\sigma_{méd}$, esses corpos de provas seriam submetidos a ensaios mecânicos de tração.

A chance de um desses corpos de provas (CP) romper a tração com valores de tensão menores ou maiores que a tensão de resistência média seria de 50% em um ensaio simples. Então dois ensaios com diferentes formações I e II foram propostos. Na formação TIPO I dois CPs estariam dispostos em paralelo a direção da força. Na formação TIPO II dois CPs estariam em série. A montagem dos experimentos é ilustrada na Figura 9. Nos ensaios aplicar-se-ia uma força gradativa a fim de se medir a tensão, dado pela relação força aplicada (F) pela área da seção transversal (A).

Ambas as formações gerariam quatro eventos amostrais igualmente possíveis para $\sigma \leq \sigma_{\text{méd.}}$, representadas na Figura 9 .

Figura 9 - Experimento mental de Weibull.



FONTE: De autoria própria

Na formação TIPO I caso do rompimento de ambos ou de qualquer um dos CPs o sistema provavelmente entraria em colapso, pois a falha individual resultaria na sobrecarga do outro corpo de prova. Portanto dos quatro eventos amostrais três seriam considerados desfavoráveis, ou seja, uma chance de ruptura de $\frac{3}{4}$ ou 75% e não mais de 50%. Na formação TIPO II o rompimento de qualquer um dos corpos de prova posicionados em série causaria a ruína da associação, ou seja, também uma chance de ruptura de $\frac{3}{4}$ ou 75%. Assim nos dois ensaios as probabilidades de ruínas seriam iguais.

Desenvolvendo matematicamente Weibull extrapolou o experimento mental para o comportamento do material na teoria do contínuo, propondo um método para determinação da resistência máxima média de materiais com a geometria e com a teoria de probabilidade.

Essas considerações, apesar de simples, são extremamente interessantes para introduzir uma breve noção da hipótese do elo mais fraco na mecânica dos materiais. Ainda no artigo de 1939 é visto a proposição de sua função de distribuição acumulada (FDA) e o método gráfico para encontrar os seus três parâmetros característicos.

No ano de 1951, WEIBULL e STOCKHOLM (1951) apresentaram para o mundo científico a versatilidade do modelo matemático de distribuição probabilística de Weibull. Foram demonstrados três exemplos distintos, sendo um não relacionado necessariamente à mecânica dos materiais. São eles: a previsão da resistência de escoamento do aço, distribuição de tamanhos de cinzas volantes e resistência de fibras de algodão indiano

Neste artigo é apresentada uma forma didática através da analogia para explicar a distribuição usando o exemplo de uma corrente de elos. Exposto da seguinte maneira:

- Considera-se “n” como número de elos de uma corrente interligados em série um ao outro, deduz-se que a falha na corrente se dará na hipótese de falha de qualquer um dos elos.
- Na realização de um ensaio de resistência a tração unitário de cada elo representado por (x_n), a probabilidade de falha desse elo dada pela letra “P” e a probabilidade de falha da corrente (P_n).
- A probabilidade de não falha é dada por $(1-P_n)$, que pode ser igualada a probabilidade de qualquer um dos elos não falharem.

Por definição temos (22):

$$(1 - P_n) = (1 - P)^n \quad (22)$$

- Considera-se a probabilidade de rompimento de cada elo adotando (23) como uma expressão matemática que descreva o princípio do elo mais fraco, ou como efeito de volumes em falhas de sólidos.

$$P(x) = 1 - e^{-\varphi(x)} \quad (23)$$

- Impondo apenas valores positivos para $\varphi(x)$ e não ser uma função decrescente, o autor define $(\varphi(x))$ como (24).
- Por fim, tem-se a função distribuição acumulada FDA proposta por Weibull substituído (24) em (23) como mostrado em (25).

$$\varphi(x) = \left(\frac{(x - x_0)}{x_p} \right)^m \quad (24)$$

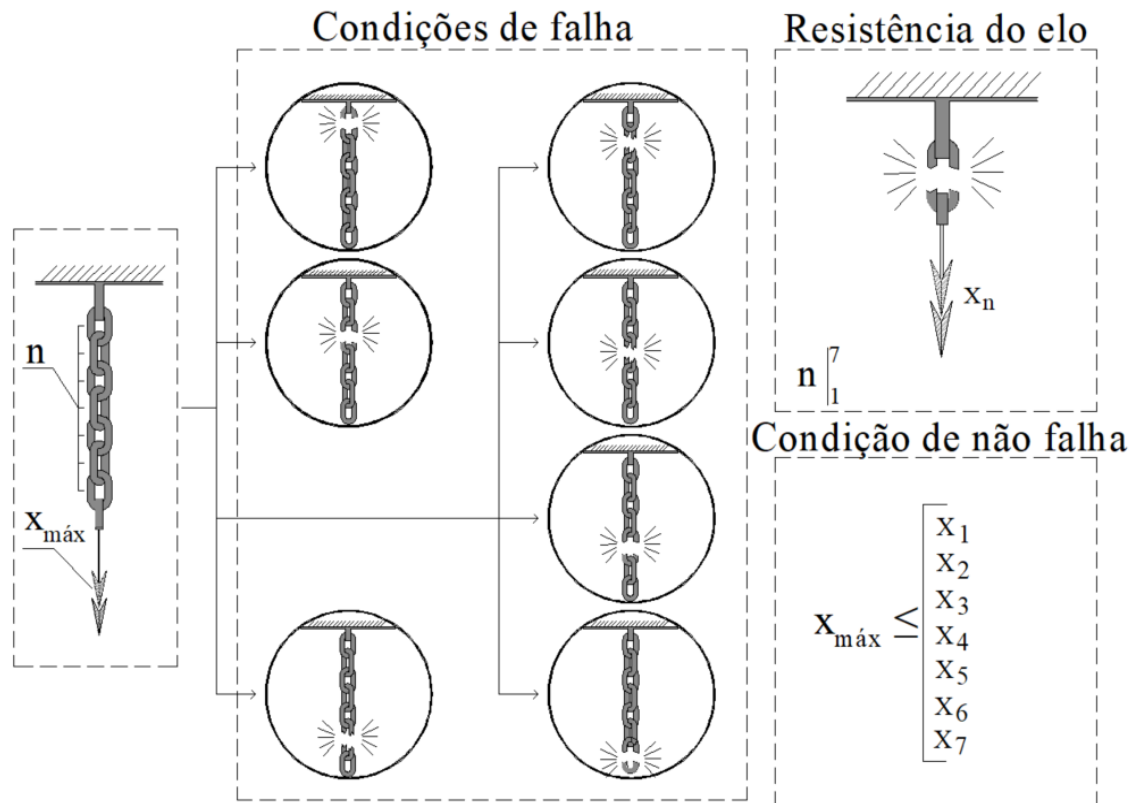
$$P_n(x) = 1 - e^{-\left(\frac{(x - x_0)}{x_p} \right)^m} \quad (25)$$

- Através da derivação obtém-se Função de densidade de Probabilidade (FDP) (26).

$$p_n(x) = \left(\frac{m}{x_p} \right) \cdot \left(\frac{(x - x_0)}{x_p} \right)^{m-1} \cdot e^{-\left(\frac{(x - x_0)}{x_p} \right)^m} \quad (26)$$

Exemplificado a ideia tem-se Figura 10 ilustrativa.

Figura 10 - Esquema de falha a tração da corrente de elos



FONTE: De autoria própria

Segundo ABERNETHY (2006) as vantagens em usar a análise de Weibull está na capacidade de fornecer bons resultados de previsibilidade de falhas possuindo uma amostragem extremamente pequena. Por esse motivo é amplamente utilizado em testes de falhas de componentes ou equipamentos onde se envolvem altos custos nos ensaios laboratoriais. Outra vantagem apontada é a praticidade na plotagem dos gráficos de dados, facilitando a tomada de decisões de engenheiro e gestores no geral.

Os parâmetros representados aqui por (x_0) , (x_p) e (m) tornam a distribuição extremamente adaptável para diferentes tipos de dados. Segundo RINNE (2009) as características de cada parâmetro são:

Parâmetro x_0 :

- Denominado como Parâmetro de locação, mudança, translação início ou limite.
- Na Função de densidade de Probabilidade (FDP), graficamente a alteração do seu valor desloca a densidade para direita ou esquerda no eixo das abscissas.
- $\{x_0 \in \mathbb{R} \mid -\infty < x_0 < +\infty\}$.
- Delimita o domínio da densidade em $p_x(x \mid x_0, x, m)$ para $x > x_0$.
- Possui a mesma unidade que x .

Parâmetro x_p :

- Denominado como Parâmetro de escala ou característico.
- Na FDP graficamente, quanto maior seu valor mais “comprimido” a densidade fica em relação a x por consequência mais “esticada” em relação ao eixo das ordenadas.
- $\{x_p \in \mathbb{R} \mid 0 < x_p < +\infty\}$
- Para $x = x_p + x_0$ o valor da distribuição será sempre de aproximadamente 0,6321.
- Possui a mesma unidade que x

Parâmetro m :

- Denominado como Parâmetro de forma.
- Na FDP, graficamente representa o formato da curva. Sendo que
- Para $m < 1$ a parte exponencial da função predomina e adquire uma forma de “J”
- Para $m = 1$ caso especial onde a curva torna-se uma exponencial
- Para $m > 1$ o efeito polinomial é mais proeminente e a curva adquire um formato FDA unimodal.
- $\{m \in \mathbb{R} \mid 0 < m < +\infty\}$

Na Figura 11 apresenta-se a alteração dos parâmetros e o comportamento das curvas FDP e FDA.

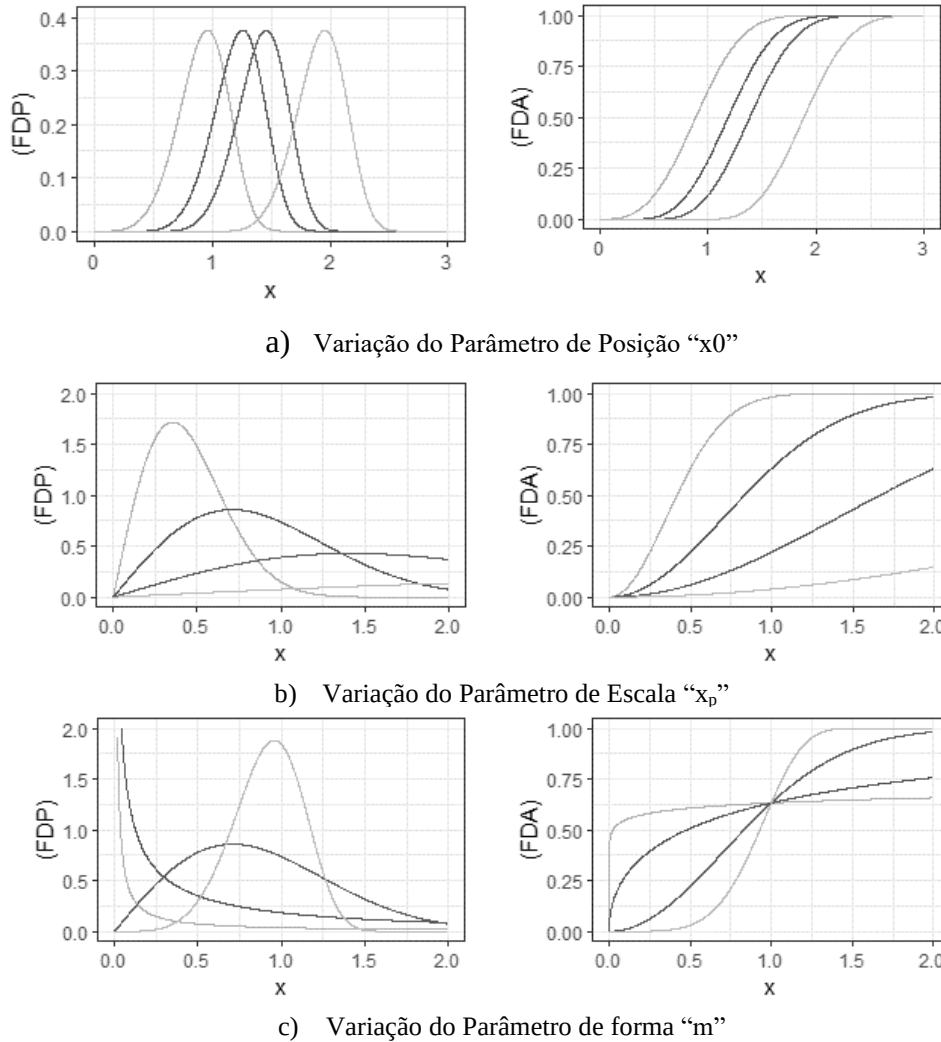
Adotando o sistema de eixos abscissas ($\ln x$) e ordenadas ($\ln (1/(1-y))$) é possível obter os valores dos parâmetros através de uma simples equação de uma reta, como pode ser observado nas equações (27), (22) e (23).

$$a = m \qquad b = -m \cdot \ln(x_0) \tag{27}$$

$$f(x) = (a)x + (b) \text{ (equação da reta)} \tag{28}$$

$$f(x) = (m)x + (-m \ln(x_0)) \text{ (equação da reta modificada Weibull)} \tag{29}$$

Figura 11 – Função de Densidade de Probabilidade e Função de Distribuição Acumulada de Weibull para diferentes parâmetros



Fonte: o autor

3.5 Distribuição Exponenciada de Weibull

MUDHOLKAR e KUMAR (1993) apresentam a família de distribuição exponenciada de Weibull (DEW), baseada na distribuição Clássica de Weibull de dois termos (não possui o parâmetro de locação x_0). O ajuste proposto pelos autores ocorre no acréscimo de um parâmetro exponencial “g”. A FDP e a FDA são apresentadas nas equações (30) e (31) respectivamente.

$$P_n(x) = \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{x_p}\right)^m}\right)^g \quad (30)$$

$$p_n(x) = \left(\frac{m \cdot g}{x_p}\right) \cdot \left[1 - e^{-\left(\frac{x}{x_p}\right)^m}\right]^{g-1} \cdot e^{-\left(\frac{x}{x_p}\right)^m} \cdot \left(\frac{x}{x_p}\right)^{m-1} \quad (31)$$

O parâmetro “g” permite flexibilidade, pois possibilita distribuições com variados tipos de taxa de falha. Apesar de versátil, o Modelo Clássico de Weibull permite somente à análises de taxas de falhas monótonas e em alguns casos não descreve adequadamente uma tendência de dados. Exemplos são observados especialmente em ciclos de vidas com taxas variáveis, onde é possível identificar a mudança gradativa da taxa inicial devido à mortalidade infantil e eventualmente alterações causadas pelo envelhecimento.

A DEW permite além de taxas monótonas, taxas unimodais e em formato de banheira. Na Tabela 3 é possível observar a relação entre os valores “m” e de “g” e o tipo de taxa de variação. Quando “g” é igual a 1 tem-se um caso especial onde a DEW é a própria distribuição de Weibull. Na Figura 12 observa-se graficamente a alteração de “g” e “m” nas FDP e FDA.

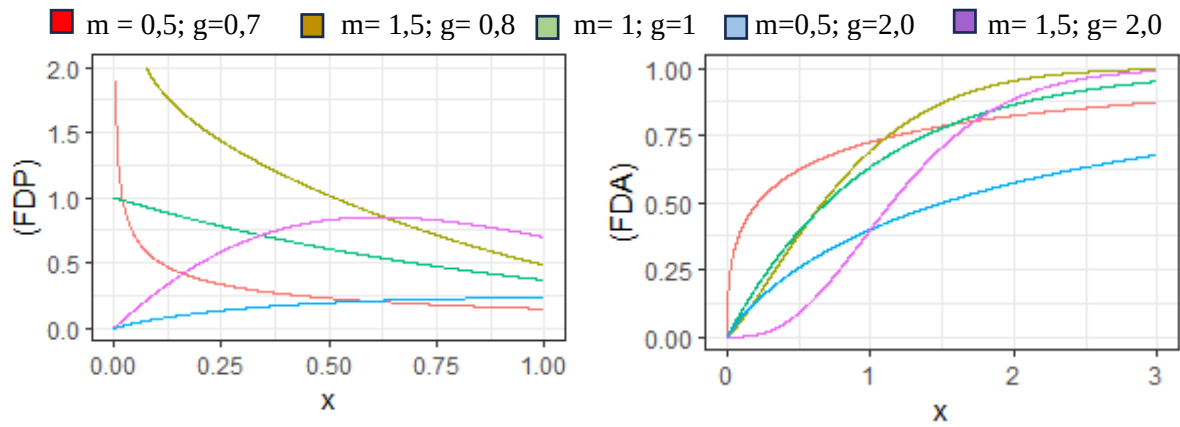
Tabela 3 – Relação entre valores de parâmetro e comportamento da função.

m	g	Taxa de falha
1	1	Constante (exponencial)
	1	Monótonas (Weibull)
< 1	< 1	Decrescente
> 1	> 1	Crescente
> 1	< 1	Banheira ou crescente
< 1	> 1	Unimodal ou decrescente

FONTE: Adaptado de MUDHOLKAR; KUMAR (1993).

Figura 12 – Função de Densidade de Probabilidade e Função de Distribuição Acumulada Exponenciada de Weibull para diferentes parâmetros de “m” “g”.

Parâmetros



Variação do Parâmetro de Escala (adotado: $x_p = 1,0$)

FONTE: De autoria própria

3.6 Distribuição Modificada de Weibull

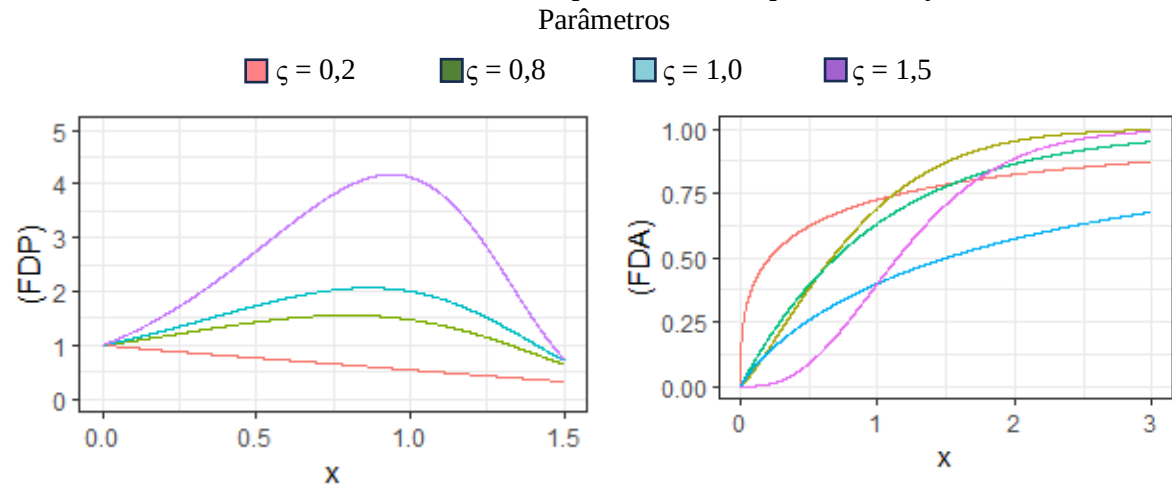
Apresentada por LAI et al. (2003) a Distribuição Modificada de Weibull (DMW) é uma distribuição que assim como a DEW propõe-se a ampliar os campos de utilização da distribuição Clássica de Weibull de dois termos apresentando um novo parâmetro (ζ) de taxa de “aceleração”. A FDP e a FDA desse modelo é mostrado nas equações (32) e (33).

$$p_n(x) = \frac{1}{m\sqrt{x_p}} \cdot (m + \zeta \cdot x) \cdot x^{m-1} \cdot e^{(\zeta \cdot x)} \cdot e^{\left[-\left(\frac{x}{x_p}\right)^m \cdot e^{(\zeta \cdot x)}\right]} \quad (32)$$

$$P_n(x) = 1 - e^{-\left[\left(\frac{x}{x_p}\right)^m \cdot e^{(\zeta \cdot x)}\right]} \quad (33)$$

Usando a DMW é possível representar também taxas de variação em formato de banheira pois o fator acrescentado a equação “ $\exp(\zeta \cdot x)$ ” adiciona o comportamento crescente e decrescente a função. Quando “ w ” assume valor zero a DMW torna-se a Distribuição Clássica de Weibull com dois parâmetros.

Figura 13 - Função de Densidade de Probabilidade e Função de Distribuição Acumulada Modificada de Weibull para diferentes parâmetros ζ .



Varição do Parâmetro de Escala (adotado: $m=1$; $x_p=1,0$)

FONTE: De autoria própria

CAPÍTULO IV – Desenvolvimento

teórico-matemático

Este capítulo é destinado a desenvolver minuciosamente a concepção dos modelos constitutivos. Descreve-se passo a passo o raciocínio matemático e lógico. São apontadas as principais considerações e simplificações do cálculo, assim como são feitas analogias para explicar alguns conceitos teóricos. Ao fim apresenta-se os modelos matemáticos completos.

4.1 Concepção e desenvolvimento teórico matemática

Considerando que a razão entre a força e a área é igual à tensão. Essa relação representa a tensão como uma medida da distribuição da força por unidade de área, equação (34). Em outras palavras, quando a área se mantém constante, temos uma relação direta entre a força aplicada e a tensão resultante.

Outra relação importante é a função diretamente proporcional entre a tensão, dada pelo produto do Módulo de Elasticidade pela deformação de engenharia. Desconsiderando a variação da área devido à deformação transversal, pode-se considerar a área e o Módulo de Elasticidade como constantes, descrevendo assim o comportamento linear de tensão por deformação no regime elástico.

Resumindo da mecânica clássica temos:

- Tensão é a distribuição da força por unidade de área (A_0), equação (34)
- Módulo de elasticidade é a distribuição da tensão pela deformação (35)
- Relacionando (34) e (35) tem-se (36).

$$\sigma_{eng} = \frac{F}{A_0} \quad (34)$$

σ_{eng} Tensão de engenharia
 F Força externa aplicada
 A_0 Área inicial perpendicular a força

$$E = \frac{\sigma_{eng}}{\varepsilon} \quad (35)$$

$$\sigma_{eng} = \frac{F}{A_0} = \varepsilon \cdot E$$

Onde:

σ_{eng} Tensão de engenharia

F Força externa aplicada

A_0 Área inicial perpendicular a força

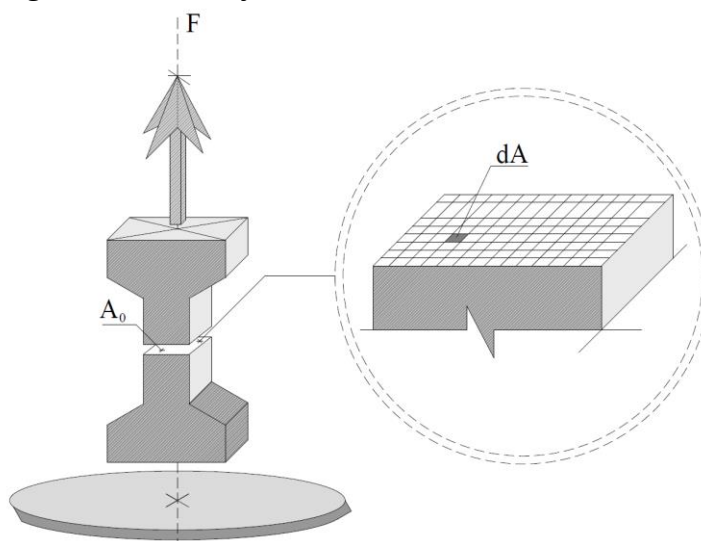
E Módulo de Elasticidade

ε Deformação

(36)

Considerando uma situação hipotética, em que um corpo de prova é submetido a uma força externa uniformemente distribuída e perpendicular às suas faces paralelas, realiza-se um corte transversal paralelo às faces para obter uma área transversal. Essa área é então dividida em infinitas partes iguais, sendo cada parte infinitesimalmente pequena denominada " dA ", conforme ilustrado na Figura 14.

Figura 14 – Ilustração de área inicial e infinitesimal dA



FONTE: De autoria própria

Assumindo que cada parte " dA " seja análoga a um elo de uma corrente ideal perfeitamente elástica até sua ruptura obedecendo à lei de Hooke, adota-se também uma faixa de deformação inicial. Nessa faixa, todos os elementos " dA " mantêm-se íntegros, e a contribuição na força interna é uniforme, demarcando o limite da fase elástica-linear do material. A essa deformação, atribui-se como deformação limite da fase elástica " ε_0 ", já o rompimento desse elo seria dado pela deformação limite superior " ε_{lim} ".

Logo estabelece dois espaços amostrais distintos para " dA ": o "fracasso", representado pelo rompimento de " dA ", e o "sucesso", caracterizado pela não ruptura. No caso de um

elemento específico " dA ", a força resistida " dF " é determinada pelas relações estabelecidas na equação (36), mantendo-se válidas até que a deformação ultrapasse " ε_{lim} " e ocorra o rompimento. A partir desse momento, identificado como "fracasso", a contribuição de " dA " para a força total torna-se nula, conforme também a equação (36), vide também a Figura 15 que exemplifica as deformações ε_0 e ε_{lim} e a relação da contribuição na força de cada dA .

$$\begin{aligned} dF &= \varepsilon \cdot E \cdot dA & se \ \varepsilon < \varepsilon_{lim} \\ dF &= 0 & se \ \varepsilon > \varepsilon_{lim} \end{aligned} \quad (37)$$

Onde:

dF Diferencial de força relacionada a cada parcela de dA

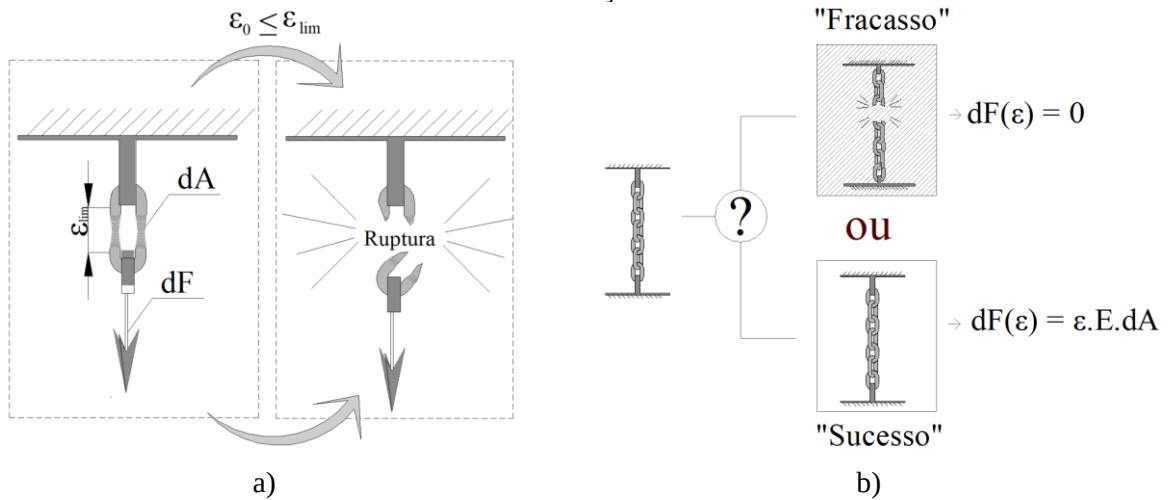
dA Diferencial de área

E Módulo de Elasticidade

ε_{lim} Deformação limite superior

ε Deformação

Figura 15- Elos de uma corrente na deformação e espaço amostral para variação da deformação



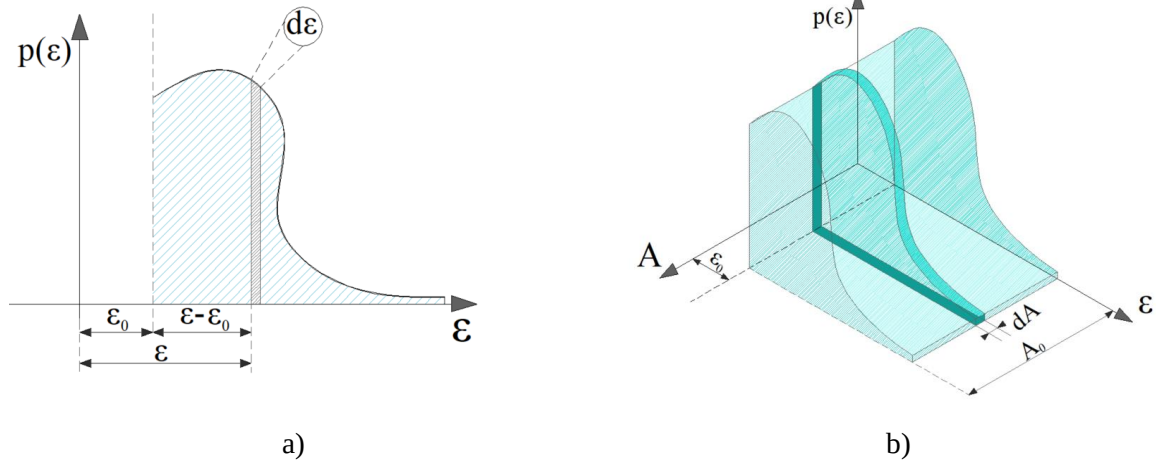
FONTE: De autoria própria

Dessa maneira, identifica-se uma relação clássica de comportamento binomial, em que, ao ultrapassar o limiar " ε_0 ", cada " dA " apresenta uma probabilidade de ruptura de acordo com a deformação. Assim, a probabilidade de rompimento pode ser expressa por uma função de densidade de probabilidade " $p_n(\varepsilon)$ " aplicada para cada " dA ", conforme ilustrado na Figura 16a.

Calcula-se a degradação da área através da probabilidade acumulada para todo $\varepsilon > \varepsilon_0$. A equação então é obtida pela resolução de uma integral dupla (vide Figura 16b). Subtrai-se a área inicial " A_0 " pelo resultado da integral dupla, que representa a área degradada de maneira probabilística, obtemos a função da área efetiva " A " em relação à deformação " ε ". Destaca-se

que a integral da função densidade de probabilidade é equivalente à função de distribuição acumulada, conforme a simplificação expressa na equação (38).

Figura 16 – Gráficos ilustrativos da densidade probabilística, deformação e Área



FONTE: De autoria própria

$$A(\varepsilon) = A_0 - \int_0^{A_0} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} p(\varepsilon) \cdot d\varepsilon \cdot dA$$

$$A(\varepsilon) = A_0 \cdot [1 - P_n(\varepsilon - \varepsilon_0)] \quad \varepsilon > \varepsilon_0$$

Onde:

A Área efetiva probabilística

A_0 Área inicial

p_n Função densidade de probabilidade

P_n Função distribuição acumulada de probabilidade

ε Deformação

ε_0 Deformação limite da fase elástica

(38)

Em resumo para $(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$ adota-se a equação (36) e despreza-se o efeito da degradação, correspondendo à fase elástica-linear do material. Já para $(\varepsilon_0 < \varepsilon)$ é adotada a premissa da degradação de área, correspondendo à fase plástica do material. Impõe-se um segundo limite superior (ε_f) que determina o colapso e ruptura sistêmica do corpo de prova ou um ponto de parada, e substitui a área de (38) em (36) desenvolvendo de acordo com a equação (39). Um fluxograma também é apresentado na Figura 17 para resumir o conceito desenvolvido da degradação probabilística de áreas.

$$\sigma_{eng} = \frac{F}{A_0} = \frac{\varepsilon \cdot E \cdot A_0 \cdot [1 - P_n(\varepsilon - \varepsilon_0)]}{A_0} \quad \text{para: } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_f$$

Logo:

$$\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot [1 - P_n(\varepsilon - \varepsilon_0)] \quad \text{para: } \varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_f$$

(39)

Onde:

σ_{eng} Tensão de energia

A_0 Área inicial

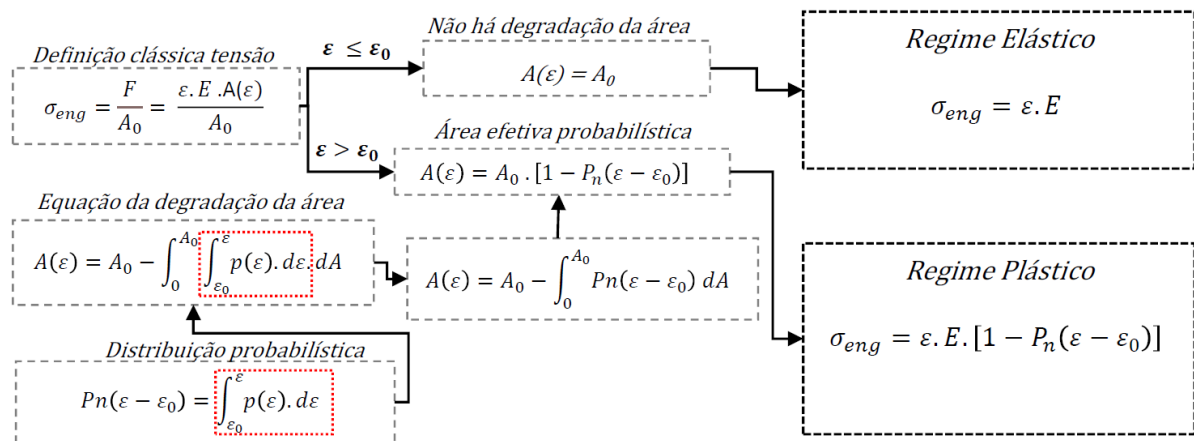
F Força aplicada no corpo de prova

P_n Função distribuição acumulada de probabilidade continua

ε Deformação

ε_0 Deformação limite da fase elástica

Figura 17 - Fluxograma do equacionamento resumido da degradação probabilística



FONTE: De autoria própria

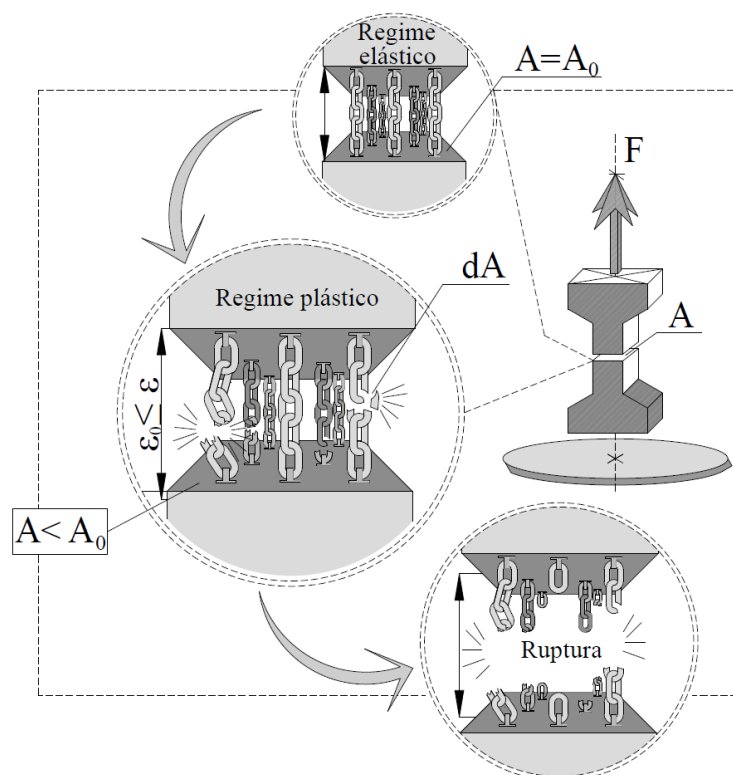
Seguindo as simplificações e o raciocínio apresentado, a área transversal total do corpo de prova seria igual a somatória infinita das contribuições de cada elo da seção, ou seja, cada unidade de área. Considerando a deformação total menor que a deformação limite dos elos mais fracos (ε_0), não haverá alteração da contribuição de cada unidade de área, assim caracteriza-se o regime elástico dentro do conceito desenvolvido.

No entanto se considerar que, após o limite de deformação, onde qualquer um dos elos sofram ruptura, esse elo não contribuirá para a resistência final, a ruptura é permanente. Esse comportamento classificaria o início do regime plástico onde $P(\varepsilon)$ é dado pela probabilidade

acumulada de sobrevivência de acordo com deformação. A ideia é exemplificada de acordo com a ilustração da Figura 18.

Assim tem-se a tensão de engenharia como uma função dependendo do módulo de elasticidade, da deformação e de uma distribuição de probabilidade acumulada.

Figura 18 - Exemplificação da degradação da área aplicando probabilidade.



FONTE: De autoria própria

Para a função “ P_n ” escolheu-se as funções de distribuição Exponenciada de Weibull e a função de distribuição Modificada de Weibull, propondo assim os dois modelos. Optou-se por essas distribuições devido à origem do modelo de Weibull, que se assemelha à teoria desenvolvida neste trabalho. Levou-se em conta também a versatilidade da distribuição proporcionada pelos parâmetros e a simplicidade de encontrá-los. Os modelos derivados EW e MW são preferidos em detrimento ao modelo clássico, principalmente pela possibilidade de variação da taxa que pode adquirir também a forma unimodal, no caso da EW, ou taxa em formato de “banheira” para ambas as distribuições.

A forma de “banheira” revela-se particularmente interessante aos modelos, uma vez que possibilita a variação da taxa de falha em consonância com as observações do comportamento natural do material. Isso é exemplificado pela queda no módulo de elasticidade inicial no UHPC após sua fase elástica, associada à natureza intrínseca e ao processo de fabricação do material.

Essas falhas geralmente estão relacionadas à presença de vazios, falhas aleatórias na matriz e ao processo de cura, resultando em um aumento gradual da deformação que se acomoda, proporcionando uma taxa menos acentuada e mais monótona. No entanto, quando se aproxima das deformações de ruptura, a taxa de falha novamente se intensifica devido ao efeito progressivo da danificação do material, resultante da proliferação de trincas e defeitos.

Para aplicação das distribuições, primeiramente redefine-se a simbologia dos parâmetros da função Exponenciada de Weibull (EW) e Modificada de Weibull (MW) apresentada no Capítulo III equação (30) e (33), respectivamente, de acordo com a Tabela 4.

Tabela 4 – Redefinição da simbologia das distribuições acumulada de EW e MW.

	Simbologia anterior	Nova simbologia adaptada
EXPONENCIADA		
DE WEIBULL	$P_n(x) = \left(1 - e^{-\left(\frac{x}{x_p}\right)^m}\right)^g$	$= P_{ew}(\varepsilon - \varepsilon_0) = \left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_{p1}}\right)^{\eta_1}}\right)^\kappa$
MODIFICADA		
DE WEIBULL	$P_n(x) = 1 - e^{-\left[\left(\frac{x}{x_p}\right)^m \cdot e^{(\zeta \cdot x)}\right]}$	$= P_{me}(\varepsilon - \varepsilon_0) = 1 - e^{-\left[\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon_{p2}}\right)^{\eta_2} \cdot e^{(r \cdot \varepsilon)}\right]}$

FONTE: De autoria própria

Finalmente substitui-se (P_n) na equação pelas distribuições acumuladas, aplica-se os limites inferiores e superiores (ε_0 , ε_f) obtendo-se os dois modelos denominados como modelo I e II, tanto para compressão quanto para tração de acordo com a Tabela 5.

Tabela 5 – Modelos constitutivos probabilísticos I e II

FASE	MODELO I	MODELO II
Elástica	$\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E$	$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E$
Plástica	$\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{01}}{\varepsilon_{p1}}\right)^{\eta_1}}\right)^\kappa\right]$	$\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_f$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot e^{-\left[\left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_{02}}{\varepsilon_{p2}}\right)^{\eta_2} \cdot e^{(r \cdot \varepsilon)}\right]}$

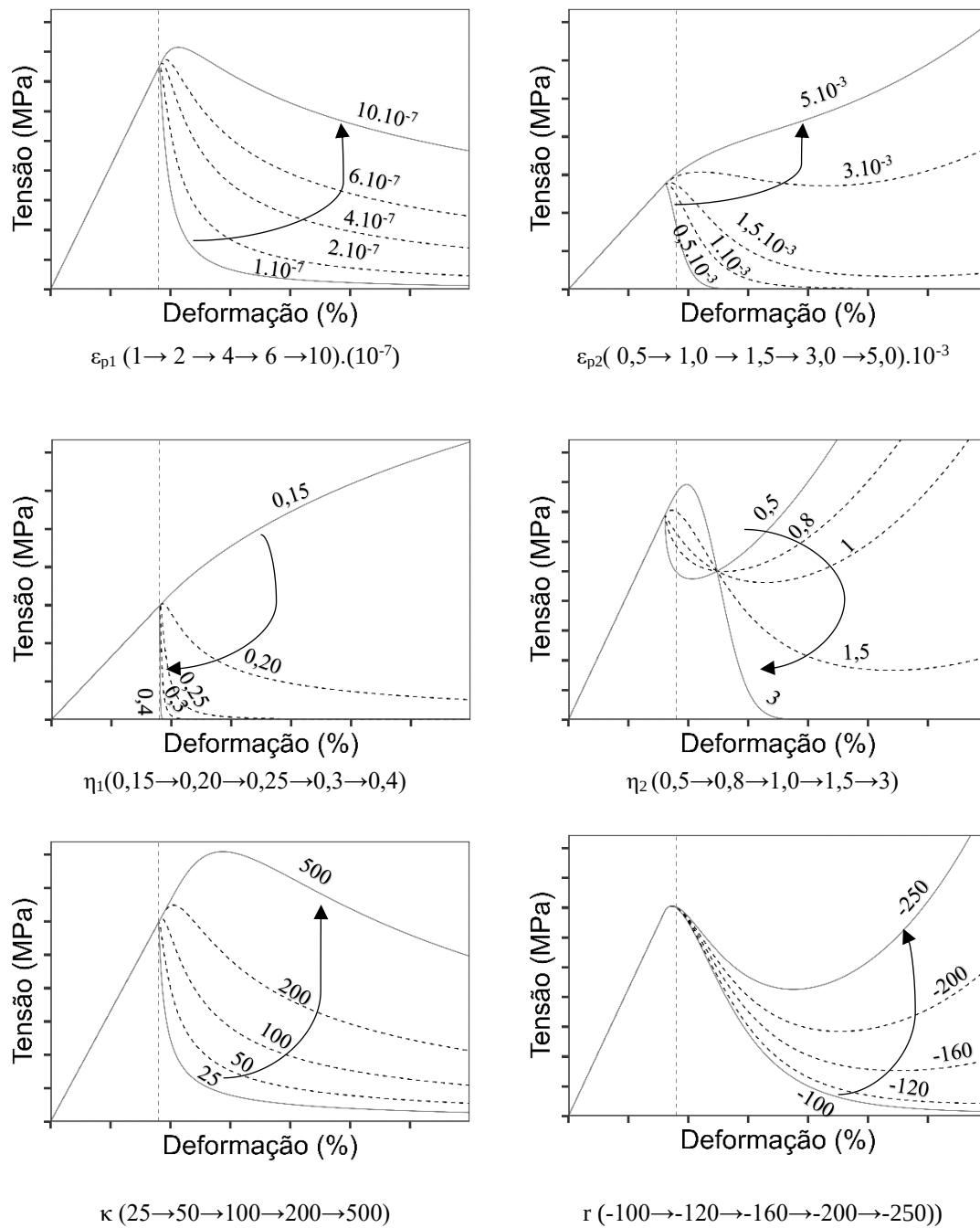
Onde:

σ_{eng}	Tensão de engenharia
ε	Deformação específica
E	Módulo de elasticidade
ε_{01}	Deformação específica limite da fase elástica (Modelo I)
ε_{02}	Deformação específica limite da fase elástica (Modelo II)
ε_{p1}	Fator de escala (Modelo I)
ε_{p2}	Fator de escala (Modelo II)
η_1	Parâmetro de forma (Modelo I)
η_2	Parâmetro de forma (Modelo II)
κ	Parâmetro exponencial (Modelo I)
r	Parâmetro da taxa de aceleração (Modelo II)

FONTE: De autoria própria

Realizou-se uma análise paramétrica para avaliar graficamente o efeito da variação do fator de escala, parâmetros de forma, exponencial e taxa de aceleração dos modelos sobre o comportamento das curvas tensão por deformação. Na Figura 19 observa-se visualmente os resultados obtidos com a variação de cada fator, proporcionando uma ilustração do impacto das alterações. Nota-se a flexibilidade e adaptabilidade dos modelos, pois, com a variação dos fatores e parâmetros é possível uma ampla variedade de curvas e diferentes formatos.

Figura 19 – Efeito da variação dos parâmetros e alteração das curvas.



FONTE: De autoria própria

CAPÍTULO V – Análise e discussões

Neste capítulo é discutido o desenvolvimento do programa e comparado os resultados da validação e parametrização de cada um dos modelos. Realizou-se a análise computacionalmente de acordo com a metodologia apresentada no Capítulo II. Primeiramente é apresentado um panorama geral das regressões, como método de determinação e análise geral, em seguida os modelos são detalhados para cada tipo de ensaio e quantidade de adição de fibras.

5.1. Coleta de dados

Os dados experimentais de compressão e tração direta foram adquiridos por meio do aplicativo WebPlotDigitizer ROHATGI (2022). Imagens dos gráficos de tensão por deformação dos ensaios experimentais, disponibilizadas por KRAHL (2018), OLIVEIRA (2019) e RIBEIRO (2022), foram inseridas no aplicativo. Através da determinação de coordenadas em imagem raster, uma nuvem de pontos foi estabelecida, e as coordenadas resultantes de tensão e deformação foram registradas em um banco de dados em formato de tabela, armazenado em um arquivo CSV. A primeira coluna corresponde à deformação, enquanto a segunda coluna refere-se à tensão.

Os ensaios foram separados em um total de 16 conjuntos de ensaios, sendo agrupados por autor e distintos de acordo com o tipo de ensaio e quantidade de fibras. Além disso, quatro desses conjuntos foram formados pela combinação dos dados de todos os autores, separados para cada tipo de ensaio e suas respectivas quantidades de fibras, a esse grupo nomeou-se “COMPILADO”, conforme apresentado na Tabela 3.

Tabela 6 – Matriz dos grupos de ensaios para análise computacional

	Compressão		Tração	
	1%	2%	1%	2%
KRAHL	X	X	X	X
OLIVEIRA	X	X	X	X
RIBEIRO	X	X	X	X
COMPILADO	X	X	X	X

FONTE: De autoria própria.

Devido à natureza da coleta de dados, na fase elástica-linear, nos ensaios a tração, os pontos eram relativamente pobres para sua caracterização em relação a fase não linear do material, distorcendo a regressão, logo para essa fase nos ensaios de tração direta foram apenas coletados o limite de deformação (ε_0) e sua respectiva tensão (σ_0), e calculada a média simples para cada conjunto de dados, sendo o módulo de elasticidade (E) estabelecido pela Lei de Hooke. Para os ensaios de compressão, o módulo de elasticidade e a “ ε_0 ” foram encontrados como parâmetros da regressão. Os valores pré-definidos para ε_0 , σ_0 e E na tração são apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 - Valores estabelecidos para ε_0 , σ_0 e E por análise de imagem *raster* (ensaio) a tração

	Tração $V_f=1\%$			Tração $V_f=2\%$		
	ε_0 (%)	σ_0 (MPa)	E (MPa)	ε_0 (%)	σ_0 (MPa)	E (MPa)
Krahl	0,0114%	4,898	42963	0,0124%	6,343	51150
Oliveira	0,0275%	8,111	29495	0,0243%	8,803	36225
Ribeiro	0,0358%	7,073	19757	0,0546%	7,380	13516
Compilado	0,0225%	7,465	33177	0,0225%	8,029	35685

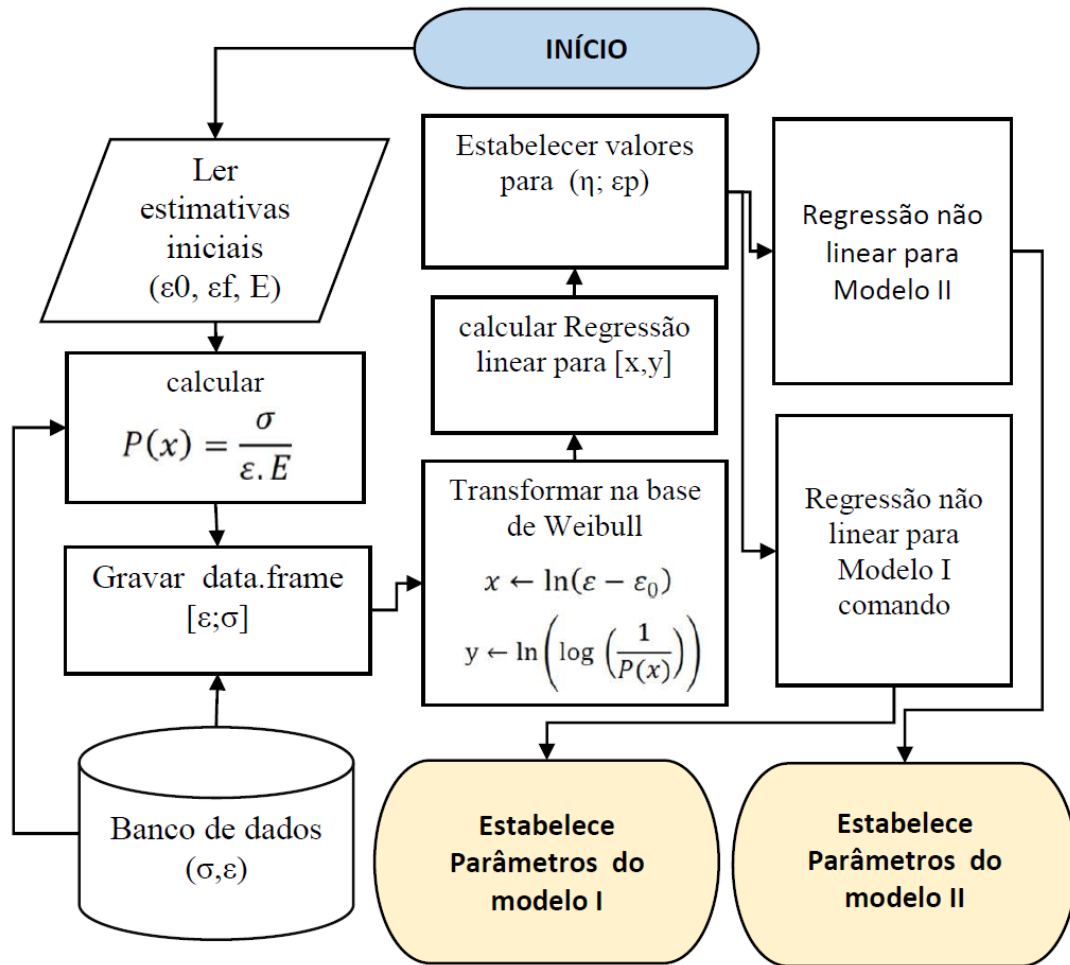
FONTE: De autoria própria

5.2. Regressão dos parâmetros

Para determinação dos valores de cada um dos parâmetros dos modelos foi desenvolvido um programa na linguagem de programação R. Este programa emprega o comando 'nlsLN' do pacote 'minpack.lm()' para executar a regressão não linear e estimar os melhores valores com menor erro residual, fundamentado no método dos mínimos quadrados, com a implementação do algoritmo de otimização de Levenberg–Marquardt. Adotando-se o valor de $1,49 \times 10^{-8}$ como critério de tolerância de convergência para a regressão. O algoritmo desenvolvido para o programa é exemplificado na Figura 20.

Todos os 16 conjuntos de ensaios passaram pela análise do software obtendo-se entre outros dados a estimativas para os parâmetros e os erros residuais de cada grupo que estão sintetizados na Tabela 8 (Os resultados na íntegra para cada análise encontram-se nos Apêndices (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e P). A deformação limite final (ε_f) adotada para a análise de todos os ensaios foram padronizadas em 1,4% e 4% na compressão e tração, respectivamente.

Figura 20 – Fluxograma do programa criado para regressão não linear.



FONTE: De autoria própria.

Tabela 8 – Parâmetros e erros residuais obtidos (modelo, autor, material e tipo de ensaio)

MODELO I					MODELO II				
	KRAHL	OLIVEIRA	RIBEIRO	COMP.		KRAHL	OLIVEIRA	RIBEIRO	COMP.
ϵ_{p1} (10^{-6})	0,23	0,10	1,54	0,18	COMPRESSÃO 1%	1,60	1,63	2,47	1,68
η_1	0,19	0,18	0,24	0,19		1,14	1,36	2,18	1,30
κ	111,90	154,40	188,20	121,50		-107,80	-	1,40	-199,10
ϵ_{01} (10^{-3})	3,73	3,34	2,94	3,64		3,69	3,05	2,39	3,38
E (MPa)	39.590	45.430	44.170	41.290		40.020	46.920	45.760	42.480
ERRO (MPa)	13,66	11,79	7,45	13,20		13,24	10,25	3,79	12,45
ϵ_{p1} (10^{-6})	1,92	0,38	0,62	0,68	COMPRESSÃO 2%	2,05	2,04	2,11	1,96
η_1	0,21	0,20	0,21	0,20		1,18	1,66	1,67	1,30
κ	34,68	157,30	120,30	72,39		- 97,35	- 159,70	- 159,80	-117,60
ϵ_{01} (10^{-3})	3,87	3,17	3,45	3,57		3,45	2,76	3,02	3,29
E (MPa)	40.780	48.600	47.750	44.030		42.560	50.500	49.310	45.320
ERRO (MPa)	11,54	12,43	8,25	12,75		11,03	10,63	4,85	11,88
ϵ_{p1} (10^{-6})	181,70	5,11	111,40	35,19	TRAÇÃO 1%	0,08	0,19	0,41	0,14
η_1	0,35	0,24	0,32	0,29		0,30	0,37	0,39	0,34
κ	0,75	6,46	2,12	2,25		2,02	-	0,85	-
ERRO (MPa)	0,62	0,65	1,22	0,87		0,59	0,73	1,23	0,88
ϵ_{p1} (10^{-6})	18,69	172,30	195,60	140,60	TRAÇÃO 2%	0,11	0,25	1,08	0,24
η_1	0,28	0,37	0,35	0,35		0,34	0,39	0,50	0,38
κ	2,70	1,27	2,80	1,41		- 0,10	0,21	- 2,54	0,27
ERRO (MPa)	0,72	0,54	0,91	0,87		0,75	0,54	0,94	0,88

FONTE: De autoria própria

Os erros residuais relativos ($E_r\%$), que indicam a discrepância percentual entre as previsões do modelo e os valores observados, em relação aos dados coletados de tensão máxima ($\sigma_{m\acute{a}x}$), foram minuciosamente documentados na Tabela 9. É notável que o ($E_r\%$), resultante da regressão do modelo II para o ensaio de tração do UHPC-1% de RIBEIRO tenha sido o mais elevado registrado, alcançando 14,09%. Em um contexto apenas comparativo, e considerando parâmetros distintos, procedeu-se ao cálculo do Coeficiente de Variação, uma medida relativa expressa como a razão entre o desvio padrão e $\sigma_{m\acute{a}x}$.

O Modelo I apresentou maiores Erros Residuais Relativos ($E_r\%$) em todos os ensaios de compressão analisados em relação ao Modelo II. Por outro lado, nos ensaios de tração, o Modelo I alcançou os melhores resultados, exceto no grupo do UHPC-1% de KRAHL. É importante salientar que, embora esses resultados apontem uma tendência, isoladamente, não

são conclusivos. As diferenças em pontos percentuais observadas são geralmente pequenas, com valores máximos de 2,81% no ensaio de compressão para UHPC-2% de RIBEIRO.

A dispersão nos resultados de Ribeiro em relação aos dados compilados pode ser atribuída à quantidade inferior de dados coletados para esse autor, em comparação com os demais.

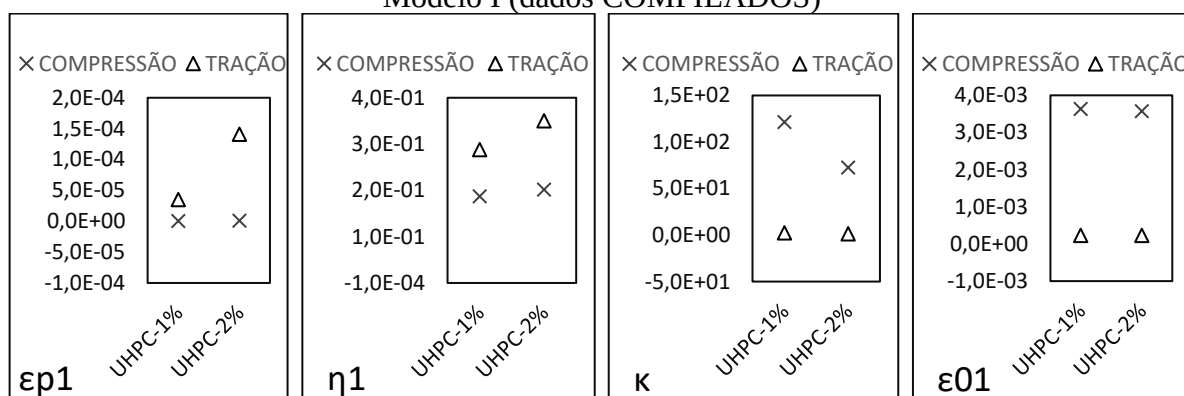
Tabela 9 - Erros residuais relativos em porcentagem ($E_r/\sigma_{máx}$)

	MODELO I				MODELO II			
	COMPRESSÃO		TRAÇÃO		COMPRESSÃO		TRAÇÃO	
	UHPC- 1%	UHPC-2%	UHPC- 1%	UHPC-2%	UHPC- 1%	UHPC-2%	UHPC- 1%	UHPC-2%
Krahl	9,41%	7,67%	10,16%	10,00%	9,12%	7,33%	9,67%	10,41%
Oliveira	8,70%	8,53%	8,74%	6,47%	7,56%	7,30%	9,81%	6,51%
Ribeiro	4,56%	5,78%	13,94%	9,67%	2,32%	2,97%	14,09%	10,03%

FONTE: De autoria própria

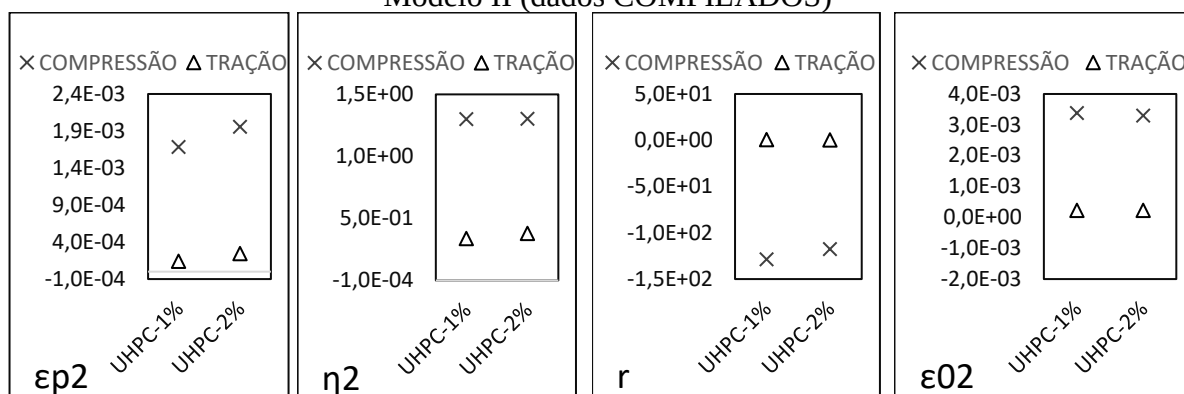
Os gráficos apresentados nas Figura 21 e Figura 22 são ferramentas úteis para visualizar e comparar as ordens de grandeza, além de analisar as relações entre os parâmetros dos resultados do grupo de dados compilados, separados de acordo com a porcentagem de adição de fibras. No eixo x, cada material é representado juntamente com sua respectiva porcentagem de adição de fibra, enquanto no eixo y são exibidos os valores obtidos pela regressão de cada um dos parâmetros para tração e compressão, derivados do grupo Compilados. As discrepâncias entre os valores dos parâmetros em função do tipo de material e da quantidade de fibras adicionadas podem ser claramente observadas e analisadas por meio desses gráficos.

Figura 21 -Comparação da ordem de grandeza dos parâmetros de tração e compressão
Modelo I (dados COMPILADOS)



FONTE: De autoria própria

Figura 22 - Comparação da ordem de grandeza dos parâmetros de tração e compressão
Modelo II (dados COMPILADOS)

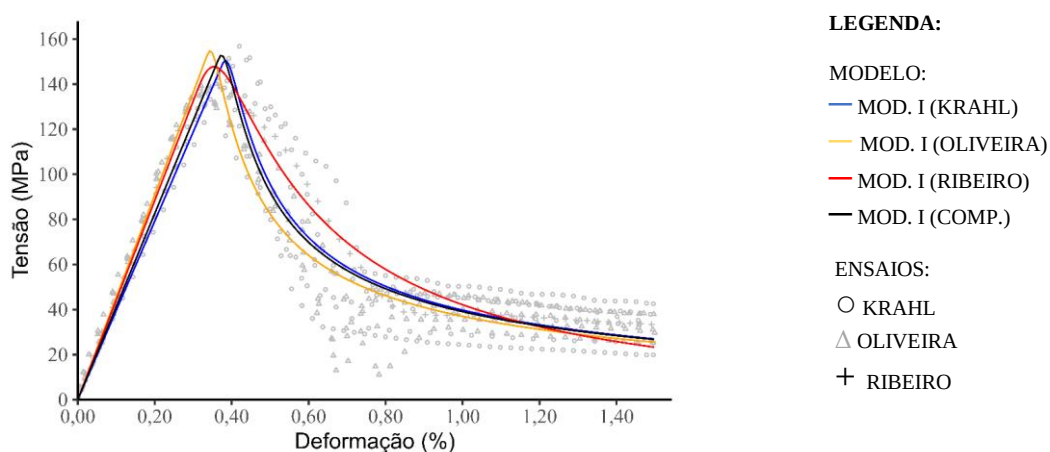


FONTE: De autoria própria

5.3. MODELO I – Compressão UHPC-1%

Na Figura 23 , é apresentado graficamente o resultado obtido na regressão do Modelo I para os ensaios de compressão UHPC-1%. Observa-se que o grupo composto pelos dados de RIBEIRO apresentou o menor parâmetro (ϵ_0) seguido do grupo de OLIVEIRA e KRAHL. Esse parâmetro é responsável pela delimitação do final da fase elástica e início da curvatura. Dado a proposição teórica apresentada no capítulo IV, seria um indicativo do início da degradação do material.

Figura 23 -Regressão do Modelo I por autor (Compressão UHPC-1%)



FONTE: De autoria própria

Em todos os ensaios de compressão do UHPC-1%, observou-se uma regressão para os parâmetros $\eta_1 < 1$ e $\kappa > 1$, indicando uma taxa unimodal ou decrescente, conforme preconizado por MUDHOLKAR; KUMAR (1993). No caso de uma taxa decrescente, isso sugere a presença de uma considerável variação inicial decorrente de possíveis defeitos na produção, concepção

ou características intrínsecas do material. Essa variação tende a estabilizar em direção ao limite de análise ε_f .

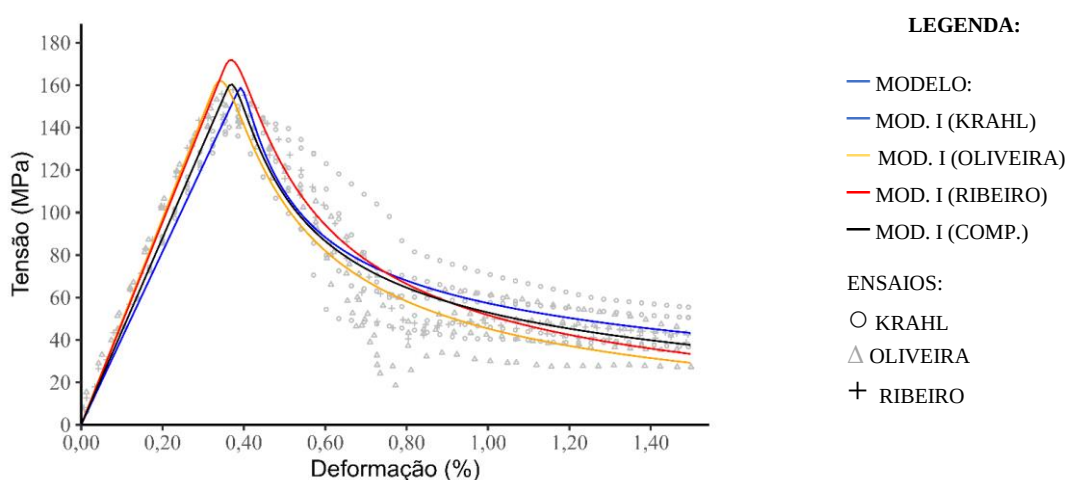
Uma comparação pode ser estabelecida entre o comportamento mecânico do UHPC descrito na literatura e a análise obtida dos parâmetros η_1 e κ . Inicialmente a taxa é governada por uma matriz frágil, que após os primeiros pontos de fragilidade tem um decaimento rápido. Gradualmente, os esforços convergem para um comportamento regido pelas pontes de fibras, sugerindo uma transição da taxa no material ao longo da deformação.

A análise dos parâmetros η_1 e κ , juntamente com o comportamento mecânico do UHPC, alinha-se de maneira consistente com o que é descrito na literatura. Inicialmente, a taxa é predominantemente governada pela matriz, em virtude de falhas e defeitos constitutivos do material. Consequentemente, é esperada uma rápida degradação devido à interligação das fissuras e um efeito dominó, resultando em uma mudança abrupta na declividade da curva. À medida que a deformação aumenta, observa-se uma transição gradual, onde o comportamento do material passa a ser majoritariamente regido pelas pontes de fibras, que exibem um comportamento mais dúctil. Essa transição, por conseguinte, resulta em uma taxa decrescente no material ao longo da deformação.

5.4. MODELO I – Compressão UHPC-2%

Na Figura 24 é apresentado graficamente o resultado obtido na regressão do Modelo I para os ensaios de compressão UHPC-2%.

Figura 24 - Regressão do Modelo I por autor (Compressão UHPC-2%)



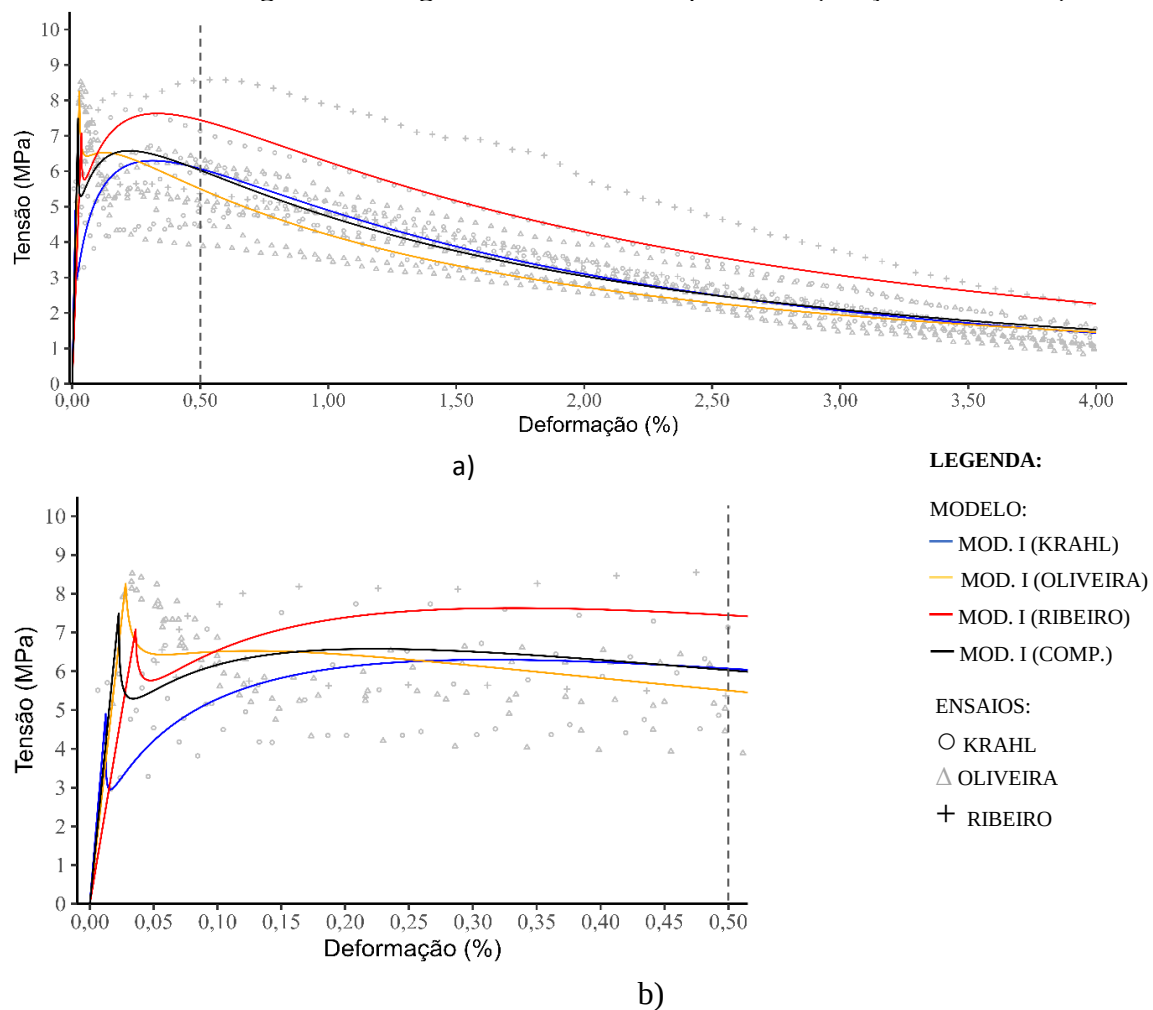
FONTE: De autoria própria

Para o grupo de RIBEIRO, foi observado na regressão o maior módulo de elasticidade e uma máxima tensão de pico próxima aos 180 MPa contra os quase 160 MPa do resultado da compilação de dados. Este grupo destacou-se visualmente como o menos semelhante aos demais, embora todos apresentassem comportamentos similares. Além disso, foram obtidos parâmetros $\eta_1 < 1$ e $\kappa > 1$. Apesar das grandezas distintas em comparação com o UHPC-1%, esse grupo manteve o mesmo padrão de taxa de degradação, o que era esperado. Isso possivelmente ocorre, pois, a adição de 1% de fibra não altera significativamente os mecanismos subjacentes, mas sim suas magnitudes. O grupo de KRAHL obteve o menor módulo de elasticidade em compensação obteve o maior valor para limite elástico ε_0 .

5.5. MODELO I – Tração UHPC-1%

Na Figura 25 delinea-se o desfecho da regressão do Modelo I referente aos ensaios de tração do UHPC-1%.

Figura 25 - Regressão do Modelo I por autor (Tração UHPC-1%)



FONTE: De autoria própria

Apesar de se manterem fixos os valores do módulo de elasticidade e do limite de deformação ε_0 , conforme mencionado anteriormente na metodologia, a diversidade de curvas geradas pela regressão ainda pode ser visualizada. Na análise regressiva dos grupos de KRAHL e RIBEIRO, observou-se a configuração de uma curva que simula um comportamento de *strain hardening*, evidenciando um pico após o estágio de fissuração. Em contrapartida, para OLIVEIRA, os dados observados sugeriram um comportamento de *strain softening*, alinhando-se ao esperado, considerando o descrito pelos autores em suas respectivas obras. A regressão dos dados compilados dos três autores resultou em um comportamento *strain softening*.

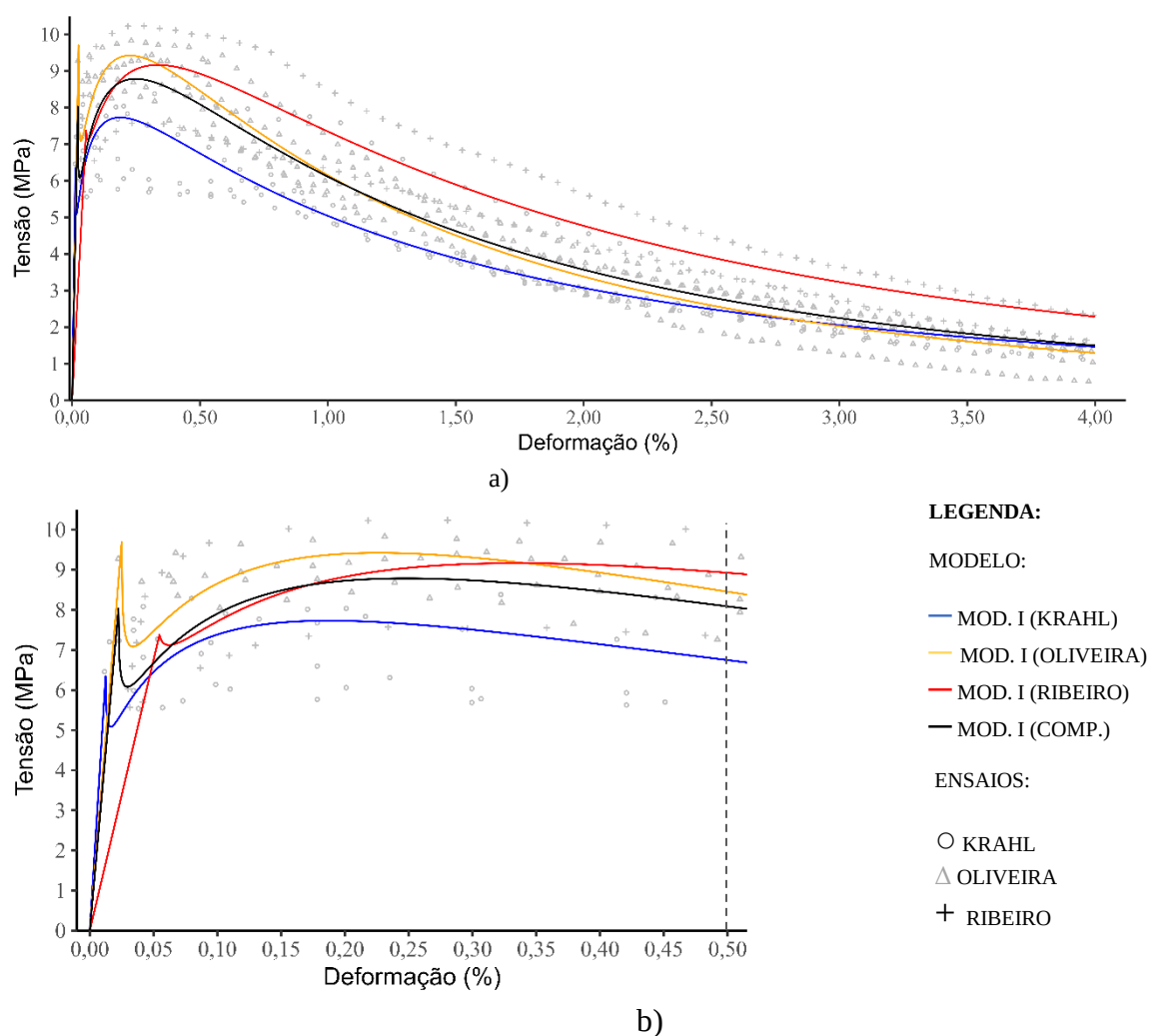
A análise de regressão para KRAHL evidenciou o maior ganho relativo de resistência no pós-pico, refletido tanto nos valores de ε_p quanto de η_1 . Esse padrão decrescente foi mantido no grupo de RIBEIRO e OLIVEIRA. Por outro lado, os valores do parâmetro exponencial (κ) seguiram uma tendência inversa. Notavelmente, o parâmetro η_1 apresentou a menor dispersão entre os resultados, enquanto os parâmetros de escala (ε_p) parecem exercer uma influência na localização do pico de tensão pós-fissuração.

Nos ensaios de tração, a análise dos parâmetros η_1 e κ revelou um comportamento decrescente para KRAHL e unimodal ou decrescente para os outros dois autores.

5.6. MODELO I – Tração UHPC-2%

Os resultados gráficos do Modelo I a tração para UHPC-2% é apresentado Figura 26. Para a curva tensão por deformação de tração UHPC-2% obteve-se uma curva característica de *strain hardening* para KRAHL e RIBEIRO e para OLIVEIRA *strain softening*. A curva resultante do compilado de dados foi um *strain hardening*.

Figura 26 - Regressão do Modelo I por autor (Tração UHPC-2%)



FONTE: De autoria própria

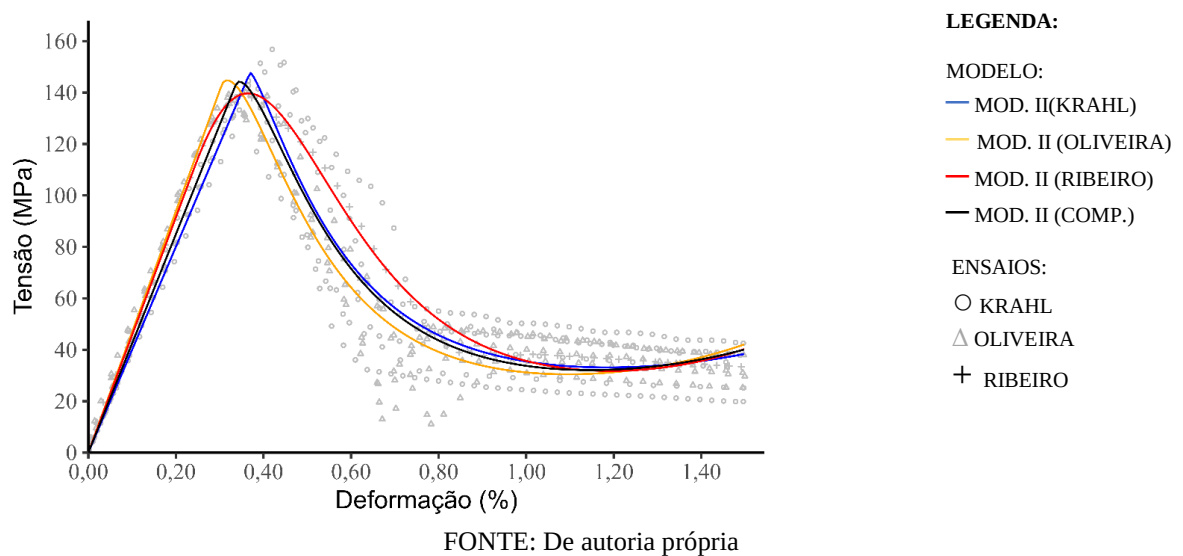
5.7. MODELO II- Compressão UHPC-1%

Os resultados dos gráficos do Modelo II a compressão para UHPC-1% por autor são apresentados na Figura 27.

O grupo de ensaio de RIBEIRO obteve os maiores valores em módulo para os parâmetros de forma (η_2), de aceleração (r) e de escala (ϵ_p), e o menor valor para o parâmetro de posição (ϵ_0). Essa combinação de fatores demonstram um material com uma fase elástica mais precoce e uma degradação inicial mais suave, por consequência observa-se um pico de tensão menos anguloso e uma taxa de degradação inicialmente mais lenta, obtendo uma curva suave. Próxima ao limite imposto ϵ_f a curva de OLIVEIRA converge com as outras curvas, indícios de que atingiu um patamar de estabilização devido às fibras.

Em contraponto aos parâmetros de OLIVEIRA, na regressão para KRAHL os parâmetros (η_2), (r), (ε_p) foram menores em módulo quando comparados à regressão dos dados compilados, obtendo-se uma curva com pico bem agudo, resultado de uma taxa inicial brusca.

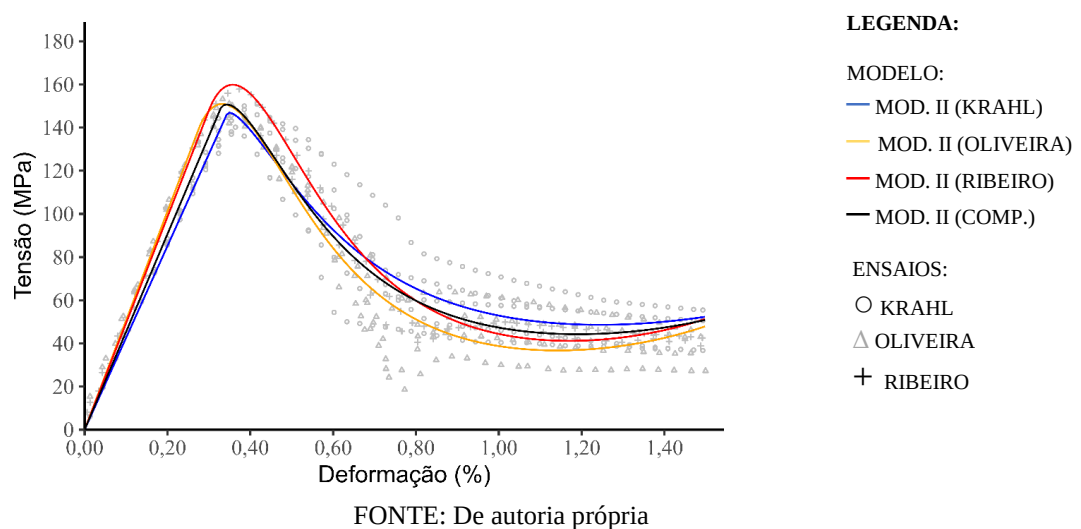
Figura 27 - Regressão do Modelo II por autor (Compressão UHPC-1%)



5.8. MODELO II – Compressão UHPC-2%

Os resultados dos gráficos do Modelo II a compressão para UHPC-2% por autor são apresentados na Figura 28.

Figura 28 - Regressão do Modelo II por autor (Compressão UHPC-2%)

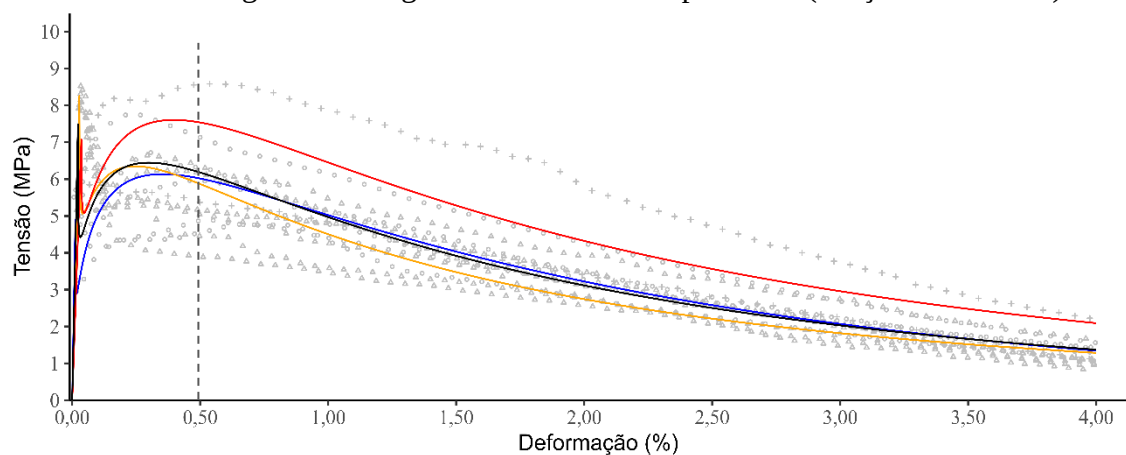


Os valores dos parâmetros ε_{p2} , η_2 e r obtidas dos grupos de RIBEIRO e OLIVEIRA são relativamente próximos, resultando em curvas com comportamento semelhantes. Já os parâmetros η_2 e r obtidos para KRAHL foram os menores valores em módulo na regressão dos ensaios à compressão do UHPC-2%, obtendo um pico de tensão mais anguloso e uma taxa de variação mais amena ao decorrer da deformação.

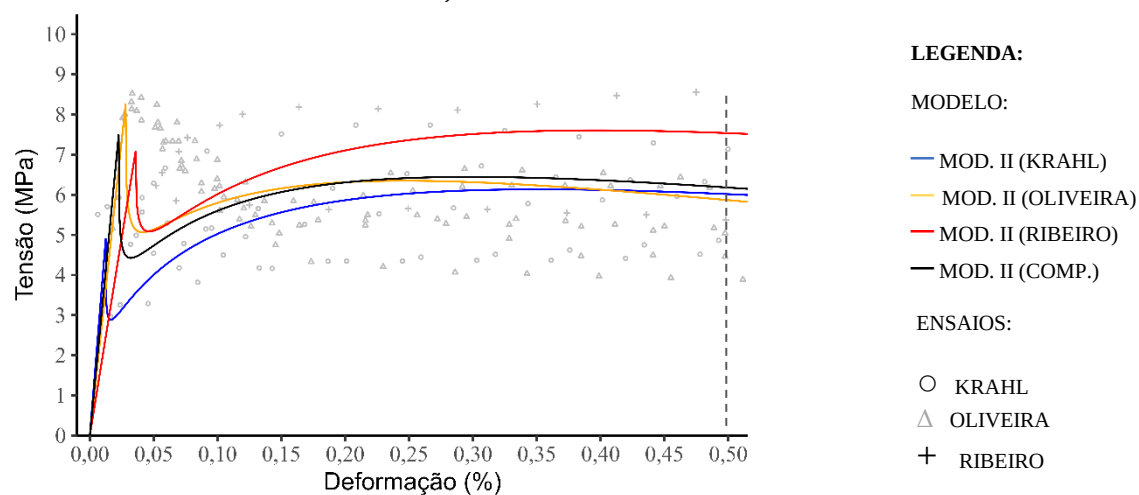
5.9. MODELO II – Tração UHPC-1%

Os resultados dos gráficos do Modelo II a Tração para UHPC-1% por autor são apresentados na Figura 29.

Figura 29 - Regressão do Modelo II por autor (Tração UHPC-1%)



a)



LEGENDA:

MODELO:

- MOD. II (KRAHL)
- MOD. II (OLIVEIRA)
- MOD. II (RIBEIRO)
- MOD. II (COMP.)

ENSAIOS:

- KRAHL
- △ OLIVEIRA
- + RIBEIRO

b)

FONTE: De autoria própria

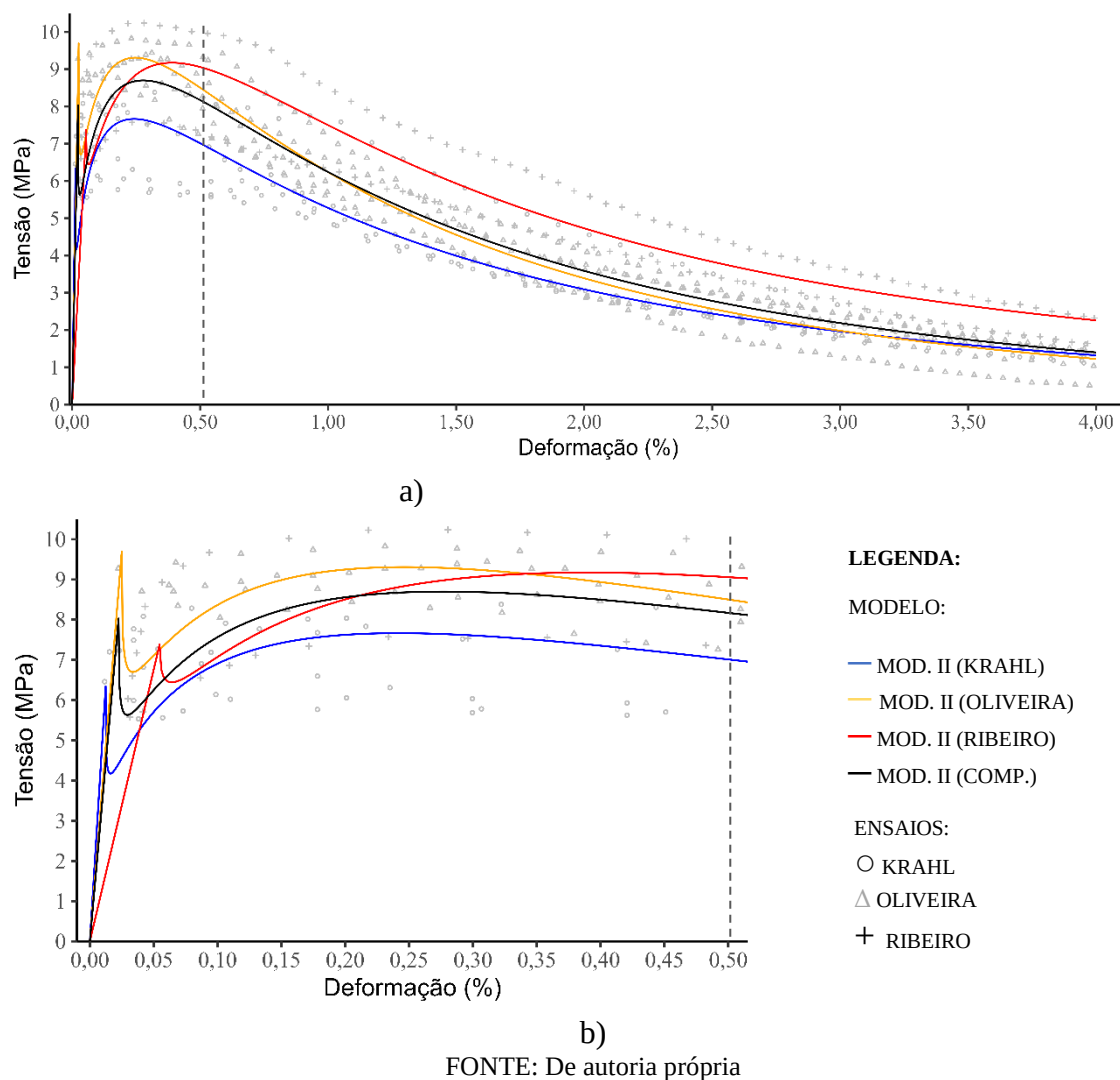
Os resultados da regressão a tração 1% geraram curvas com comportamento *strain softening* no grupo de ensaio de OLIVEIRA e *strain hardening* para RIBEIRO e KRAHL. Para o compilado de dados foi obtido um comportamento *strain softening*.

Na tração, visto no capítulo III, a matriz contribui significativamente para o comportamento do material na fase elástica-linear, já na fissuração as pontes de fibras vão se tornando o efeito majoritário, logo o fator ε_{p2} e r e η_2 podem estar diretamente relacionados a orientação e direção das fibras.

5.10. MODELO II – Tração UHPC-2%

Os resultados dos gráficos do Modelo II a Tração para UHPC-2% por autor são apresentados na Figura 30.

Figura 30 - Regressão do Modelo II por autor (Tração UHPC-2%)



A regressão para tração 1% gerou curvas com comportamento *strain softening* no grupo de ensaio de OLIVEIRA e *strain hardening* para RIBEIRO e KRAHL. Para o compilado de dados foi obtido um comportamento *strain hardening*.

Uma diferença significativa foi encontrada no parâmetro r e parâmetro ε_{p1} do grupo de ensaio de RIBEIRO quando comparada com o valor dos dados compilados, essa alteração ocorre principalmente pelo baixíssimo módulo de elasticidade encontrado e fixado para esse grupo de 13.516 MPa. Esse baixíssimo módulo de elasticidade é incomum, podendo ser resultado de uma imprecisão do método de coleta de dados, ou de um erro na própria execução do ensaio.

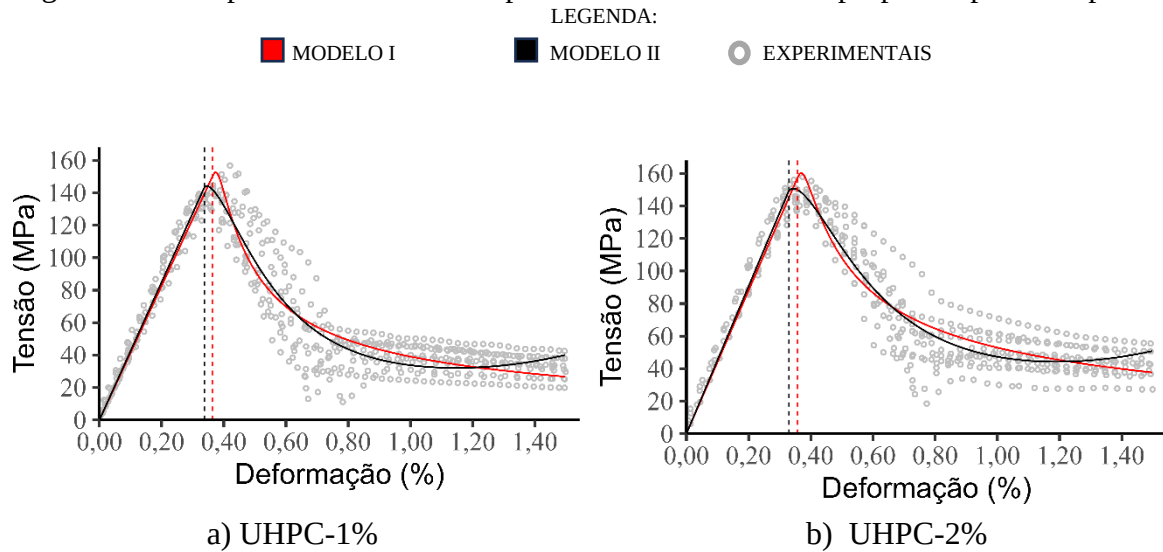
5.11. Comparação e análise entre os Modelos I e II

Na Figura 31 são exibidos os resultados gráficos comparativos dos dois modelos propostos para os ensaios de compressão e na Figura 32 para os ensaios a tração direta, tanto para UHPC-1% quanto para UHPC-2%. Os resultados gráficos e numéricos das regressões computacionais para ambos os modelos, separados por autor, são minuciosamente detalhados nos Apêndices (A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O e P).

Os modelos I e II apresentaram um bom resultado para os ensaios tanto para o UHPC-1%, erros residuais de 13,30 MPa para o Modelo I e de 12,45MPa para o Modelo II, como para UHPC-2%, erros residuais de 12,75 MPa para o modelo I e de 11,88MPa para o Modelo II. As principais diferenças observadas encontram-se principalmente após a fase elástica. O Modelo II indica um fim da fase elástica-linear mais precoce, assim como um pico de tensão menor e mais deslocado para a esquerda. Já o modelo I apesar de superestimar a tensão máxima possui um comportamento interessante nos pós pico principalmente aproximando-se do limite de deformação ε_f .

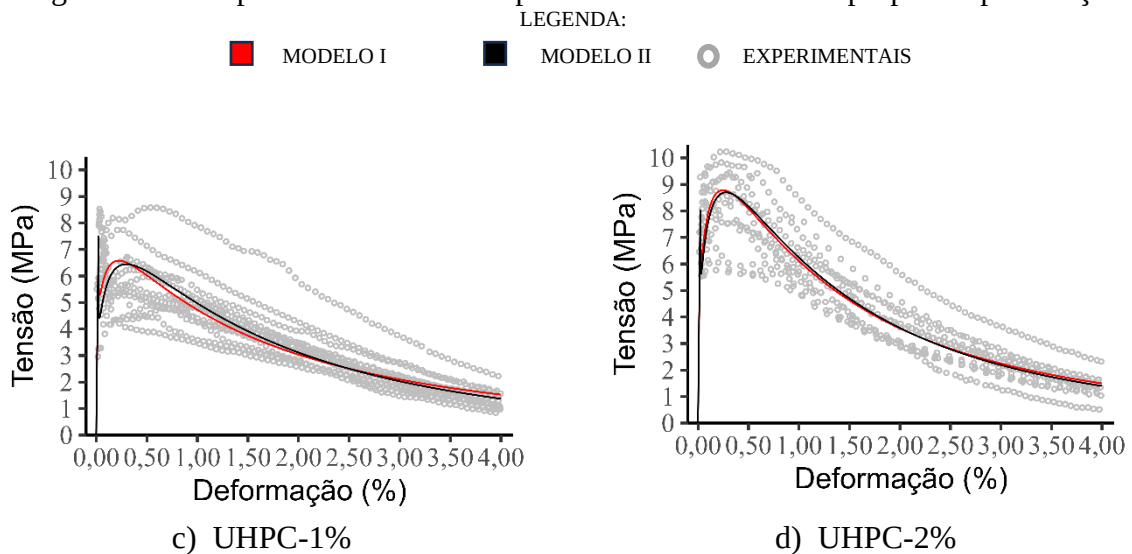
Nos ensaios de tração, ambos os modelos apresentaram uma correspondência substancial com os resultados experimentais, reproduzindo padrões de amolecimento por deformação (*strain softening*) para o UHPC-1% e também de endurecimento por deformação (*hardening-softening*) para o UHPC-2%. Os erros residuais para o Modelo I foram de 0,87 MPa em ambas as porcentagens de fibras, enquanto para o Modelo II, os erros foram de 0,88 MPa para UHPC-1% e UHPC-2%.

Figura 31 - Comparativo dos dados experimentais e os modelos propostos para compressão.



FONTE: De autoria própria

Figura 32 - Comparativo dos dados experimentais e os modelos propostos para tração



FONTE: De autoria própria

5.12. Proposição de parâmetros para o Modelos I e II

Os parâmetros propostos são derivados das regressões realizadas nos dados compilados provenientes dos três autores, abrangendo assim a totalidade das amostragens coletadas. Através do desenvolvimento do instrumental analítico, foram estabelecidas as equações e seus respectivos parâmetros para os modelos associados sintetizados na Tabela 10.

Tabela 10 – Parâmetros para os modelos de acordo com o tipo e porcentagem de adição de fibras no UHPC

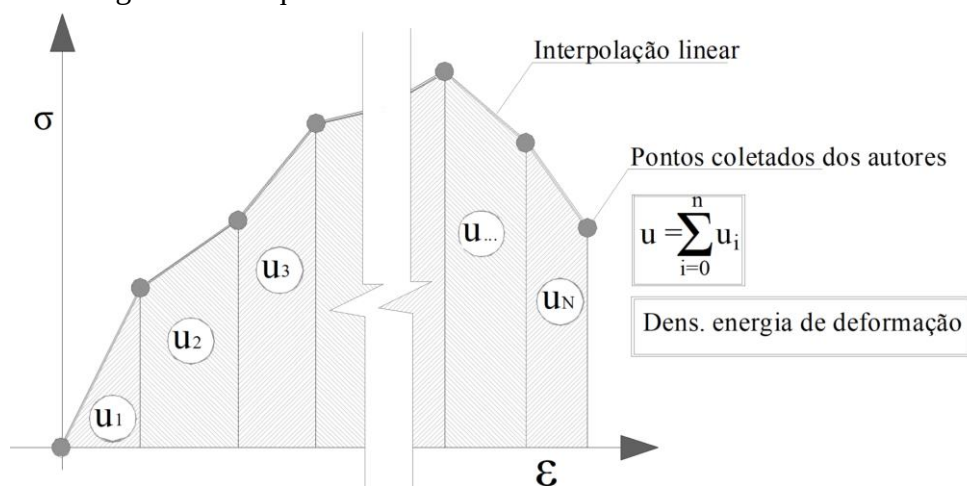
MODELO I					MODELO II				
COMPRESSÃO		TRAÇÃO			COMPRESSÃO		TRAÇÃO		
	UHPC-1%	UHPC-2%	UHPC-1%	UHPC-2%		UHPC-1%	UHPC-2%	UHPC-1%	UHPC-2%
ϵ_{p1}	0,000018%	0,000068%	0,003519%	0,014060%	ϵ_{p2}	0,168200%	0,195700%	0,014000%	0,024240%
η_1	0,19	0,20	0,29	0,35	η_2	1,30	1,30	0,34	0,38
κ	121,50	72,39	2,25	1,41	r	- 128,80	- 117,60	0,67	0,27
ϵ_{01}	0,364%	0,357%	0,0114%*	0,023%*	ϵ_{02}	0,338%	0,329%	0,0114%*	0,023%*
E	41.290	44.030	33.177*	35.685*	E	42.480	45.320	33.177*	35.685*
* Dados adotados de acordo com o proposto na metodologia capítulo II									

* Dados adotados de acordo com o proposto na metodologia capítulo II

FONTE: De autoria própria

Foi desenvolvido um algoritmo com o propósito de realizar o cálculo aproximado da densidade de energia de deformação (u). Para isso, foi empregada a interpolação linear entre pontos por meio da função 'approx()' no ambiente de programação R. O cálculo da área foi efetuado pela soma das áreas dos quadriláteros formados pelos segmentos de reta resultantes da interpolação, proporcionando, assim, uma estimativa precisa da densidade de energia de deformação, conforme ilustrado na Figura 33. Adicionalmente, através de métodos numéricos, foi possível obter a área sob a curva dos modelos utilizando o comando “integrate()” também no R.

Figura 33 - Esquema do cálculo das áreas dos ensaios coletados



FONTE: De autoria própria

Ambos os modelos apresentaram resultados altamente concordantes com os dados experimentais, exibindo diferenças em relação às médias inferiores aos desvios médios dos três ensaios, com exceção da compressão no UHPC-1%, onde os desvios dos modelos foram pequenos, porém superiores aos desvios médios dos ensaios. Observou-se um aumento significativo na densidade de energia com o incremento do volume de fibras. Apesar de uma

pequena disparidade, o MODELO II demonstrou desempenho inferior ao MODELO I para uma adição de fibras de 1%, enquanto apresentou resultados superiores quando o valor foi elevado para 2%. Esses dados estão detalhados na

Tabela 11.

Os dois modelos apresentaram densidades de energia muito semelhantes entre si, especialmente nas condições de compressão de 2% e tração de 1% e 2%. No entanto, observou-se uma discrepância maior na compressão de 1%. Essa disparidade pode ser atribuída à menor influência das fibras em condições de compressão com uma proporção de 1% de fibras.

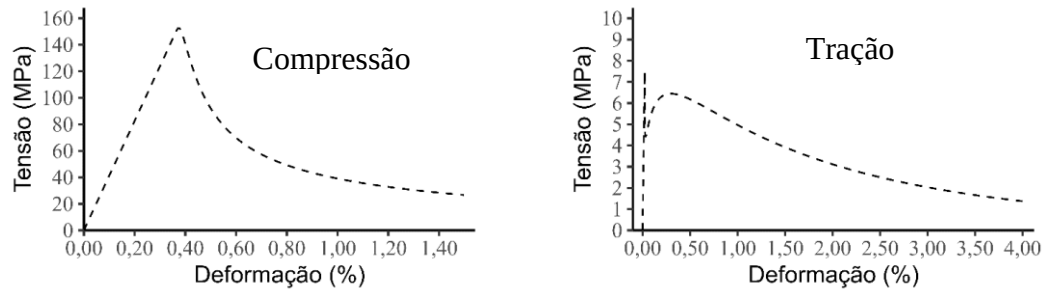
Tabela 11 – Valores da densidade de energia de deformação.

	Compressão		Tração	
	UHPC-1%	UHPC-2%	UHPC-1%	UHPC-2%
	u (MJ/m ³)			
Krahl (2018)	0,87889	1,08228	0,15449	0,17254
Oliveira (2019)	0,88062	1,03377	0,07236	0,11192
Ribeiro (2022)	0,87888	1,88113	0,18010	0,21585
MÉDIA SIMPLES (Krahl, Oliveira, Ribeiro)	0,87946	1,33239	0,13565	0,16677
MODELO I	0,88327	1,05702	0,13874	0,16958
MODELO II	0,88532	1,06082	0,13937	0,16929
Desvio médio (Krahl,Oliveira e Ribeiro)	0,00077	0,36582	0,04219	0,03657
Desvio (MODELO I ,Média)	0,00381	0,27537	0,00310	0,00281
Desvio (MODELO II, Média)	0,00585	0,27158	0,00372	0,00252

Fonte: o autor

Na **Erro! Fonte de referência não encontrada.** e Tabela 13, referentes aos esforços de compressão e tração do UHPC-1%, e UHPC-2%, respectivamente (Modelo I), são apresentadas as equações, parâmetros e dados gerados por meio das análises dos conjuntos compilados. Os resultados englobam deformações limites, tensões máximas, equações de tensão pós-fissuração e módulo de elasticidade e a densidade de energia de deformação (u) dada pela área sob a curva do gráfico tensão por deformação. Já nas Tabela 14 e Tabela 15, os mesmos dados são apresentados, contudo, referentes ao Modelo II.

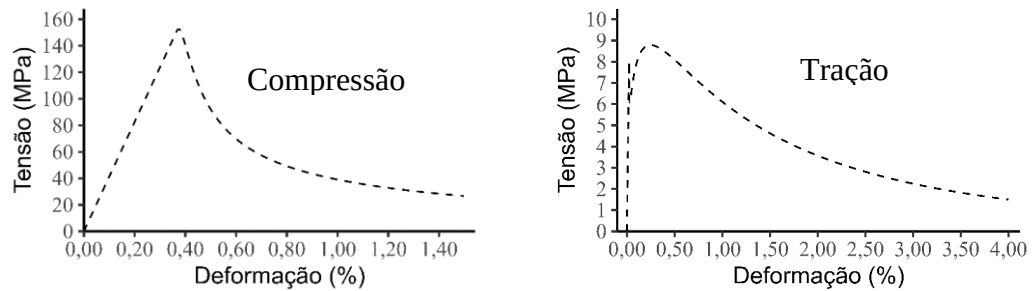
Tabela 12 - Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-1% (MODELO I)



MODELO I – UHPC-1%

Esforço	Compressão	Tração
	$0 < \varepsilon < 0,364\%$	$0 < \varepsilon < 0,023\%$
Regime elástico $\varepsilon < \varepsilon_0$	$\sigma_{eng}(\varepsilon) = \varepsilon \cdot E$	$\sigma_{eng}(\varepsilon) = \varepsilon \cdot E$
Regime plástico $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_f$	$0,364\% < \varepsilon < 1,4\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon - 0,364\%}{0,000018\%} \right)^{0,19}} \right)^{121,50} \right]$	$0,357\% < \varepsilon < 4,0\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon - 0,023\%}{0,003519\%} \right)^{0,29}} \right)^{2,25} \right]$
E	41.290 MPa	33.177 MPa
$\sigma_{m\acute{a}x}$	152 MPa	7,5 MPa
σ_{pc}	-	6,6 MPa
u	0,8832725 MJ/m ³	0,13874 MJ/m ³

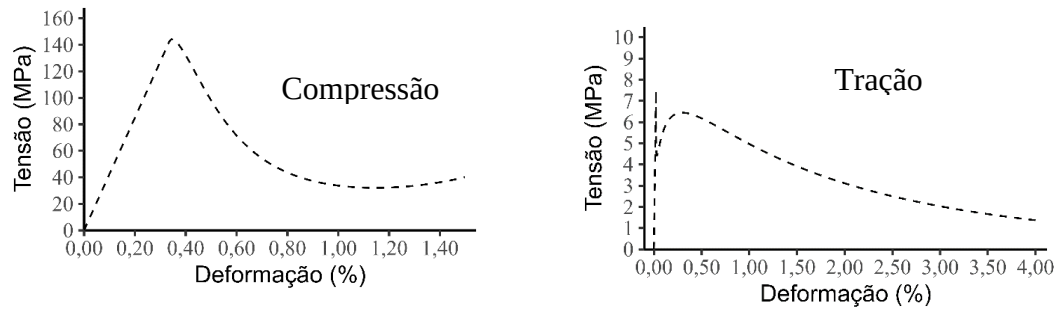
Tabela 13 - Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-2% (MODELO I)



MODELO I – UHPC-2%

Esforço	Compressão	Tração
	$0 < \varepsilon < 0,357\%$	$0 < \varepsilon < 0,023\%$
Regime elástico $\varepsilon < \varepsilon_0$	$\sigma_{eng}(\varepsilon) = \varepsilon \cdot E$	$\sigma_{eng}(\varepsilon) = \varepsilon \cdot E$
Regime plástico $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_f$	$0,357\% < \varepsilon < 1,4\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon - 0,357\%}{0,000068\%} \right)^{0,20}} \right)^{72,39} \right]$	$0,357\% < \varepsilon < 4,0\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot \left[1 - \left(1 - e^{-\left(\frac{\varepsilon - 0,023\%}{0,014060\%} \right)^{0,35}} \right)^{1,41} \right]$
E	44.030 MPa	35.685 MPa
$\sigma_{m\acute{a}x}$	160 MPa	8,8 MPa
σ_{pc}	-	8,8 MPa
u	1,05702 MJ/m ³	0,16958 MJ/m ³

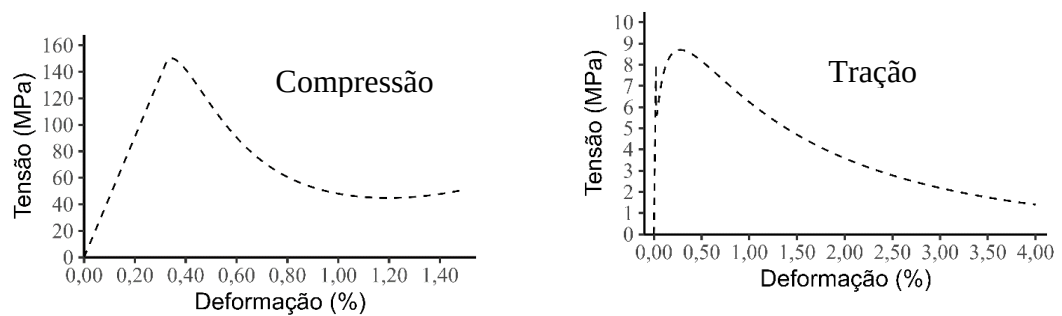
Tabela 14 - Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-1% (MODELO II)



MODELO II – UHPC-1%

Esforço	Compressão	Tração
Regime elástico $\varepsilon < \varepsilon_0$	$0 < \varepsilon < 0,338\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E$	$0 < \varepsilon < 0,023\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E$
Regime plástico $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_f$	$0,338\% < \varepsilon < 1,4\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot e^{-\left[\left(\frac{\varepsilon - 0,338\%}{0,168200\%}\right)^{1,30} \cdot e^{(-128,80 \cdot \varepsilon)}\right]}$	$0,338\% < \varepsilon < 4,0\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot e^{-\left[\left(\frac{\varepsilon - 0,023\%}{0,014000\%}\right)^{0,34} \cdot e^{(0,67 \cdot \varepsilon)}\right]}$
E	42.280 MPa	33.177 MPa
$\sigma_{m\acute{a}x}$	144 MPa	7,5 MPa
σ_{pc}	-	6,4 MPa
u	0,88532 MJ/m ³	0,13937 MJ/m ³

Tabela 15 - Resultado da equação com parâmetros a compressão e tração para UHPC-2% (MODELO II)



MODELO II – UHPC-2%

Esforço	Compressão	Tração
Regime elástico $\varepsilon < \varepsilon_0$	$0 < \varepsilon < 0,329\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E$	$0 < \varepsilon < 0,023\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E$
Regime plástico $\varepsilon_0 < \varepsilon < \varepsilon_f$	$0,338\% < \varepsilon < 4,0\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot e^{-\left[\left(\frac{\varepsilon - 0,329\%}{0,195700\%}\right)^{1,30} \cdot e^{(-117,60 \cdot \varepsilon)}\right]}$	$0,338\% < \varepsilon < 4,0\%$ $\sigma_{eng} = \varepsilon \cdot E \cdot e^{-\left[\left(\frac{\varepsilon - 0,023\%}{0,014000\%}\right)^{0,38} \cdot e^{(0,27 \cdot \varepsilon)}\right]}$
E	45.320 MPa	35.685 MPa
$\sigma_{m\acute{a}x}$	150 MPa	8,7 MPa
σ_{pc}	-	8,7 MPa
u	1,06082 MJ/m ³	0,16929 MJ/m ³

Os valores dos resultados de tensão última ($\sigma_{\text{máx}}$), tensão pós-fissuração “ σ_{pc} ”, módulo de elasticidade “E” divulgado por cada um dos autores, assim como a média simples dos resultados dos três são apresentados na Tabela 16. Também são expostos para comparação os resultados obtidos através da regressão dos dois modelos propostos.

Tabela 16 - Valores de tensão última “ $\sigma_{\text{máx}}$ ”, tensão pós-fissuração “ σ_{pc} ”, módulo de elasticidade “E” para compressão e tração

	Compressão				Tração	
	UHPC-1%		UHPC-2%		UHPC-1%	UHPC-2%
	$\sigma_{\text{máx}}$ (MPa)	E (MPa)	$\sigma_{\text{máx}}$ (MPa)	E (MPa)	σ_{pc} (MPa)	σ_{pc} (MPa)
Krahl (2018)	145,2	40.700	150,5	43.400	6,10	7,20
Oliveira (2019)	135,5	44.806	145,7	46.222	7,40	8,30
Ribeiro (2022)	142,7	43.530	163,4	47.300	8,75	9,41
MÉDIA SIMPLES (Krahl, Oliveira, Ribeiro)	141,1	43.012	153,2	45.641	7,42	8,3
MODELO I	152	41.290	160,0	44.030	6,60	8,8
MODELO II	144	42.280	150,0	45.320	6,60	8,7
Desvio médio (Krahl,Oliveira e Ribeiro)	3,8	1.541	6,8	1.494	0,89	0,74
Desvio (MODELO I ,Média)	10,9	1.722,0	6,8	1.610,7	0,8	0,5
Desvio (MODELO II, Média)	2,9	732,0	3,2	320,7	0,8	0,4

FONTE: De autoria própria

Na análise de compressão, verificou-se que o MODELO I apresentou tensões superestimadas em comparação com as medições realizadas pelos três autores para o UHPC-1%. Contudo, para o UHPC-2%, as tensões foram inferiores, apenas aos ensaios realizados por RIBEIRO. No tocante ao módulo de elasticidade, o MODELO I revelou valores superiores apenas quando comparado ao grupo de ensaios conduzidos por KRAHL, tanto para UHPC-1% quanto para UHPC-2%.

No caso do MODELO II, nas análises de compressão, as tensões últimas foram inferiores aos valores obtidos nos ensaios realizados por KRAHL para UHPC-1%, e menores do que as medições de RIBEIRO para UHPC-2%. Relativamente ao módulo de elasticidade, o MODELO II apresentou valores inferiores aos resultados de OLIVEIRA e RIBEIRO.

Quanto às tensões pós-fissuração, as comparações entre ambos os modelos foram semelhantes, apresentando valores superiores apenas em relação aos ensaios realizados por KRAHL para UHPC-1% e inferiores em comparação com o grupo de ensaios de RIBEIRO para UHPC-2%.

Os desvios médios dos três autores e a diferença entre a média e os resultados para ambos os modelos fornecem parâmetros sólidos para comparação. O MODELO I apresentou um desvio maior em relação à média do que o cálculo do desvio médio entre os valores fornecidos pelos autores. Em resumo, o Modelo I está mais distante do valor médio do que a diferença média entre os próprios ensaios. Por outro lado, o MODELO II revelou-se mais promissor e satisfatório nesse quesito, uma vez que seu desvio em relação à média é menor do que o desvio encontrado entre os três grupos de ensaios.

Esses resultados indicam que o MODELO II provavelmente seja uma opção com maior precisão, menor desvio e maior acurácia em representar os valores críticos de tensão para os dados coletados UHPC na faixa de adição de 1% e 2% de fibras metálicas.

CONCLUSÕES

No estudo, foram introduzidos dois modelos constitutivos analíticos generalizados, fundamentados na degradação probabilística de áreas. Estes modelos, resultantes de um embasamento matemático e teórico, visam descrever o comportamento de materiais elasto-plásticos sob esforços. Obtendo sucesso, eles demonstraram eficácia na análise dos comportamentos tensão por deformação para UHPC com 1% e 2% de adição de fibras, tanto em tração direta quanto em compressão.

Em síntese, as análises e comparações revelaram uma notável heterogeneidade nos comportamentos dos materiais, destacando variações significativas nos parâmetros dos modelos, mesmo sob condições, ensaios e composições semelhantes. Os modelos propostos são representativos para os ensaios de compressão e tração direta nos materiais UHPC-1% e UHPC-2%, consolidando-se como uma opção versátil e eficaz de análise.

O programa de regressão não linear, em sua fase inicial, alcançou com sucesso a realização de regressões obtendo erros residuais menores que 15 MPa para os ensaios de compressão e menores que 1 MPa para os ensaios de tração. Além disso, convergiu para os 16 grupos analisados, resultando na obtenção de parâmetros nos modelos tanto para ensaios de compressão quanto para tração direta.

Apesar da volatilidade observada nos comportamentos, os modelos constitutivos eficientemente convergiram, atingindo com sucesso a representação das curvas dentro dos limites estabelecidos. As equações proporcionaram previsões satisfatórias para o UHPC-1% e UHPC-2%, destacando-se como alternativas sólidas na caracterização do material em análises não lineares de curvas de tensão por deformação, tanto em tração quanto compressão.

Alguns pontos dignos de nota incluem a versatilidade dos modelos, capazes de representar tanto o comportamento à compressão quanto à tração (*strain softening e strain hardening*) usando um mesmo grupo de equações. Apesar da intrínseca heterogeneidade nas amostras de UHPC, os erros residuais relativos mantiveram-se consistentemente abaixo de 10% na compressão e 15% na tração.

Vale destacar que, exceto pela regressão nos dados de compressão de Ribeiro (2022), ambos modelos tiveram menor erro residual nas regressões do UHPC-2% em comparação ao UHPC-1%, sugerindo provavelmente uma maior homogeneidade nas distribuições de fibras e assim uma menor variabilidade no comportamento dos corpos de prova.

Na comparação entre os dois modelos, não foram identificadas diferenças significativas em relação aos erros relativos de um modelo para o outro. No entanto o equacionamento do Modelo II mostrou-se mais estável e significativo especialmente nos ensaios de compressão, evidenciados pelo teste de hipótese do p-valor. Além disso, o MODELO II provavelmente seja uma opção com maior precisão, menor desvio e maior acurácia em representar os valores críticos de tensão para os dados analisados.

Em última análise, fundamentados nas teorias subjacentes, os parâmetros desses modelos proporcionam uma rica variedade de informações, respaldadas por interpretações estatísticas, que contribuem significativamente para avaliações comparativas de materiais e diagnósticos no desenvolvimento do UHPC.

SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Com objetivo de investigar e aprimorar os modelos constitutivos são apresentadas as seguintes propostas para trabalhos futuros:

- Investigação experimental de espécimes de UHPC com uma maior variedade de adição de fibras no UHPC para uma melhor correlação e avaliação do efeito na adição de fibras e os parâmetros propostos.
- Implementação em modelos numéricos de ensaios a tração e compressão dos modelos constitutivos para validação e interpretação dos modelos e seus parâmetros.
- Aplicação, validação e verificação dos modelos e da regressão para outros tipos de esforços como torção e cisalhamento.
- Aplicação, validação e verificação dos modelos e da regressão para outros tipos de materiais com comportamento diferentes como aço, polímeros e fibras naturais.
- Analisar como os parâmetros do modelo se relacionam com os diferentes processos físicos e mecânicos que ocorrem dentro do material UHPC, como a interação entre as fibras de reforço e a matriz cimentícia, a distribuição de porosidade, a formação de microfissuras, entre outros fenômenos relevantes.

REFERÊNCIAS

- ABERNETHY, R. B. **The new Weibull handbook : Reliability & statistical analysis for predicting life, safety, risk, support costs, failures, and forecasting warranty claims, substantiation and accelerated testing, using Weibull, Log normal, crow-AMSAA, probit, and Kaplan-Meier models.** 50o ed. North Palm Beach: Robert B.Abernethy, 2006.
- ABRISHAMBAF, A.; PIMENTEL, M.; NUNES, S. **A meso-mechanical model to simulate the tensile behaviour of ultra-high performance fibre-reinforced cementitious composites.** *Composite Structures*, v. 222, p. 110911, 2019. Elsevier Ltd. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822319300881>>.
- AFGC. **Documents scientifiques et techniques Bétons fibrés à ultra-hautes performances Ultra High Performance Fibre-Reinforced Concretes Recommendations.** França: Association Française de Génie Civil, 2013.
- AKHNOUKH, A. K.; BUCKHALTER, C. **Ultra-high-performance concrete: Constituents, mechanical properties, applications and current challenges.** *Case Studies in Construction Materials*, v. 15, p. e00559, 2021. Elsevier Ltd. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214509521000747>>.
- ALSOMIRI, M.; LIU, Z.; ABADEL, A. A.; LI, M. **Revision and development of material models of ultra-high performance concrete containing coarse aggregate and applications in structural-level flexural response predictions.** *Structures*, v. 51, p. 332–350, 2023. Elsevier Ltd.
- BASTIEN-MASSE, M.; DENARIÉ, E.; BRÜHWILER, E. **Effect of fiber orientation on the in-plane tensile response of UHPFRC reinforcement layers.** *Cement and Concrete Composites*, v. 67, p. 111–125, 2016. Elsevier Ltd.
- BISWAS, R. K.; BIN AHMED, F.; HAQUE, MD. E.; et al. **Effects of Steel Fiber Percentage and Aspect Ratios on Fresh and Harden Properties of Ultra-High Performance Fiber Reinforced Concrete.** *Applied Mechanics*, v. 2, n. 3, p. 501–515, 2021. MDPI AG. Disponível em: <<https://www.mdpi.com/2673-3161/2/3/28>>.
- CARREIRA, D. J.; CHU, K.-H. **Stress-Strain Relationship for Plain Concrete in Compression.** *ACI Journal*, v. 82, n. 6, p. 797–804, 1985.
- CHKHEIWER, A. H.; KADIM, J. A. **Factors effecting on the compressive and tensile strength of reactive powder concrete made with local materials.** *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, v. 584, n. 1, p. 012002, 2019. Institute of Physics Publishing. Disponível em: <<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1757-899X/584/1/012002>>.
- DENG, F.; DING, X.; CHI, Y.; XU, L.; WANG, L. **The pull-out behavior of straight and hooked-end steel fiber from hybrid fiber reinforced cementitious composite: Experimental study and analytical modelling.** *Composite Structures*, v. 206, p. 693–712, 2018. Elsevier Ltd. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0263822318321354>>.

EZEELDIN, S.; BALAGURU, P. N. **Normal and High Strength Fiber Reinforced Concrete under Compression**. Journal of Materials in Civil Engineering, v. 4, p. 415–429, 1992.

GRAYBEAL, B. **Design and Construction of Field-Cast UHPC Connections**. FHWA , v. FHWA-HRT-14-084, n. HRDI-40, 202-493-3122, 2014. Disponível em: <<https://www.fhwa.dot.gov/publications/research/infrastructure/structures/14084/14084.pdf>>. Acesso em: 27/3/2023.

HUANG, Y.; WANG, J.; WEI, Q.; SHANG, H.; LIU, X. **Creep behaviour of ultra-high-performance concrete (UHPC): A review**. Journal of Building Engineering, v. 69, p. 106187, 2023. Elsevier BV. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2352710223003662>>.

KANG, S.-T.; KIM, J.-K. **Investigation on the flexural behavior of UHPCC considering the effect of fiber orientation distribution**. Construction and Building Materials, v. 28, n. 1, p. 57–65, 2012. Disponível em: <<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0950061811003576>>.

KRAHL, P. A. **Lateral stability of ultra-high performance fiber-reinforced concrete beams with emphasis in transitory phases**, 2018. Tese (Doutorado), University of São Paulo Engineering school of São Carlos, São Carlos, 2018.

KRAHL, P. A.; DE MIRANDA SALEME GIDRÃO, G.; NETO, R. B.; CARRAZEDO, R. **Effect of curing age on pullout behavior of aligned and inclined steel fibers embedded in UHPFRC**. Construction and Building Materials, v. 266, 2021. Elsevier Ltd.

LAI, C. D.; XIE, M.; MURTHY, D. N. P. **A modified Weibull distribution**. IEEE Transactions on Reliability, v. 52, n. 1, p. 33–37, 2003.

DE LARRARD, F.; SEDRAN, T. **Otimization of Ultra-High-Performance Concrete by the use of packing model**. Cement and Concrete Research, v. 24, n. 6, p. 997–1009, 1994.

LEE, S.-C.; CHO, J.-Y.; VECCHIO, F. J. **Diverse Embedment Model for Steel Fiber-Reinforced Concrete in Tension: Model Development**. ACI Materials Journal, v. 108, n. 5, 2011.

MAYA DUQUE, L. F.; GRAYBEAL, B. **Fiber orientation distribution and tensile mechanical response in UHPFRC**. Materials and Structures, v. 50, n. 1, p. 55, 2017. Kluwer Academic Publishers. Disponível em: <<http://link.springer.com/10.1617/s11527-016-0914-5>>.

MUDHOLKAR, G. S.; KUMAR, S. **Exponentiated Weibull Family for Analyzing Bathtub Failure-Rate Data**. 1993.

OLIVEIRA, C. E O. **Estudo numérico e experimental da distribuição das fibras de aço em vigas UHPFRC**, 2019. Tese (Doutorado), São Carlos: Universidade de São Paulo, São Carlos, 2019.

RIBEIRO, P. DE O. **Contributions to a constitutive model for Ultra-High Performance Fiber-Reinforced Concrete**, 2022. Tese. (Doutorado), São Carlos: University of São Paulo, São Carlos, 2022.

RINNE, H. **The Weibull Distribution A Handbook**. Nova York: Taylor & Francis Group, 2009.

ROHATGI, A. **WebPlotDigitizer**. , 2022. Pacifica. Disponível em:
<<https://automeris.io/WebPlotDigitizer>>. Acesso em: 30/1/2024.

SHEHAB EL-DIN, H. K.; MOHAMED, H. A.; ABD EL-HAKKHATER, M.; AHMED, S. **Effect of Steel Fibers on Behavior of Ultra High Performance Concrete**. 2016.

SHEN, X.; BRÜHWILER, E. **Influence of local fiber distribution on tensile behavior of strain hardening UHPFRC using NDT and DIC**. Cement and Concrete Research, v. 132, p. 106042, 2020. Elsevier Ltd. Disponível em:
<<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0008884619315030>>.

TAYEH, B. A.; AKEED, M. H. .; QAIDI, S.; BAKAR, B. H. A. **Ultra-high-performance concrete: Impacts of steel fibre shape and content on flowability, compressive strength and modulus of rupture**. Case Studies in Construction Materials, v. 17, p. e01615, 2022. Elsevier Ltd. Disponível em:
<<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2214509522007471>>.

VANDERLEI, R. D. **Análise experimental do concreto de pós reativos: dosagem e propriedades mecânicas**, 2004. Tese (Doutorado), São Carlos: Universidade de São Paulo, São Carlos, 2004.

WEIBULL, W. **Statistical Theory of the strength of materials**. Royal Swedish Institute for Engineering Research, 1939.

WEIBULL, W.; STOCKHOLM, S. **A Statistical Distribution Function of Wide Applicability**. ASME Journal of Applied Mechanics, Transactions of the American Society Of Mechanical Engineers, p. 293–297, 1951.

WILLE, K.; EL-TAWIL, S.; NAAMAN, A. E. **Properties of strain hardening ultra high performance fiber reinforced concrete (UHP-FRC) under direct tensile loading**. Cement and Concrete Composites, v. 48, p. 53–66, 2014. Disponível em:
<<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0958946514000055>>.

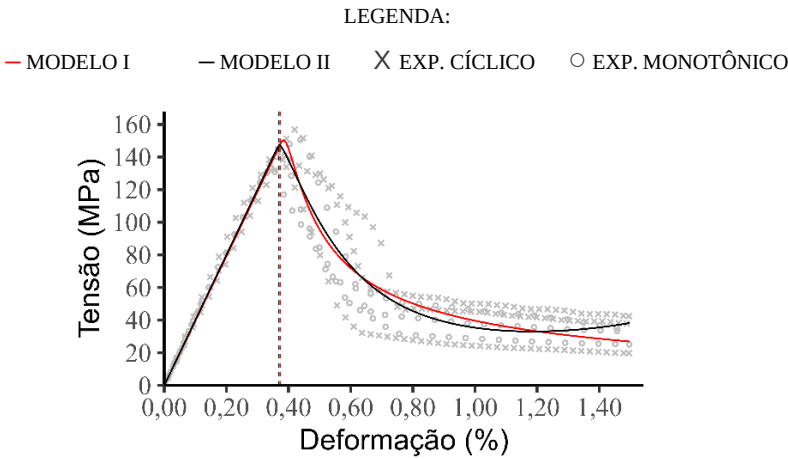
YANG, J.; CHEN, B.; WU, X.; XU, G. **Quantitative analysis of steel fibers on UHPFRC uniaxial tensile behavior using X-CT and UTT**. Construction and Building Materials, v. 368, p. 130349, 2023. Elsevier BV. Disponível em:
<<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0950061823000600>>.

YOO, D. Y.; BANTHIA, N. **Mechanical properties of ultra-high-performance fiber-reinforced concrete: A review**. Cement and Concrete Composites, v. 73, p. 267–280, 2016. Elsevier Ltd. Disponível em:
<<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S095894651630422X>>.

ZHOU, Z.; QIAO, P. **Tensile behavior of ultra-high performance concrete: Analytical model and experimental validation.** Construction and Building Materials, v. 201, p. 842–851, 2019. Elsevier Ltd. Disponível em:
<<https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S095006181833126X>>.

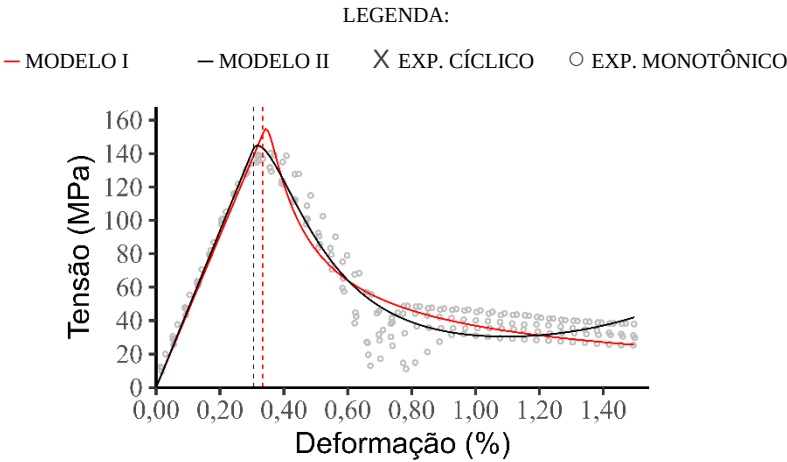
APÊNDICES

APÊNDICE A - Resultados da regressão Compressão 1% de KRAHL (2018)



MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
KRAHL 1%	ϵ_{p1}	2,346E-07	2,343E-06	0,10	9,000E-01
	η_1	1,90E-01	1,239E-01	1,54	1,250E-01
	κ	1,119E+02	5,031E+02	0,22	8,240E-01
	ϵ_{01}	3,733E-03	2,319E-04	16,09 <	2,000E-16
	E	3,959E+04	6,692E+02	59,17 <	2,000E-16
					13,66
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
KRAHL 1%	ϵ_{p2}	1,597E-03	8,303E-05	19,23 <	2,000E-16
	η_2	1,139E+00	1,099E-01	10,37 <	2,000E-16
	r	-1,078E+02	1,674E+01	-6,44	4,720E-10
	ϵ_{02}	3,693E-03	1,083E-04	34,09 <	2,000E-16
	E	4,002E+04	6,559E+02	61,01 <	2,000E-16
					13,24

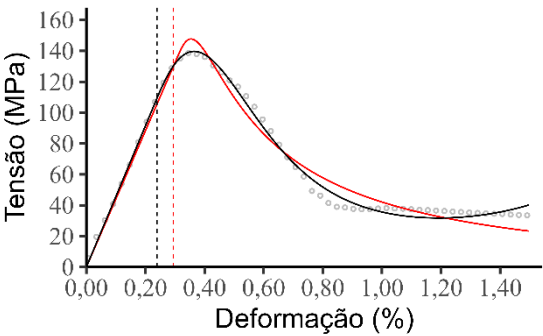
APÊNDICE B - Resultados da regressão Compressão 1% de OLIVEIRA (2019)



MODELO I							
OLIVEIRA 1%	Estimativa		Erro Padrão	t valor		p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
	εp1	9,679E-08	1,056E-06	0,092		9,270E-01	11,79
	η1	1,809E-01	1,196E-01	1,51		1,320E-01	
	κ	1,544E+02	7,516E+02	0,21		8,370E-01	
	ε01	3,338E-03	2,206E-04	15,14	<	2,000E-16	
	E	4,543E+04	8,924E+02	50,91	<	2,000E-16	
	MODELO II						
	Estimativa		Erro Padrão	t valor		p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
	εp2	1,633E-03	8,151E-05	20,04	<	2,000E-16	10,25
η2	1,361E+00	1,104E-01	12,32	<	2,000E-16		
-							
r	1,401E+00	1,455E+01	-9,63	<	2,000E-16		
ε02	3,053E-03	1,194E-04	25,58	<	2,000E-16		
E	4,692E+04	9,205E+02	50,98	<	2,000E-16		

APÊNDICE C - Resultados da regressão Compressão 1% RIBEIRO (2022)

LEGENDA:
— MODELO I — MODELO II X EXP. CÍCLICO ○ EXP. MONOTÔNICO

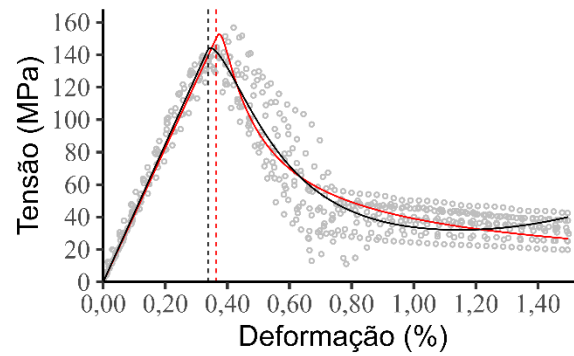


MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
RIBEIRO 1%	ϵ_{p1}	1,538E-06	1,922E-05	0,08	9,365E-01
	η_1	2,396E-01	2,335E-01	1,03	3,100E-01
	κ	1,882E+02	1,491E+03	0,13	9,000E-01
	ϵ_{01}	2,937E-03	8,379E-04	3,51	9,870E-04
	E	4,417E+04	1,165E+03	37,91 <	2,000E-16
					7,451
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
RIBEIRO 1%	ϵ_{p2}	2,468E-03	1,257E-04	19,63 <	2,000E-16
	η_2	2,178E+00	2,109E-01	10,33	6,870E-14
	r	-1,991E+02	1,953E+01	-10,19	1,060E-13
	ϵ_{02}	2,394E-03	2,435E-04	9,83	3,520E-13
	E	4,576E+04	8,008E+02	57,15 <	2,000E-16
					3,785

APÊNDICE D - Resultados da regressão da compressão 1% RIBEIRO (2022), KRAHL (2018), OLIVEIRA (2019)

LEGENDA:

— MODELO I — MODELO II X EXP. CÍCLICO ○ EXP. MONOTÔNICO



COMPILADO 1%

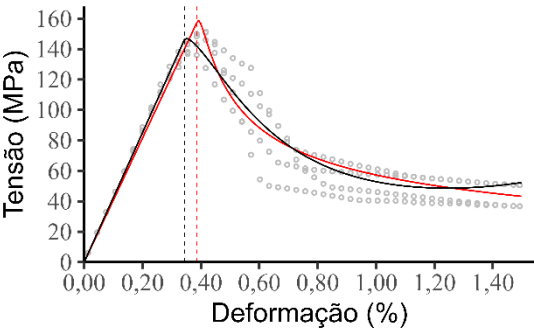
MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ε_{p1}	1,780E-07	1,361E-06	0,131	8,960E-01	13,2
η_1	1,871E-01	9,079E-02	2,06	3,980E-02	
κ	1,215E+02	4,172E+02	0,29	7,710E-01	
ε_{01}	3,636E-03	1,749E-04	20,79 <	2,000E-16	
E	4,129E+04	4,991E+02	82,73 <	2,000E-16	
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ε_{p2}	1,682E-03	6,003E-05	28,01 <	2,000E-16	12,45
η_2	1,300E+00	8,331E-02	15,61 <	2,000E-16	
r	-1,288E+02	1,157E+01	-11,14 <	2,000E-16	
ε_{02}	3,380E-03	8,670E-05	38,98 <	2,000E-16	
E	4,248E+04	5,449E+02	77,96 <	2,000E-16	

COMPILADO 1%

APÊNDICE E - - Resultados da regressão Compressão 2% de KRAHL (2018)

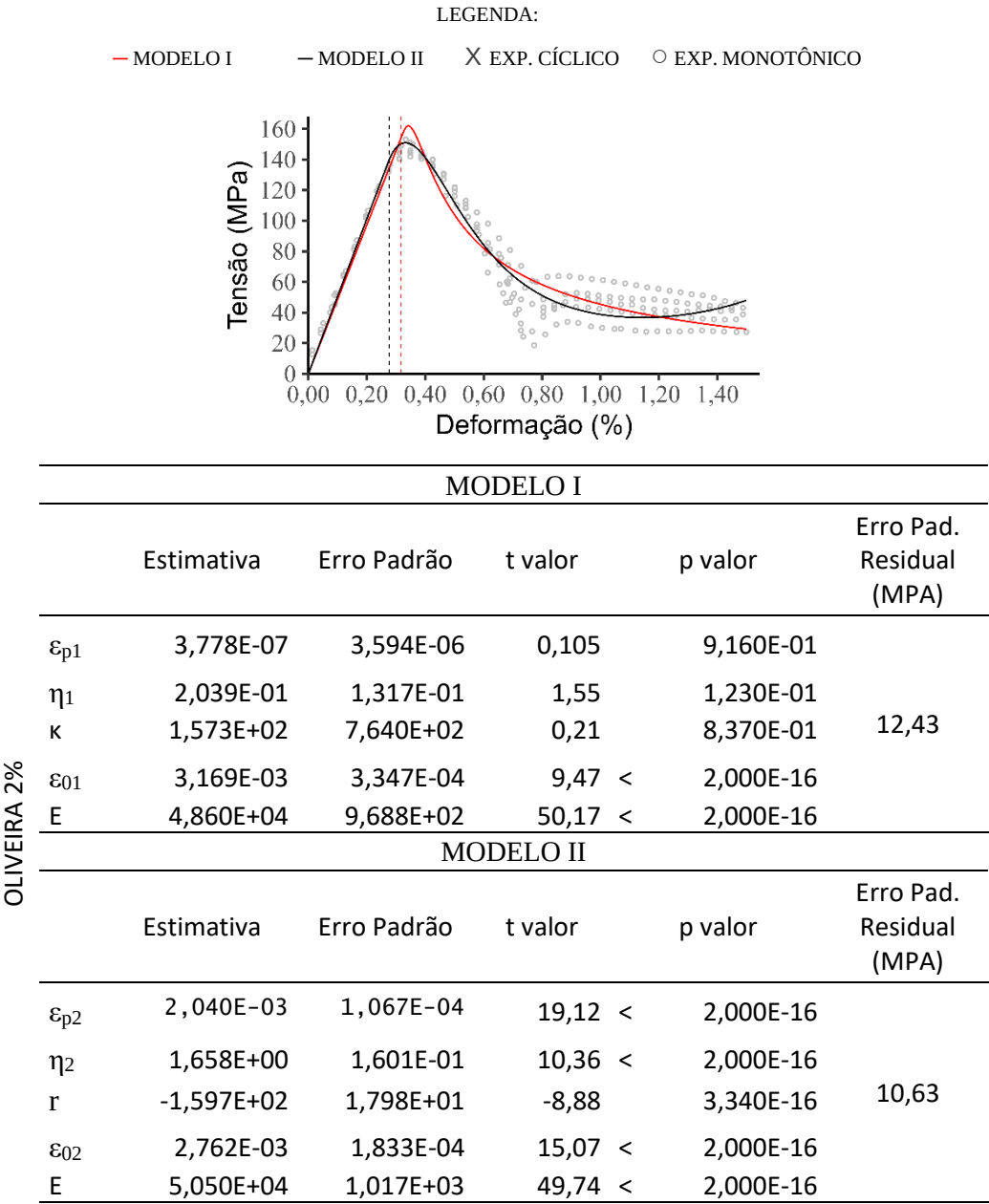
LEGENDA:

— MODELO I — MODELO II X EXP. CÍCLICO ○ EXP. MONOTÔNICO



MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
KRAHL 2%	ϵ_{p1}	1,921E-06	1,232E-05	0,16	8,762E-01
	η_1	2,098E-01	1,043E-01	2,01	4,510E-02
	κ	3,468E+01	9,624E+01	0,36	7,189E-01
	ϵ_{01}	3,867E-03	1,965E-04	19,68 <	2,000E-16
	E	4,078E+04	5,172E+02	78,84 <	2,000E-16
					11,54
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
KRAHL 2%	ϵ_{p2}	2,045E-03	6,125E-05	33,39 <	2,000E-16
	η_2	1,179E+00	7,824E-02	15,07 <	2,000E-16
	r	-9,735E+01	1,072E+01	-9,08 <	2,000E-16
	ϵ_{02}	3,445E-03	9,364E-05	36,79 <	2,000E-16
	E	4,256E+04	6,440E+02	66,09 <	2,000E-16
					11,03

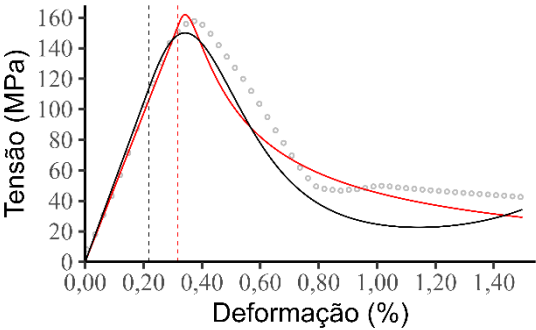
APÊNDICE F - Resultados da regressão Compressão 2% de OLIVEIRA (2021)



APÊNDICE G - Resultados da regressão Compressão 2% de RIBEIRO (2022)

LEGENDA:

— MODELO I — MODELO II X EXP. CÍCLICO ○ EXP. MONOTÔNICO

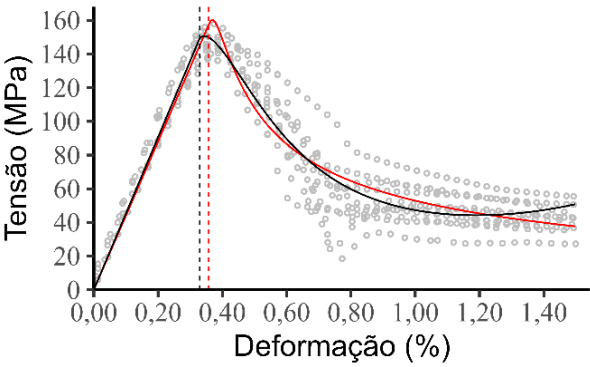


MODELO I						
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)	
RIBEIRO 2%	ε_{p1}	6,169E-07	7,106E-06	0,087	9,310E-01	8,249
	η_1	2,092E-01	1,707E-01	1,23	2,260E-01	
	κ	1,203E+02	7,027E+02	0,17	8,650E-01	
	ε_{01}	3,447E-03	4,289E-04	8,04	1,690E-10	
	E	4,775E+04	1,110E+03	43,02 <	2,000E-16	
	MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)	
RIBEIRO 2%	ε_{p2}	2,111E-03	9,390E-05	22,49 <	2,000E-16	4,849
	η_2	1,668E+00	1,423E-01	11,72	7,930E-16	
	-	-	-	-	-	
	r	1,598E+02	1,595E+01	10,02	1,890E-13	
	ε_{02}	3,023E-03	1,655E-04	18,27 <	2,000E-16	
	E	4,931E+04	8,213E+02	60,04 <	2,000E-16	

APÊNDICE H - Resultados da regressão Compressão 2% de KRAHL (2018), OLIVEIRA (2021), RIBEIRO (2022)

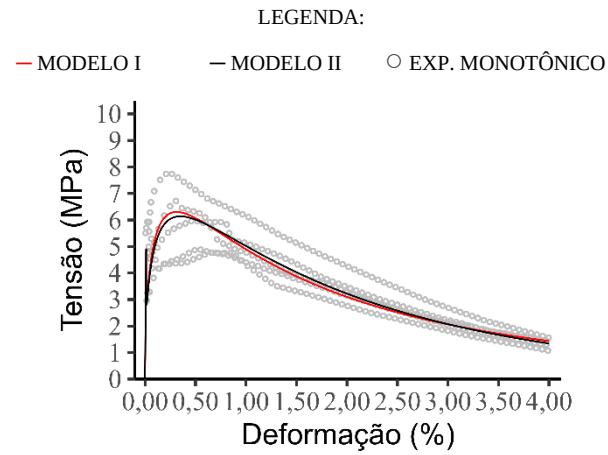
LEGENDA:

— MODELO I — MODELO II X EXP. CÍCLICO ○ EXP. MONOTÔNICO



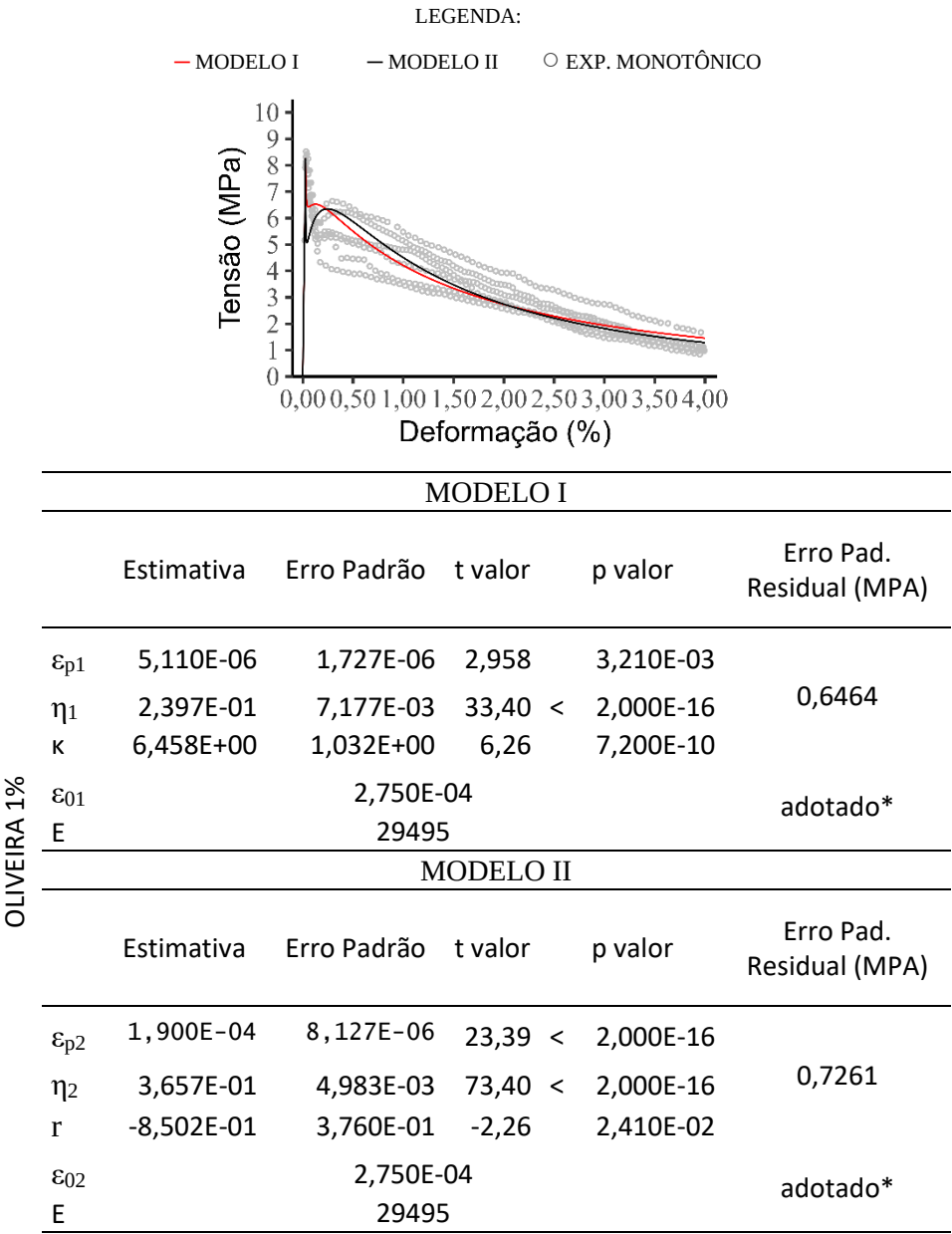
MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
TOTAL 2%	ϵ_{p1}	6,786E-07	3,650E-06	0,186	8,526E-01
	η_1	2,017E-01	7,679E-02	2,63	8,850E-03
	κ	7,239E+01	1,772E+02	0,41	6,831E-01
					12,75
	ϵ_{01}	3,571E-03	1,607E-04	22,22 <	2,000E-16
	E	4,403E+04	4,907E+02	89,74 <	2,000E-16
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
TOTAL 2%	ϵ_{p2}	1,957E-03	5,579E-05	35,08 <	2,000E-16
	η_2	1,302E+00	7,497E-02	17,37 <	2,000E-16
	r	-			
					11,88
	ϵ_{02}	1,176E+02	9,686E+00	-12,14 <	2,000E-16
	E	3,292E-03	8,702E-05	37,83 <	2,000E-16
		4,532E+04	5,321E+02	85,18 <	2,000E-16

APÊNDICE I - Resultados da regressão Tração 1% de KRAHL (2018)



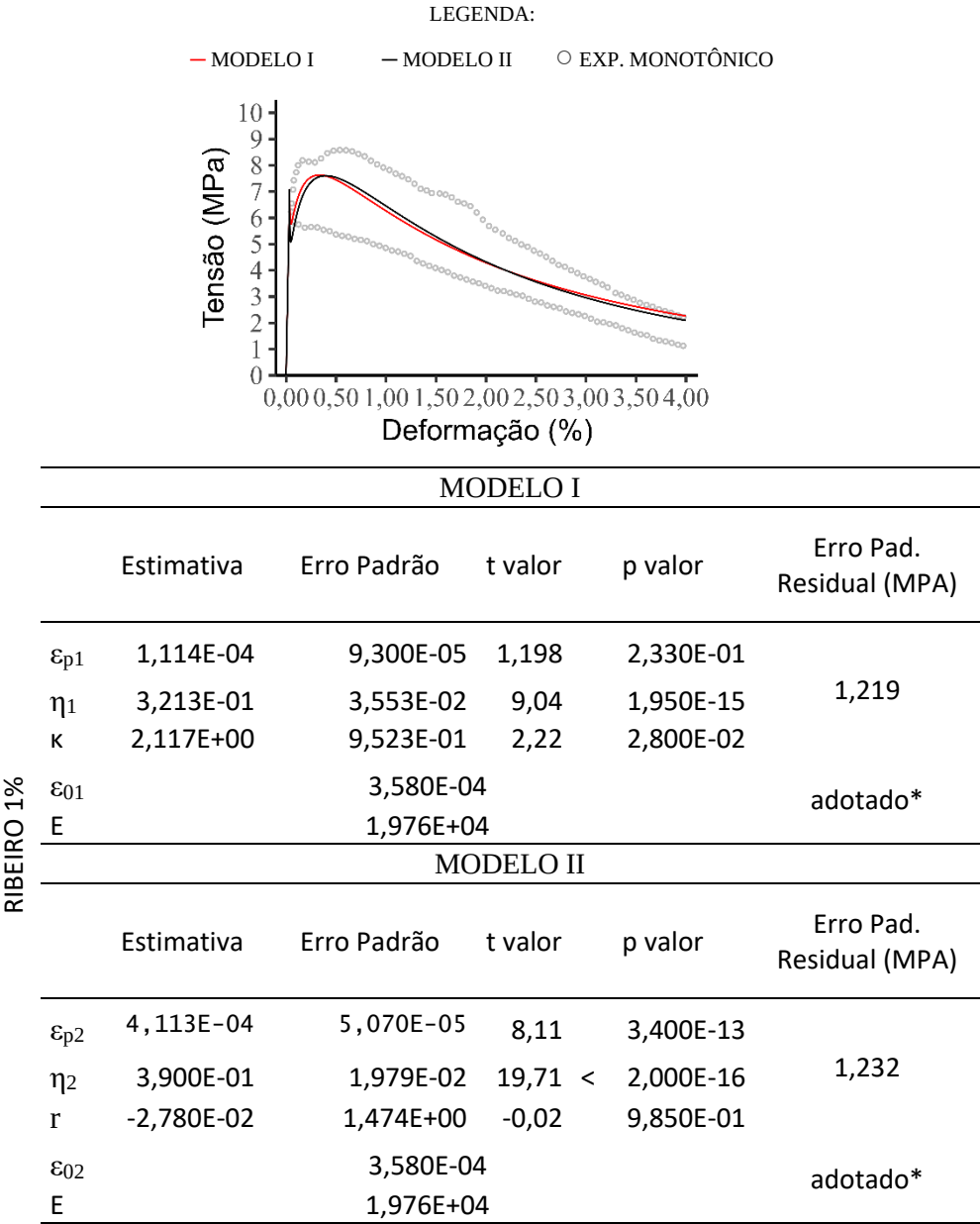
MODELO I							
KRAHL 1%	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPA)		
	ε_{p1}	1,817E-04	4,151E-05	4,38	1,460E-05	0,6185	
	η_1	3,531E-01	1,166E-02	30,30	< 2,000E-16		
	κ	7,483E-01	1,017E-01	7,36	7,670E-13		
	ε_{01}	1,140E-04				adotado*	
	E	42963					
	MODELO II						
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPA)		
	ε_{p2}	8,065E-05	5,146E-06	15,67	< 2,000E-16	0,5938	
	η_2	3,022E-01	4,692E-03	64,41	< 2,000E-16		
r	2,018E+00	3,146E-01	6,42	3,200E-10			
ε_{02}	1,140E-04				adotado*		
E	42963						

APÊNDICE J - Resultados da regressão Tração 1% de OLIVEIRA (2021)

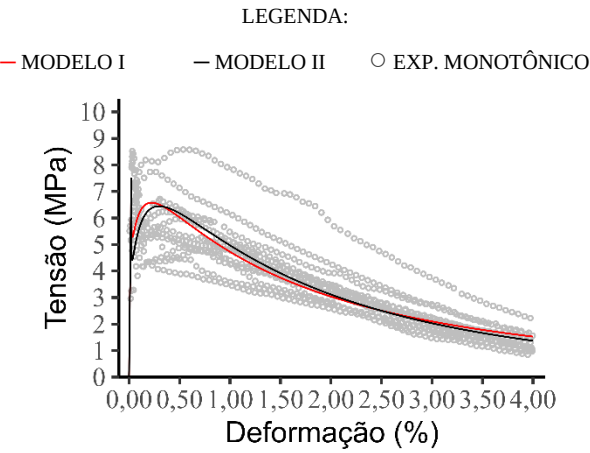


OLIVEIRA 1%

APÊNDICE K - Resultados da regressão Tração 1% de RIBEIRO (2022)



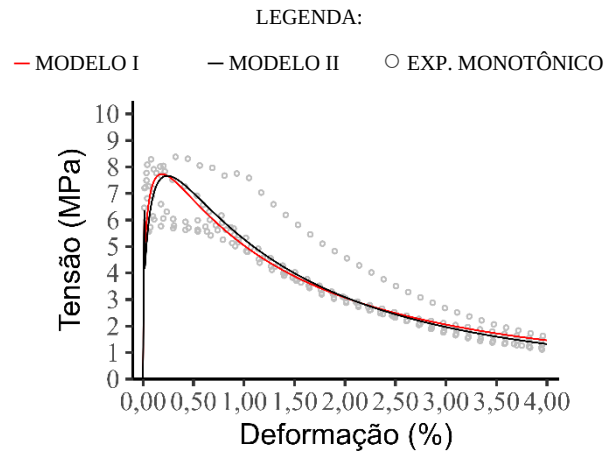
APÊNDICE L - Resultados da regressão Tração 1% de KRAHL (2018), OLIVEIRA (2021), RIBEIRO (2022)



COMPIRADOS 1%

MODELO I						
	Estimativa	Erro Padrão	t valor		p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ϵ_{p1}	3,519E-05	8,343E-06	4,219		2,630E-05	0,8654
η_1	2,880E-01	7,670E-03	37,55 <		2,000E-16	
κ	2,245E+00	2,770E-01	8,11		1,220E-15	
ϵ_{01}		2,258E-04				adotado*
E		3,318E+04				
MODELO II						
	Estimativa	Erro Padrão	t valor		p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ϵ_{p2}	1,400E-04	5,981E-06	23,40 <		2,000E-16	0,8772
η_2	3,365E-01	4,114E-03	81,80 <		2,000E-16	
r	6,701E-01	2,969E-01	2,26		2,420E-02	
ϵ_{02}		2,258E-04				adotado*
E		3,318E+04				

APÊNDICE M - Resultado da regressão Tração 2% de KRAHL (2018).

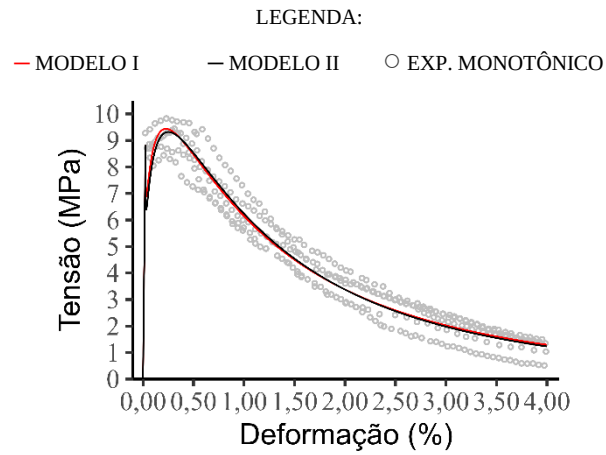


KRAHL 2%

MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPA)
ε_{p1}	1,869E-05	7,194E-06	2,60	9,890E-03	0,7152
η_1	2,751E-01	1,109E-02	24,80	< 2,000E-16	
κ	2,704E+00	5,358E-01	5,05	8,330E-07	
ε_{01}		1,240E-04			adotado*
E		5,115E+04			
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPA)
ε_{p2}	1,146E-04	7,243E-06	15,82	< 2,000E-16	0,7491
η_2	3,414E-01	5,973E-03	57,16	< 2,000E-16	
r	-9,918E-02	4,482E-01	-0,22	8,250E-01	
ε_{02}		1,240E-04			adotado*
E		5,115E+04			

KRAHL 2%

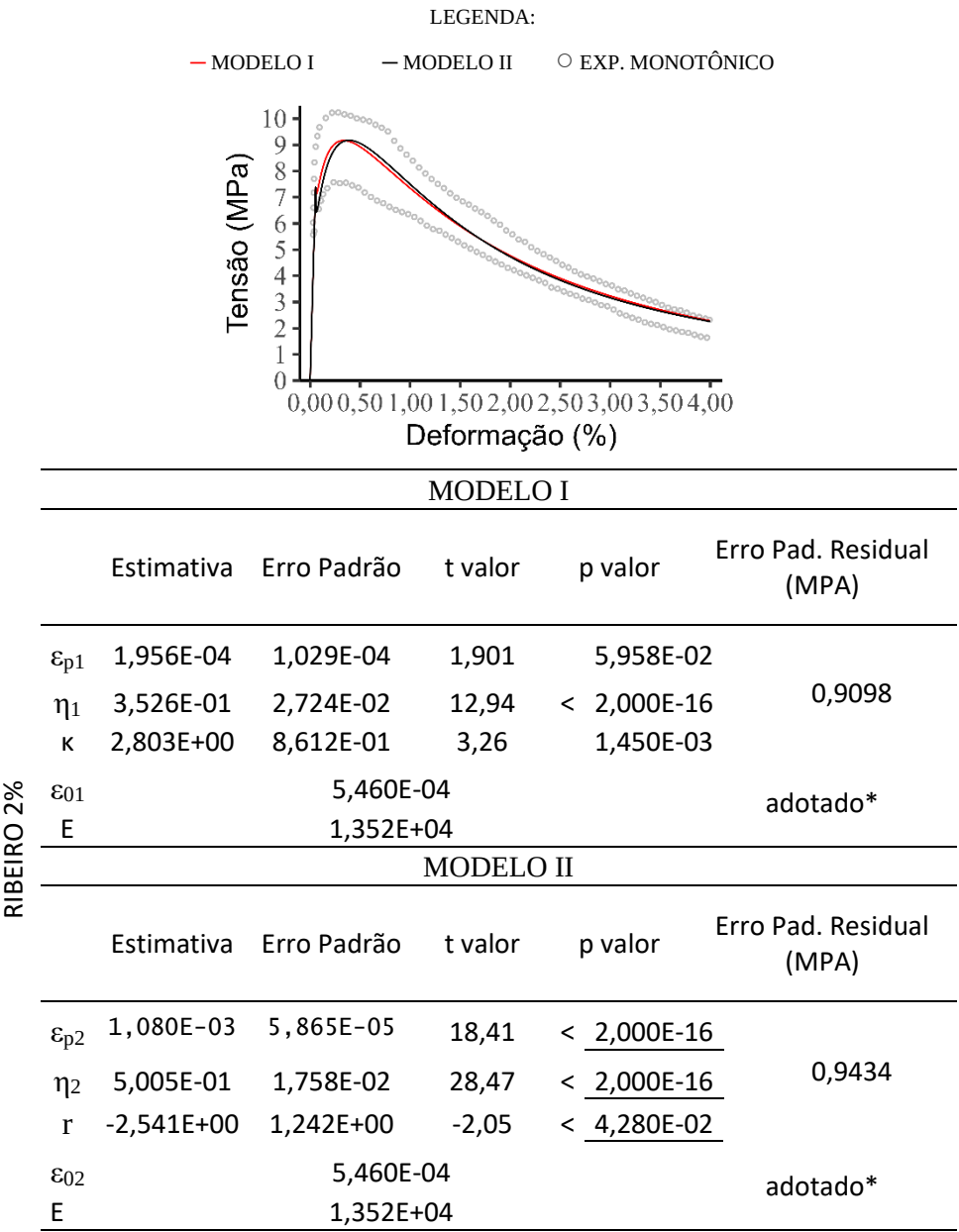
APÊNDICE N - Resultado da regressão Tração 2% de OLIVEIRA (2021)



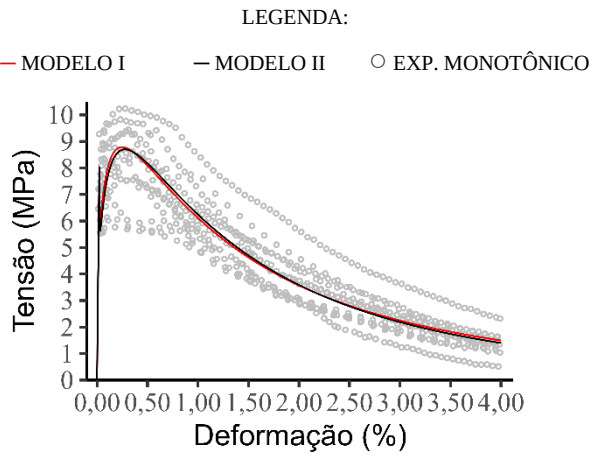
OLIVEIRA 2%

MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ϵ_{p1}	1,723E-04	2,855E-05	6,035	3,640E-09	0,5368
η_1	3,661E-01	9,062E-03	40,40 <	2,000E-16	
κ	1,271E+00	1,305E-01	9,73 <	2,000E-16	
ϵ_{01}		2,430E-04			adotado*
E		3,622E+04			
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ϵ_{p2}	2,472E-04	7,605E-06	32,50 <	2,000E-16	0,5401
η_2	3,854E-01	4,195E-03	91,88 <	2,000E-16	
r	2,084E-01	3,293E-01	0,63	5,270E-01	
ϵ_{02}		2,430E-04			adotado*
E		3,623E+04			

APÊNDICE O - Resultado da regressão Tração 2% de RIBEIRO (2022)



APÊNDICE P - Resultados da regressão Tração 2% de KRAHL (2018), OLIVEIRA (2021), RIBEIRO (2022)



TOTAL 2%

MODELO I					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ϵ_{p1}	1,406E-04	2,559E-05	5,495	5,250E-08	0,8745
η_1	3,498E-01	9,121E-03	38,35	< 2,000E-16	
κ	1,412E+00	1,512E-01	9,34	< 2,000E-16	
ϵ_{01}		2,258E-04			adotado*
E		3,318E+04			
MODELO II					
	Estimativa	Erro Padrão	t valor	p valor	Erro Pad. Residual (MPa)
ϵ_{p2}	2,424E-04	8,486E-06	28,56	< 2,000E-16	0,8797
η_2	3,774E-01	4,562E-03	82,72	< 2,000E-16	
r	2,659E-01	3,474E-01	0,77	4,440E-01	
ϵ_{02}		2,250E-04			adotado*
E		3,569E+04			

TOTAL 2%