Avaliação de Cálculo I

Acadêmico: Paulo Vinicius M C Menezes

Professor: Pablo Henrique Perondi

(1)

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{5x+3}{x} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{5x+3}{x} = \dfrac{5.2+3}{2} = \dfrac{13}{2}$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{5x+3}{x} = \dfrac{5.2+3}{2} = \dfrac{13}{2}$ $\qquad \lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{13}{2}$

Assim, o limite existe, e é $= \dfrac{13}{2}$

---

b) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x^2-16x+30}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2\cdot(x^2-8x+15)}{(x-3)} = \lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2\cdot\cancel{(x-3)}(x-5)}{\cancel{(x-3)}}$

$= \lim\limits_{x\to 3} 2\cdot(x-5) = \lim\limits_{x\to 3} 2x-10 = -4$

Assim, o limite existe e é igual à -4

---

c) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{16+h}-4}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{16+h}-4}{h} \cdot \dfrac{\sqrt{16+h}+4}{\sqrt{16+h}+4} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(\cancel{16}+h)-\cancel{16}}{h\cdot(\sqrt{16+h}+4)}$

$= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cancel{h}}{\cancel{h}\sqrt{16+h}+4} = \dfrac{1}{\sqrt{16}+4} = \dfrac{1}{8}$

Assim, o limite existe e é igual à $\dfrac{1}{8}$

---

d) $\lim\limits_{t\to 0} \left(\dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t^2+t}\right) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{(t^2+\cancel{t})-\cancel{t}}{t\cdot(t^2+t)} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{t^2}{t^3+t^2} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}\cdot(t+1)}$

$= \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{t+1} = \dfrac{1}{1} = 1$

Assim, o limite existe e é igual à 1

e) $\lim_{x \to -5} \dfrac{5-|x|}{5+x}$

$\begin{cases} |x| = x, & \text{se } x \geq 0 \\ |x| = -x, & \text{se } x < 0 \end{cases}$ como $x \to -5$, $|x| = -x$

Logo, $\lim_{x \to -5} \dfrac{5-|x|}{5+x} = \lim_{x \to -5} \dfrac{5-(-x)}{5+x} = \lim_{x \to -5} \dfrac{\cancel{(5+x)}}{\cancel{(5+x)}} = 1$

Assim, o limite existe e é igual à 1

---

(2)

a) $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{4x^3-7x+3}{5x^3-12x^2+1} = \lim_{x \to -\infty} \dfrac{\cancel{x^3}\left(4 - \frac{7}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\cdot\left(5 - \frac{12}{x} + \frac{1}{x^3}\right)} = \dfrac{4}{5}$

Assim, o limite existe e é igual à $\frac{4}{5}$

---

b) $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{3x}$

utilizando o teorema do confronto, temos que:

$$-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$$

De maneira análoga, temos que

$$-1 \leq \operatorname{sen}(2x) \leq 1$$

Sabendo que $\dfrac{-1}{3x} = 0$, e que $\dfrac{1}{3x} = 0$, podemos utilizar o teorema do confronto para achar a solução desta questão, conforme segue:

$$\frac{-1}{3x} \leq \frac{\operatorname{sen}(2x)}{3x} \leq \frac{1}{3x}$$

Assim, $0 \leq \lim_{x \to \infty} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{3x} \leq 0$

Logo, o limite existe e é igual à 0 (zero).

③ $f(x) = \dfrac{\sqrt{9x^2+8}}{3x-7}$

Assíntota vertical:

$3x - 7 = 0$

$3x = 7$

$\boxed{x = \frac{7}{3}}$

Assíntota horizontal:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+8}}{3x-7} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9x^2+8}}{3x-7} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(\frac{\sqrt{9x^2+8}}{\sqrt{x^2}}\right)}{\left(\frac{3x-7}{x}\right)_{\to+\infty}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{9+\frac{8}{x^2}}^{\to 0}}{3-\frac{7}{x}^{\to 0}} = \frac{\sqrt{9}}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{9x^2+8}}{3x-7} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{9x^2+8}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{3x-7}{x}_{\to-\infty}} = \frac{\sqrt{9}}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

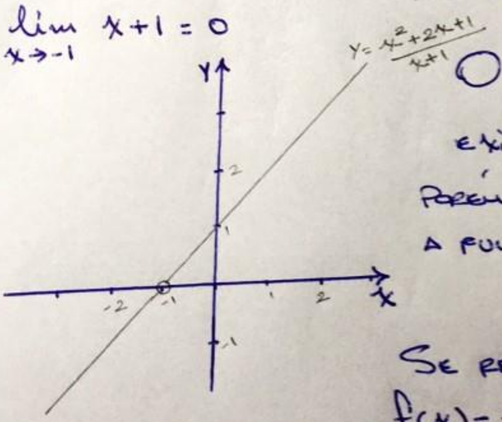
Assim, temos que a função apresenta uma assíntota vertical quando x tende à $\frac{7}{3}$, e duas assíntotas horizontais, sendo estas em -1 e 1, quando x tende ao $-\infty$ e ao ∞, respectivamente.

---

④ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \mid \{-1\}$

$$f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \frac{(x+1)\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}} = x+1$$

$$\lim_{x\to-1} x+1 = 0$$



O limite da função existe, e é igual à 0 (zero), porém $f(-1)$ é indefinido para a função $f(x) = \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}$

Se reescrevermos ela como $f(x) = x+1$, temos que

$f(-1) = 0$

(5) $y = x^3 - 3x + 1$

$$y' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - 3(x+h) + 1 - (x^3 - 3x + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)(x^2 + 2xh + h^2) - \cancel{3x} - 3h + \cancel{1} - x^3 + \cancel{3x} - \cancel{1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^3} + 2x^2h + xh^2 + x^2h + 2xh^2 + h^3 - 3h - \cancel{x^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (3x^2 + 3x\cancel{h} + \cancel{h^2} - 3)}{\cancel{h}}$$

$$\boxed{y' = 3x^2 - 3}$$

Uma vez que sabemos a derivada da função, podemos obter o coeficiente angular da reta tangente no ponto (2,3), como segue

$f'(x) = 3x^2 - 3$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 12 - 3 = 9$

Assim, o coeficiente angular $= m = 9$

Logo, $(x - x_0)m = y - y_0$ (comecei escrever na ordem errada, mas não quis rasurar.)

Reescrevendo, $y - y_0 = m(x - x_0)$

Substituindo m por 9, e plotando os pontos (2,3),

temos que $y - 3 = 9(x - 2)$

Assim, $y = 9x - 18 + 3 = \boxed{9x - 15}$

A equação $y = 9x - 15$ tangencia a curva $y = x^3 - 3x + 1$ no ponto $(x, y) = (2, 3)$.

6

a) $f(x) = 4x^4 + 3x^2 - 100x + \cos(x)$

$f'(x) = 16x^3 + 6x - 100 - \operatorname{sen}(x)$

b) $f(x) = \dfrac{\operatorname{arcsec}(x)}{\log_3(x) + 5^x} =$

$$f'(x) = \frac{(\operatorname{arcsec}(x))' \cdot (\log_3(x) + 5^x) - (\log_3(x) + 5^x)' \cdot \operatorname{arcsec}(x)}{(\log_3(x) + 5^x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\right) \cdot (\log_3(x) + 5^x) - \left(\frac{1}{x \cdot \ln(3)} + 5^x \cdot \ln(5)\right) \cdot (\operatorname{arcsec}(x))}{(\log_3(x) + 5^x)^2}$$

c) $f(x) = \underbrace{\cot(3x+2)}\, e^x$

$\omega(x) = g \circ h$, onde $g(x) = \cot(x)$ e $h(x) = 3x+2$ $\begin{cases} g'(x) = -\csc^2(x) \\ h'(x) = 3 \end{cases}$

Assim, $\omega'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

$\omega'(x) = -\csc^2(3x+2) \cdot 3$

Assim, $f'(x) = (\cot(3x+2))' \cdot e^x + \overset{e^x}{(e^x)'} \cdot (\cot(3x+2))$

$f'(x) = (-3 \cdot \csc^2(3x+2)) \cdot e^x + e^x \cdot (\cot(3x+2))$

Reescrevendo de uma maneira mais elegante, temos que:

$$f'(x) = e^x \cdot \left[\left(-3 \cdot \csc^2(3x+2)\right) + \left(\cot(3x+2)\right)\right]$$

→ em evidência

d) $f(x) = \ln(\tan(x^2+1))$

$F = f \circ g \circ h$, onde $f(x) = \ln(x) \longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \tan(x) \longrightarrow g'(x) = \sec^2(x)$

$h(x) = (x^2+1) \longrightarrow h'(x) = 2x$

$F(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$

Assim, voltando à função original, temos que: $\boxed{f'(x) = \left(\frac{1}{\tan(x^2+1)}\right) \cdot (\sec^2(x^2+1)) \cdot (2x)}$

(7)

a) $x^3+5xy+3y^2=100$

$$\frac{d(x^3+5xy+3y^2)}{dx}=\frac{d(100)}{dx}$$

$$3x^2+((5x)'\cdot y+y'(5x))+(6y\cdot y')=0$$

$$(3x^2+5y)+y'(5x)+y'(6y)=0$$

$$y'\cdot(5x+6y)=-3x^2-5y$$

Assim, temos que por derivação implícita,

$$y'=\frac{-3x^2-5y}{5x+6y}$$

---

b) $\arctan(2y+1)=x\ln(x)$

$$\frac{d(\arctan(2y+1))}{dx}=\frac{d(x\ln(x))}{dx}$$

Aplicando a regra da cadeia no lado esquerdo, temos:

$$=\frac{1}{1+(2y+1)^2}\cdot 2y'=\ln(x)+\frac{1}{x}\cdot x$$

$$=\frac{2y'}{1+(2y+1)^2}=\ln(x)+1=$$

$$=2y'=(\ln(x)+1)(1+(2y+1)^2)$$

Assim, $y'=\dfrac{(\ln(x)+1)(1+(2y+1)^2)}{2}$

---

c) $2x+e^x\sqrt{y}=\sec(y)$

$$\frac{d(2x+e^x\sqrt{y})}{dx}=\frac{d(\sec(y))}{dx}$$

continua...

$$\frac{d(2x+e^x\sqrt{y})}{dx}=\frac{d(\sec(y))}{dx}$$

$$=2+((e^x)'\sqrt{y}+(\sqrt{y})'\cdot e^x)=(\sec(y)\cdot\tan(y))y'$$

$$=2+e^x\cdot\sqrt{y}+e^x\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}\cdot y'=((\sec(y)\cdot\tan(y))y')$$

$$=2+e^x\sqrt{y}=((\sec(y)\tan(y))y')-\frac{e^x}{2\sqrt{y}}\cdot y'$$

$$=y'\cdot\left(\sec(y)\tan(y)-\frac{e^x}{2\sqrt{y}}\right)=2+e^x\sqrt{y}$$

evidência

Assim, temos que:

$$y'=\frac{2+e^x\sqrt{y}}{\left(\sec(y)\tan(y)-\frac{e^x}{2\sqrt{y}}\right)}$$