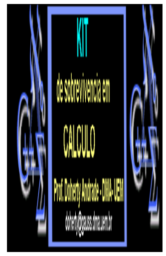


Cálculo diferencial e Integral: um KIT de sobrevivência

visite o nosso site: www.dma.uem.br/kit

Mudança de variáveis e cálculo de integrais múltiplas

Introdução

Mudamos as variáveis para visualizar melhor uma região, para simplificar uma expressão e para facilitar no processo de integração. Nesta woksheet vamos usar a mudança de variáveis para facilitar no cálculo das integrais.

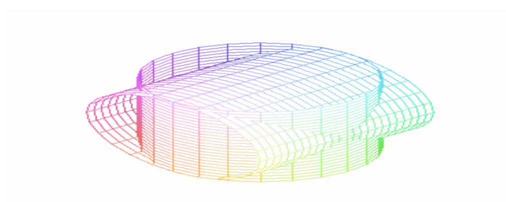
Pré requisitos para este assunto: derivadas parciais

Jacobiano

integrais múltiplas

O objetivo da mudança de variáveis é facilitar o cálculo da integral quando o integrando ou quando a região de integração não são simples de se calcular diretamente.

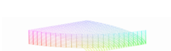
Para uma variável, o método é baseado na fórmula



onde g: [c,d] --> [a,b] é inversível com derivada contínua.

Para duas variáveis.

Suponha que u e v são definidas por



$ParteVolume = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_0^{\sqrt{1-y^2}} 1 \, dz \, dx \, dy$,

onde ($ParteVolume = \frac{2}{3}$) pertence a região Q e (x, y) pertence a D.

Esta aplicação define uma função g que associa a cada ponto (u, v) do plano UV um ponto ($ParteVolume = \frac{2}{3}$) do plano XY:

Algumas condições devemos impor sobre $x = x(u, v)$

e sobre $y = y(u, v)$, de modo que g seja contínua e injetora em Q e g(Q)=D.

<u>Teorema 1:</u> Seja g dada por $Tmass := \frac{32}{45}$ = ($x(u, v), y(u, v)$) com x e y funções contínuas com derivadas parciais contínuas num aberto $Inomentoy = \frac{5}{32}$ do R^2 . Seja Q contido em U subconjunto fechado e limitado tal que

1i) g é injetora em Q

2i) o determinante da matriz Jacobiana de g nunca se anula em Q.

Se g é integrável em g(Q), então

$$\int\int_{g(Q)} f(x,y)dxdx = \int\int_{Q} f(x(u,v), y(u,v)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Lembramos que a matriz jacobiana de $x = r\cos(\theta)$ é dada por

> **matrix([[diff(x(u,v),u), diff(x(u,v),v)], [diff(y(u,v),u), diff(y(u,v),v)]]);**

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} x(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} x(u, v) \\ \frac{\partial}{\partial u} y(u, v) & \frac{\partial}{\partial v} y(u, v) \end{bmatrix}$$

$$z = z$$

Usaremos a notação $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ para denotar o determinante da matriz jacobiana da transformação g.

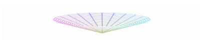
A matriz jacobiana é também representada por $DetjacobianoC := r$.

<u>Para três variáveis.</u>

Seja U um subconjunto do $dV = r\,dz\,dr\,d\theta$ e g :U --> R^3 dada por

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Suponha que u, v e s sejam definidas por



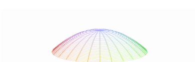
$Volume := \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_r^1 r\,dz\,dr\,d\theta$,

$Volume := \frac{1}{3}\pi$

onde (u, v ,s) pertence a região Q e (x, y , z) pertence a D.

Esta aplicação define uma função g que associa a cada ponto (u, v , s) do espaço UVS um ponto (x, y , z) do espaço XYZ:

Algumas condições devemos impor sobre $z = 0$

sobre  e sobre $V := \int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_0^{4-r^2} r^3\,dz\,dr\,d\theta$

de modo que g seja contínua e injetora em Q e g(Q)=D.

<u>Teorema 2</u> : Seja g dada por $g(u, v, s) = (x(u, v, s), y(u, v, s), z(u, v, s))$ com x, y e $y = \rho \sin(\phi) \sin(\theta)$ funções contínuas com derivadas parciais contínuas num aberto U do R^3 **.** Seja Q contido em U subconjunto fechado e limitado tal que

1i) g é injetora em Q

2i) o determinante da matriz Jacobiana de g nunca se anula em Q.

Se f é integrável em g(Q), então

$$JacobianoS := \begin{bmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & \rho\cos(\phi)\cos(\theta) & -\rho\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & \rho\cos(\phi)\sin(\theta) & \rho\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -\rho\sin(\phi) & 0 \end{bmatrix}$$

Lembramos que a matriz jacobiana da transformação g é dada por

```
> matrix([[diff(x(u,v,s),u), diff(x(u,v,s),v), diff(x(u,v,s),s)], [diff(y(u,v,s),u), diff(y(u,v,s),v), diff(y(u,v,s),s)], [diff(z(u,v,s),u), diff(z(u,v,s),v), diff(z(u,v,s),s)]]);
```

$$DetJacobianoS := \sin(\phi)\,\rho^2$$

O módulo do determinante da matriz Jacobiana é represenado por $\left|\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,s)}\right|$

Exemplos

Para os exemplos vamos precisar do pacote **linalg**

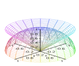
```
> with(linalg):
```

```
Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace
```

1\. Calcule $\displaystyle\iint e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}\,dx\,dy$

sobre a região D, onde D é a região limitada pela reta $x+y=2$ e pelos eixos coordenados. Veja a figura.

Façamos  e $v=y+x$. Assim, vamos tomar a aplicação g dada por u, v --> $z=x^2+4y^2$, onde

$$z = 12 - 2x^2 - 2y^2$$

$$y(u, v) = \frac{v + u}{2}$$

$$z = 4 - x^2$$

> **g := vector([(v-u)/2, (v+u)/2]);**

$$x = y^2$$

> **J:=jacobian(g, [u,v]);**

$$J := \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

> **det(J);**

$$\frac{-1}{2}$$

Assim, usando a fórmula de mudança de variáveis do **Teorema 1** , temos

> **Int(Int(exp((y-x)/(y+x)),x),y)=(1/2)*Int(Int(exp(u/v),u=-v..v),v=0..2);**

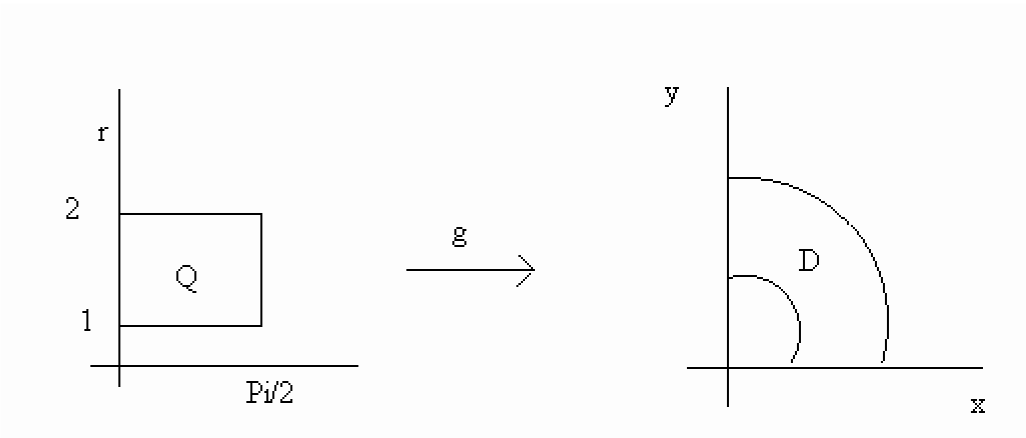
$$\iint e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)} dx\, dy = \frac{1}{2} \int_0^2 \int_{-v}^{v} e^{\left(\frac{u}{v}\right)} du\, dv$$

> **Int(Int(exp((y-x)/(y+x)),x),y)=(1/2)*int(int(exp(u/v),u=-v..v),v=0..2);**

$$\int\int e^{\left(\frac{y-x}{y+x}\right)}\,dx\,dy = e - e^{(-1)}$$

2. Calcule $\int\int \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy$

sobre a região D, onde D é a região do primeiro quadrante entre $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=4$. Veja a figura.



Tomemos $x = r\cos(\theta)$

$y = r\sin(\theta)$

onde θ varia entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ e r varia entre 1 e 2.

Assim, existe uma aplicação g que associa a cada par (r, θ) do plano r θ um par x, y do plano XY dado pelas equações acima.

> **g := vector([r*cos(theta), r*sin(theta)]);**

$$g := [r\cos(\theta), r\sin(\theta)]$$

> **J:=jacobian(g, [r,theta]);**

$$J := \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{bmatrix}$$

```
> simplify(det(J));
```

$$r$$

Agora vamos usar o teorema 1 para calcular a integral

```
> Int(Int(ln(x^2+y^2),x),y)=Int(Int(r*ln(r^2),r=1..2),theta=0..Pi/2);
```

$$\iint \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_1^2 r\ln(r^2)\,dr\,d\theta$$

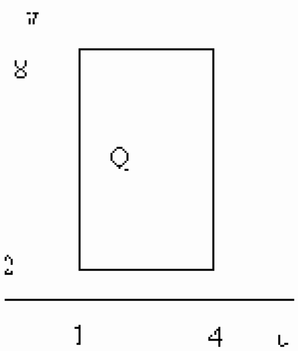
```
> Int(Int(ln(x^2+y^2),x),y)=int(int(r*ln(r^2),r=1..2),theta=0..Pi/2);
```

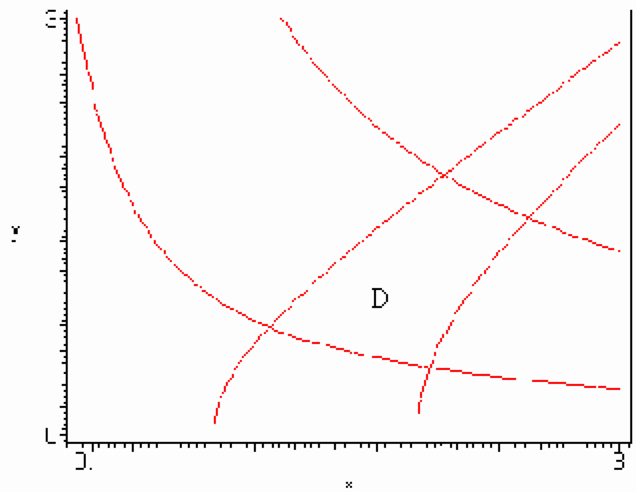
$$\iint \ln(x^2+y^2)\,dx\,dy = 2\pi\ln(2) - \frac{3}{4}\pi$$

3. Calcule $\iint x^2+y^2\,dx\,dy$ sobre a região D, onde D é a região do primeiro quadrante compreendida entre as curvas

$x^2-y^2=1$ e $x^2-y^2=4$, $x\,y=1$ e $x\,y=4$. Veja a figura ilustrando a região D.

Tomemos $u=x^2-y^2$ e $v=2\,x\,y$





Num caso geral, se $x = x(u, v)$, $u = y(u, v)$ e $u = u(t, w)$ e $v = v(t, w)$, então

$$\mathrm{J}\left(\frac{x, y}{u, v}\right) = \frac{1}{\mathrm{J}\left(\frac{u, v}{x, y}\right)} .$$

```
> G:= vector( [x^2-y^2, 2*x*y]);
```

$$G := [x^2 - y^2, 2\,x\,y]$$

```
> J1:=jacobian(G, [x,y]);
```

$$J1 := \begin{bmatrix} 2\,x & -2\,y \\ 2\,y & 2\,x \end{bmatrix}$$

```
> simplify(det(J1));
```

$$4\,x^2 + 4\,y^2$$

Assim, o determinate da matriz jacobiana $\mathrm{J}\left(\frac{x, y}{u, v}\right)$ é sempre não nulo. Podemos então usar o teorema 1 para facilitar no cálculo da integral.

```
> Int(Int(x^2+y^2,x),y)=Int(Int(((1/4)*(u^2-v^2)^(1/2))*(1/(u^2-v^2)^(1/2)),v=2..8),u=1..4);
```

$$\int\int x^2+y^2\,dx\,dy = \int_1^4\int_2^8 \frac{1}{4}\,dv\,du$$

```
> Int(Int(x^2+y^2,x),y)=int(int(((1/4)*(u^2-v^2)^(1/2))*(1/(u^2-v^2)^(1/2)),v=2..8),u=1..4);
```

$$\int\int x^2+y^2\,dx\,dy = \frac{9}{2}$$

Exercícios

Determine o determinante da matriz Jacobiana da transformação mudança de variáveis abaixo:

1i) coordenadas esféricas dadas por

$x = \rho \sin(\theta) \cos(\phi)$

$y = \rho \sin(\theta) \sin(\phi)$

$z = \rho \cos(\theta)$

2i) coordenadas cilindricas

$x = r \cos(\theta)$

$y = r\ \mathrm{sint}(\theta)$

$z = z$

3i) coordenadas dadas por

$x = 2\,u$

$y = 3\,v$

$z = 4\,w$

Bibliografia

[1] Cálculo diferencial e Integral vol2. Paulo Boulos e Zara Issa Abud. Makron Books (2000).

[2] Cálculo, Leithold. vol2

[3] Vector Calculus, Tromba & Marsden. Addison-W. (1991).