1º Avaliação / Trabalho da disciplina de Cálculo I

Curso: Estatística

Acadêmico: Paulo Vinicius M C Menezes RA:68090

Professor: Pablo Henrique Perondi

① Determine o domínio das funções abaixo:

a) $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-9}$

$(x^2-9) \neq 0$

$x^2 \neq 9$

$|x| \neq \pm\sqrt{9}$

$x \neq \pm 3$

Solução: O domínio é formado pelos números reais, com exceção de -3 e $+3$.

$S = \text{Domínio} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -3, x \neq +3\}$

b) $g(t) = \sqrt{5t+8}$

$(5t+8) \geq 0$

$5t+8 \geq 0$

$5t \geq -8$

$t \geq \dfrac{-8}{5}$

Solução: O domínio é formado pelos números reais, iguais ou maiores que $-\dfrac{8}{5}$

$S = \text{Domínio} = \{t \mid t \in \mathbb{R}, t \geq -\dfrac{8}{5}\}$

c) $h(x) = \cot(2x)$

$\cot(2x) = \dfrac{1}{\tan(2x)}$

$= (\tan(2x))^{-1} = \dfrac{\cos(2x)}{\text{sen}(2x)}$

$\text{sen}(2x) \neq 0$

$\boxed{x \neq 0, \pm\frac{\pi}{2}, \pm\pi, \ldots}$

$h(0) = \cot(2\cdot 0) = \dfrac{\cos(0)}{\text{sen}(0)} \rightarrow \text{indet}$

$h(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}{\text{sen}(2\cdot\frac{\pi}{2})} \rightarrow \text{sen}(\pi) = \text{sen}(180°) = 0$ indet

Solução: Uma vez que ($\text{sen}(2x)$) precisa ser diferente de zero o domínio da função compreende os números reais, com exceção dos valores que zerem esta expressão no caso $x \neq 0 + n\frac{\pi}{2}$, onde $n \in \mathbb{Z}$.

$S = \text{Domínio} = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq n\cdot\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$

$\dfrac{\cos(0)}{\text{sen}(0)} \rightarrow \text{indet}$

$x \neq n\cdot\frac{\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\}$

$h(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{\cos(2\cdot\frac{\pi}{2})}{\text{sen}(2\cdot\frac{\pi}{2})} \rightarrow \text{sen}(\pi) = \text{sen}(180°) = 0$ indet

② Determine a imagem das funções abaixo:

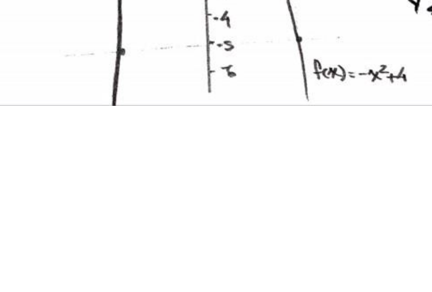
a) $f(x) = -x^2 + 4 \quad = -1x^2 + 0x + 4$

$Y_x = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-0}{-2} = 0$

$f(0) = -0^2 + 4 = 4$

Solução: A imagem da função $f(x)$ são todos os números reais, tais que $Y \leq 4$

$S = \text{Imagem} = \{Y \mid Y \in \mathbb{R}, Y \leq 4\}$



$Y = f(x)$

$Y = -x^2 + 4$

$Y - 4 = -x^2$

$x^2 = -Y + 4$

$|x| = \pm\sqrt{(-Y+4)}$

$f^{-1}(Y) = \pm\sqrt{(-Y+4)}$

$(-Y+4) \geq 0$

$-Y \geq -4$

$Y \leq 4$

b) $g(x) = 2 \cdot sen(x) + 1$

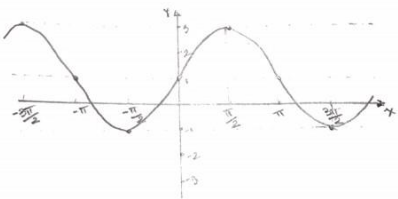
Para $j(x) = sen(x)$, a imagem $= [-1, 1]$

Para $k(x) = sen(x) + 1$, a imagem é deslocada em 1 unidade para cima $= [0, 2]$

Para $g(x) = 2 \cdot sen(x) + 1$, a imagem tem seu intervalo dobrado, e é deslocado 1 unidade para cima em comparação com $j(x) = sen(x)$

Solução: A imagem da função $g(x)$ compreende os números reais no intervalo entre $[-1, 3]$

$S = \{Y \mid Y \in \mathbb{R}, -1 \leq Y \leq 3\}$



c) $h(x) = \log (x+1) - 2$ Solução: Uma vez que o domínio da inversa da

c) $h(x) = \log_3(x+1) - 2$

$Y = f(x)$

$Y = \log_3(x+1) - 2$

$Y + 2 = \log_3(x+1)$

$3^{(Y+2)} = \cancel{3}^{(\log_3(x+1))}$

$3^{(Y+2)} = (x+1)$

$x = 3^{(Y+2)} - 1$

$f^{-1}(Y) = 3^{(Y+2)} - 1$

Domínio de $f^{-1}(Y) = \mathbb{R}$

Solução: Uma vez que o domínio da inversa da função é equivalente à imagem da mesma, e constatando que seu domínio, neste caso, abrange todos os números reais, a imagem da função $h(x)$ é igual à todos os números reais

$S = \{Y \mid Y \in \mathbb{R}\}$

3) Esboce o gráfico das funções abaixo:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 5 & se\ x \leq -2 \\ 2x + 1 & se\ x > -2 \end{cases}$

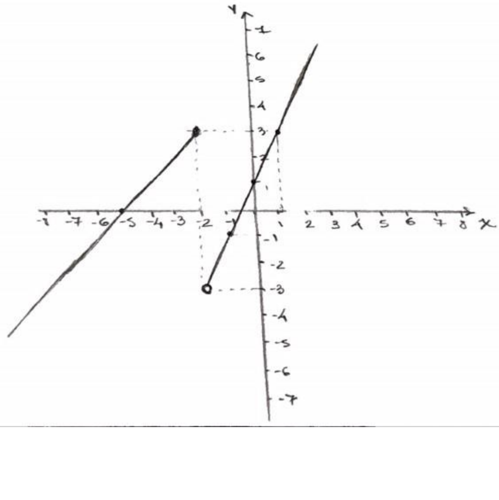
$f(-2) = (-2) + 5 = 3$

$f(-5) = (-5) + 5 = 0$

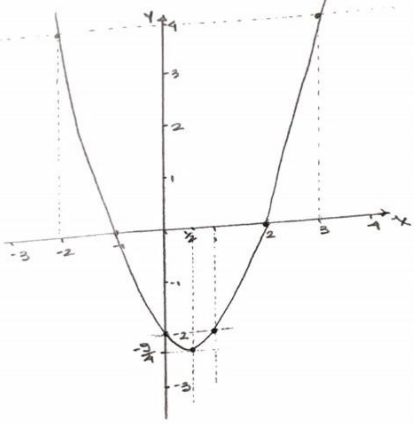
$f(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1$

$f(1) = 2 \cdot (1) + 1 = 3$

$f(0) = 1$



b) $g(x) = x^2 - x - 2$



$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2}$

$g(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} - 2$

$= 0{,}25 - 0{,}5 - 2$

$= -2{,}25 = -\frac{225}{100} = -\frac{9}{4}$

$g(0) = -2$

$g(-1) = (-1)^2 - (-1) - 2$

$= 1 + 1 - 2 = 0$

$g(1) = (1)^2 - (1) - 2$

$= 1 - 1 - 2 = -2$

$g(2) = (2)^2 - (2) - (2) =$

$= 4 - 2 - 2 = 0$

$g(-2) = (-2)^2 - (-2) - 2 =$

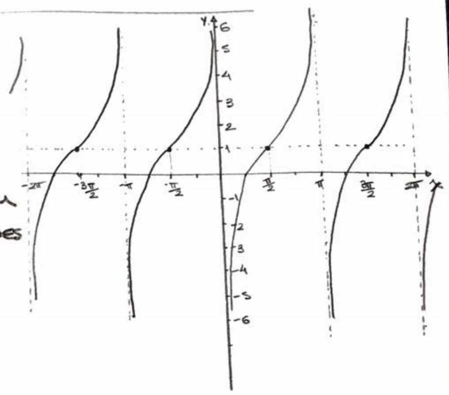
$= 4 + 2 - 2 = 4$

$g(3) = 9 - 3 - 2 = 4$

x	$g(x)$
$\frac{1}{2}$	$-\frac{9}{4}$
0	-2
-1	0
1	-2
2	0

2 | 0 $= 4-2-2=0$ $g(3)=9-3-2=4$

c) $h(x) = \tan(x + \frac{\pi}{2}) + 1$



$h(x) = \frac{\text{sen}(x + \frac{\pi}{2})}{\cos(x + \frac{\pi}{2})} + 1$

Basicamente é o gráfico de $y = \tan(x)$ com 1 unidade deslocada para cima, e $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda:

$h(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\text{sen}(\cancel{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}})^{\,0}}{\cos(\cancel{-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}})^{\,1}} + 1 = 1$

$h(-\frac{\pi}{2}) = 1$

$h(0) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2})} + 1 = \frac{1}{0} + 1 =$ indef $=$ assintota vertical

$h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2})} + 1 =$

$= \frac{\text{sen}(\pi)}{\cos(\pi)} + 1 = \frac{0}{-1} + 1 = 1$

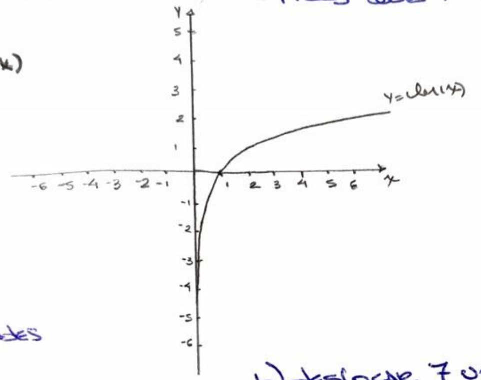
$h(\frac{\pi}{2}) = 1$

$h(\frac{\pi}{4}) = \frac{\text{sen}(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})}{\cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})} + 1 = \frac{\text{sen}(135°)}{\cos(135°)} + 1 = -1 + 1 = 0$

$h(\frac{\pi}{4}) = 0$

4) Comparando com o gráfico de $f(x) = \ln(x)$, escreva as equações correspondentes aos gráficos que resultam ao:

$f(x) = \ln(x)$



a) deslocar 10 unidades para baixo

$Y = \ln(x) - 10$

b) deslocar 7 unidades para direita

$Y = \ln(x - 7)$

c) Refletir em torno do eixo x:

$Y = -\ln(x)$

d) Refletir em torno do eixo Y

$Y = \ln(-x)$

e) Refletir em torno do eixo x e, depois, do eixo Y

$Y = -\ln(-x)$

...ções g e h "mais simples

$Y = -\ln(-x)$

5) Para cada função f abaixo, encontre funções g e h "mais simples que f" tais que $f = g \circ h$, isto é, decomponha a função f.

a) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{x^3} + 1}{\sqrt{x^3} + 8}$

se $f(x) = g \circ h(x)$,

$g(x) = \dfrac{2x + 1}{x + 8}$

$h(x) = \sqrt{x^3}$

$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(\sqrt{x^3}) = \dfrac{2 \cdot (\sqrt{x^3}) + 1}{\sqrt{x^3} + 8} = f(x)$

---

b) $f(x) = \text{sen}^2(x) + 2$

se $f(x) = g \circ h(x)$

$g(x) = (x)^2 + 2$

$h(x) = \text{sen}(x)$

$g \circ h(x) = g(h(x)) = g(\text{sen}(x)) = (\text{sen}(x))^2 + 2 = \text{sen}^2(x) + 2 = f(x)$

⑥ Verifique se as funções abaixo são injetoras e/ou sobrejetoras.

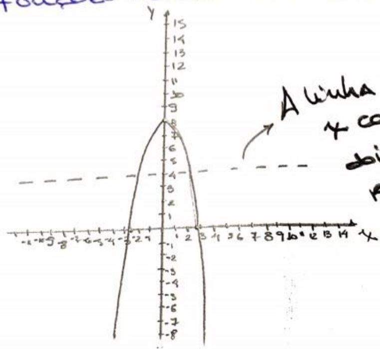
a) $f(x) = 8 - x^2$

$= -x^2 + 8$

Não é injetora, pois há valores de $f(x_1) = f(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$

Exemplo:

$f(-2) = 4 = f(2)$



A linha paralela ao eixo x corta a função em dois pontos, isto é, a função não é injetora

Ainda, uma vez que o contradomínio não foi definido, não é possível saber se $f(x)$ é ou não sobrejetora. Se o seu contra-domínio for igual à sua imagem, isto é, pegando o intervalo $= (-\infty, 8]$, a função poderá ser considerada sobrejetora. Caso o contradomínio seja todos os reais, então $f(x)$ não será considerada sobrejetora.

então f(x) não será considerada sobrejetora

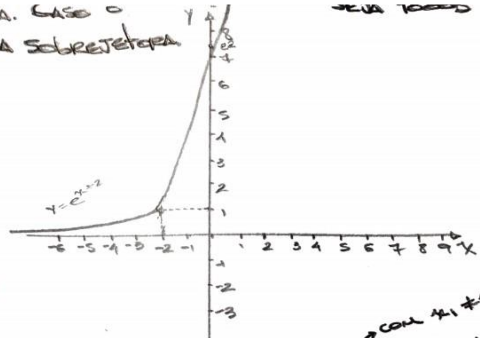
b) $g(x) = e^{x+2}$

$g(0) = e^2 \cong (2{,}71)^2 \cong 7{,}34$

$g(-2) = e^0 = 1$

$g(1) = e^3 \cong (2{,}71)^3 \cong 19{,}9$

$g(-3) = e^{-1} = \frac{1}{e} \cong \frac{1}{2{,}71} \cong 0{,}369$



A função é injetora, pois não há valores de $g(x_1) = g(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$, isto é, não é possível cortar a função no gráfico em mais de um ponto ao mesmo tempo com uma linha horizontal paralela ao eixo x.

Quanto à ser sobrejetora ou não, vai depender do contra-domínio da função: uma vez que a imagem da função envolve o intervalo $(0, +\infty)$, o contradomínio precisa ser igual para a função ser sobrejetora. Caso o contradomínio envolva todos os reais, a função $g(x)$ não será considerada sobrejetora

$h(x) = x^3 + 13$

$Y = x^3 + 13$

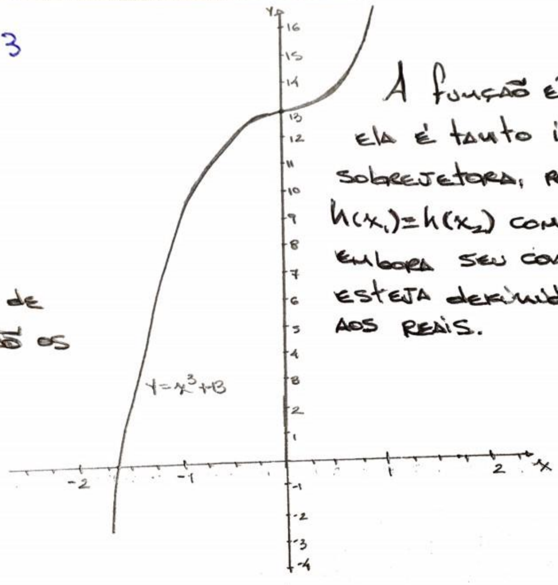
$Y - 13 = x^3$

$x = \sqrt[3]{Y-13}$

$h^{-1}(Y) = \sqrt[3]{Y-13}$

$Dom = \mathbb{R}$

Logo, a imagem de $h(x)$ também são os reais.



A função é bijetora, isto é, ela é tanto injetora quanto sobrejetora, pois não há valores $h(x_1) = h(x_2)$ com $x_1 \neq x_2$. Ainda, embora seu contradomínio não esteja definido, a sua imagem é igual aos reais.

⑦ Encontre a inversa das funções abaixo:

⑦ Encontre a inversa das funções abaixo:

a) $f(x) = 8^{3x+4}$

$Y = 8^{(3x+4)}$

$\log_8(Y) = \log_8(8^{(3x+4)})$

$\log_8(Y) = (3x+4)$

$\log_8(Y) - 4 = 3x$

$x = \dfrac{\log_8(Y) - 4}{3}$

$f^{-1}(Y) = \dfrac{\log_8(Y) - 4}{3}$

A função inversa de $f(x)$ é $= f^{-1}(Y) = \dfrac{\log_8(Y) - 4}{3}$

b) $g(x) = \dfrac{3x+2}{5x-1}$

$Y = \dfrac{3x+2}{5x-1}$

$Y \cdot (5x-1) = 3x+2$

$5xY - Y = 3x + 2$

$-2 - Y = 3x - 5xY$

$-Y - 2 = x \cdot (3 - 5Y)$

$x = \dfrac{-Y-2}{3-5Y}$

$g^{-1}(Y) = \dfrac{-Y-2}{3-5Y}$

A função inversa de $g(x)$ é $= g^{-1}(Y) = \dfrac{-Y-2}{-5Y+3}$

c) $h(x) = \text{ARCTAN}(x+2) - 4$

$Y = \text{ARCTAN}(x+2) - 4$

$Y + 4 = \text{ARCTAN}(x+2)$

$tg(Y+4) = (x+2)$

$x = tg(Y+4) - 2$

$h^{-1}(Y) = \tan(Y+4) - 2$

A função inversa de $h(x)$ é $= h^{-1}(Y) = \tan(Y+4) - 2$