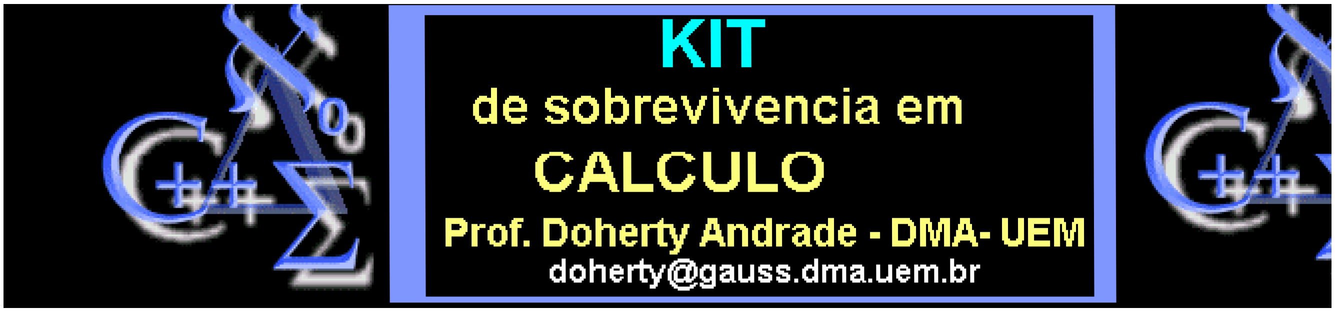


Integral de Linha no espaço -- Teorema de Stokes

O teorema de Stokes relaciona a integral de linha de um campo vetorial sobre uma curva simples fechada C do R^3 a uma integral de superficie.

Teorema (Stokes) : Sejam *F=F(x,y,z)* um campo vetorial de classe C^1 em um aberto *U* e *S* uma superficie suave por partes contida em U. Seja *C* uma curva fechada simples e suave por partes que é o bordo de *S* . Se *N* é a normal superior de *S* e *T* é o vetor tangente unitário de C, então temos

$$\oint_C F \cdot T\, ds = \int\int_S \mathrm{rot} F \cdot N\, d\sigma.$$

Vamos ver alguns exemplos.

```
> restart:with(linalg):
```

```
> vf:=[2*x,2*y,1];
```

Warning, new definition for norm

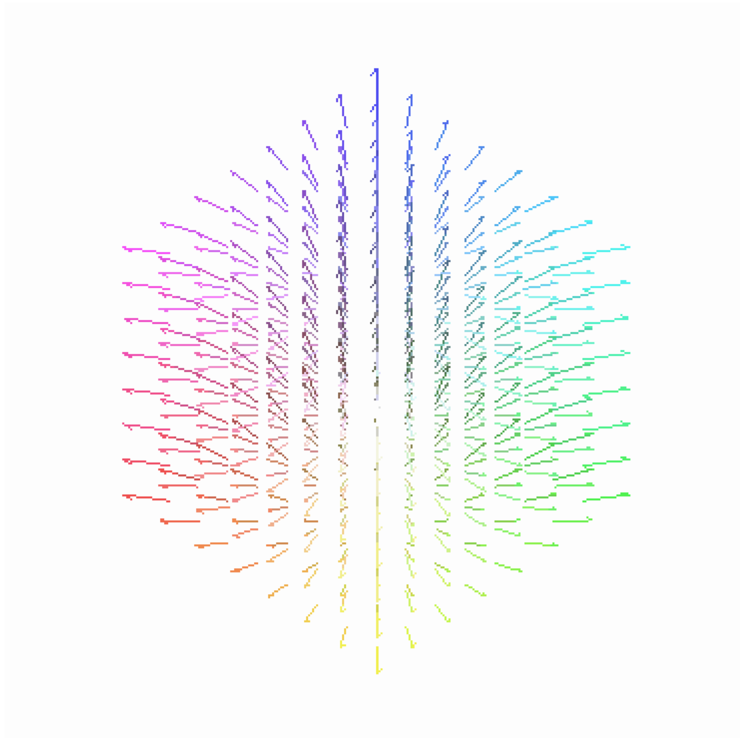
Warning, new definition for trace

$$vf := [2\,x,\, 2\,y,\, 1]$$

Para plotar um campo 3-dimensional, precisamos da biblioteca "plots" --

```
> with(plots):
```

```
> fieldplot3d(vf,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2);
```



Uma integral de linha em três dimensões envolve integrar um campo vetorial **F** sobre um caminho.

Vamos relembrar isto para o campo de vetores dado acima e para a hélice cônica:

> **ch:=[t*cos(8*t),t*sin(8*t),t,t=0..2];**

$$ch := [t\cos(8\,t),\ t\sin(8\,t),\ t,\ t = 0\,..\,2]$$

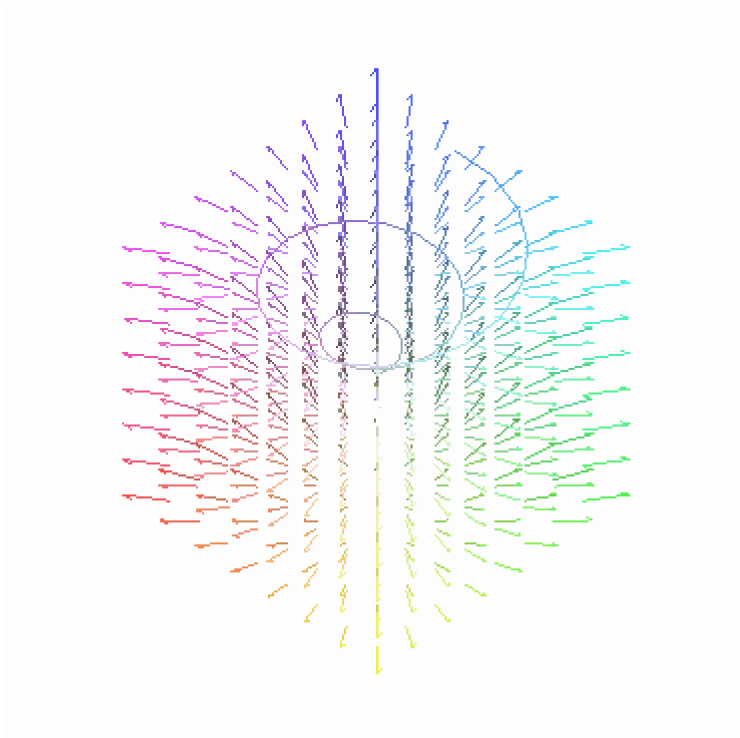
> **spacecurve(ch);**

Plotamos o campo de vetores e a curva juntos para obter uma idéia do que esperamos da integral de linha:

```
> F:=fieldplot3d(vf,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2):
```

```
> G:=spacecurve(ch):
```

```
> display3d({F,G});
```



Integrais de linha em 3 dimensões sao análogas a aquelas de duas dimensões. Observe a

similaridade entre o seguinte procedimento e o procedimento anterior para integral de linha em duas dimensões:

```
> lineint3d:=proc(vf,cv)
> Int(dotprod(subs(x=cv[1],y=cv[2],z=cv[3],vf), diff([cv[1],cv[2],cv[3]],t)),cv[4]);
> end;
```

lineint3d :=
proc(*vf*, *cv*) Int(dotprod(subs($x = cv[1]$, $y = cv[2]$, $z = cv[3]$, *vf*), diff([$cv[1]$, $cv[2]$, $cv[3]$], t)), $cv[4$

```
> with(linalg):
> lineint3d(vf,ch);
```

$$\int_0^2 2\,t\cos(8\,t)\,(\cos(8\,t) - 8\,t\sin(8\,t)) + 2\,t\sin(8\,t)\,(\sin(8\,t) + 8\,t\cos(8\,t)) + 1\,dt$$

```
> value(");
```

$$6$$

Positivo, como esperado.

STOKES

Como na integral de linha, o passo fundamental no cálculo de uma integral de superficie é a parametrização da superficie -- como sempre usaremos **u** e **v** como parâmetros. Se a superficie já é expressa como **z=f(x,y)** , a parametriza **ção** mais simples é: **x=u, y=v, z=f (u,v)** . Suponha que o bordo de S seja dado pela curva ch.

Por exemplo, encontrar o fluxo do campo de vetores

```
> vf:=[-4*y,2*z,3*x];
```

$$vf := [-4\,y, 2\,z, 3\,x]$$

através da parte do parabolóide $z = 10 - x^2 - y^2$ acima do plano $z = 1$. Note que quando $z = 1$, temos um circulo: $x^2 + y^2 = 9$. Neste caso o bordo é o circulo unitario $x^2 + y^2 = 1$ situado no plano $z = 1$.

Usamos a parametriza **ção** simples para a superficie:

```
> surf:=[x,y,10-x^2-y^2];
```

$$surf := [x, y, 10 - x^2 - y^2]$$

com a varia **ção** :

```
> rg:=[y=-sqrt(9-x^2)..sqrt(9-x^2),x=-3..3];
```

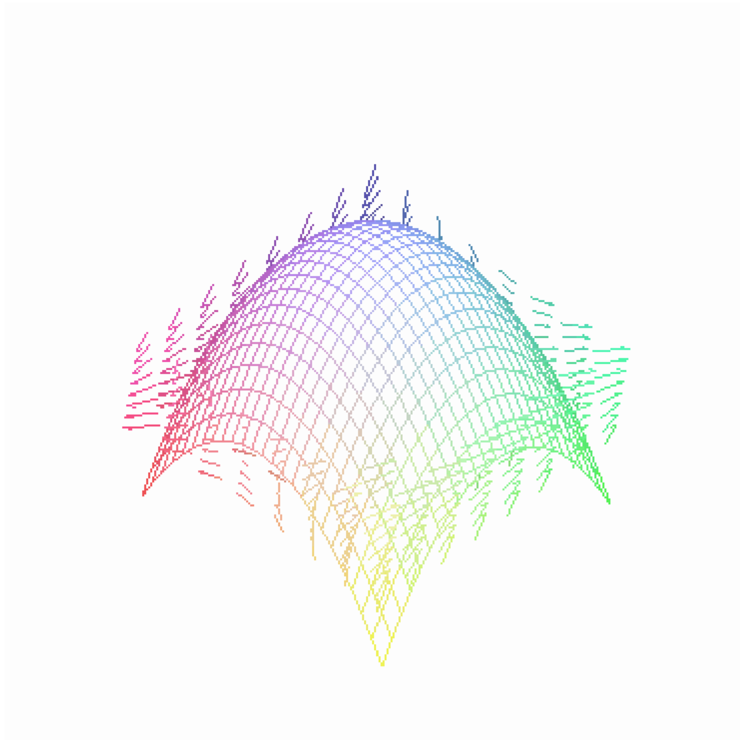
$$rg := [y = -\sqrt{9 - x^2} .. \sqrt{9 - x^2}, x = -3 .. 3]$$

O gráfico:

```
> F:=fieldplot3d(vf,x=-3..3,y=-3..3,z=-3..3):
```

```
> G:=plot3d(surf,x=-3..3,y=-3..3):
```

```
> display({F,G});
```



A normal unitária superior é dada por:

> **N:=crossprod(diff(surf,x),diff(surf,y));**

>

$$N := [2\,x,\, 2\,y,\, 1]$$

> **n:=norm(", 2);**

$$n := \sqrt{4\,|x|^2 + 4\,|y|^2 + 1}$$

> **N1:=N/n;**

$$N1 := \frac{N}{\sqrt{4\,|x|^2 + 4\,|y|^2 + 1}}$$

> **rotvf:= curl(vf, [x,y,z]);**

$$rotvf := [-2, -3, 4]$$

> **Int(Int(dotprod(rotvf,N),y=-sqrt(9-x^2)..sqrt(9-x^2)),x=-3..3);**

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} 4 - 4\,x - 6\,y \, dy\, dx$$

> **evalf(");**

$$113.0973355$$

Vamos testar calculando a integral de linha.

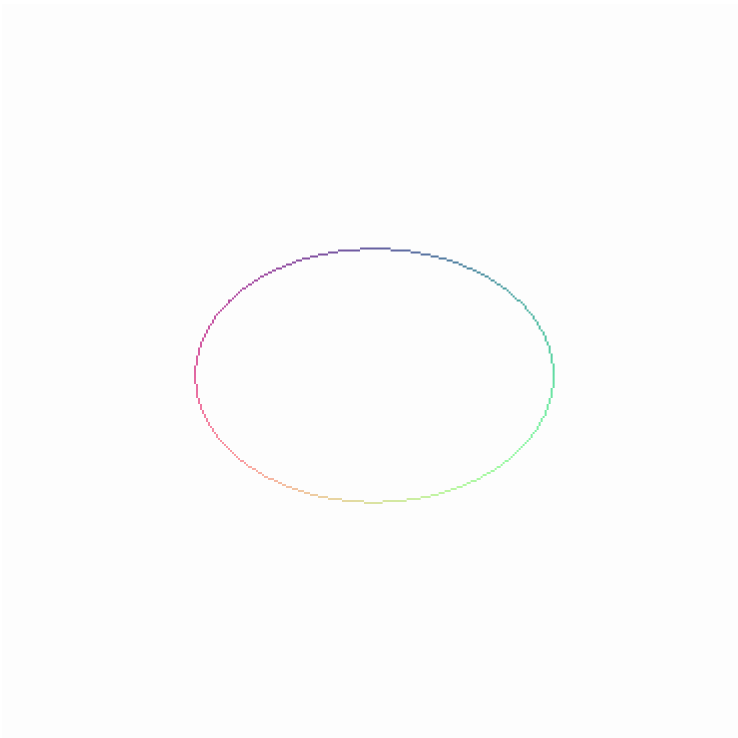
> **vf:=[-4*y,2*z,3*x];**

$$vf := [-4\,y,\, 2\,z,\, 3\,x]$$

> **ch:=[3*cos(t),3*sin(t),1,t=0..2*Pi];**

$$ch := [3\cos(t),\, 3\sin(t),\, 1,\, t = 0\,..\,2\,\pi]$$

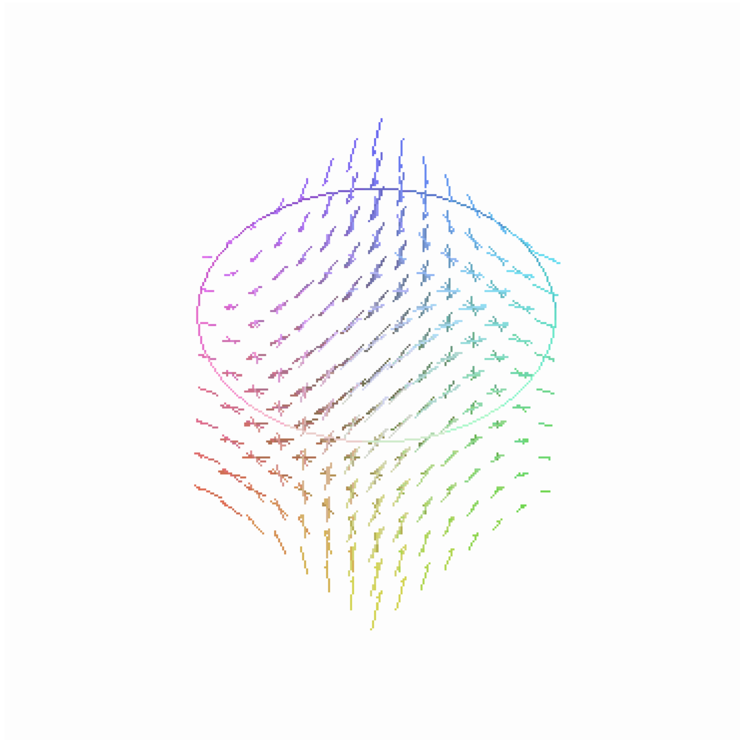
> **spacecurve(ch);**



> **F:=fieldplot3d(vf,x=-2..2,y=-2..2,z=-2..2):**

> **G:=spacecurve(ch):**

> **display3d({F,G});**



> **lineint3d(vf,ch);**

$$\int_{0}^{2\pi} 36\sin(t)^2 + 6\cos(t)\,dt$$

> **value(");**

$$36\pi$$

Que era o esperado!

>