KIT
de sobrevivencia em
CALCULO
Prof. Doherty Andrade - DMA- UEM
doherty@gauss.dma.uem.br

INTEGRAIS DE LINHA-- Teorema de Green

Dado um campo de vetores F(x,y)= (M,N) de classe C^1 e uma curva C simples fechada C^1, o teorema de Green estabelece uma igualdade entre a integral de linha do campo F sobre C e a integral dupla de

(N_x-M_y) sobre a região limitada pela curva C. Onde C é orientada positivamente.

Preste atenção na orientação da curva.

Vamos ver alguns exemplos

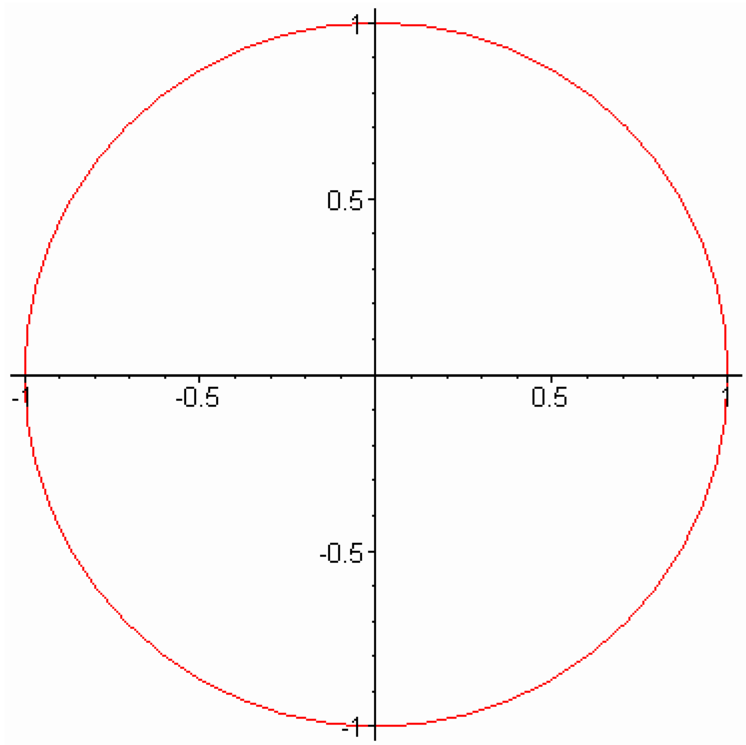
```
> restart:
> with(linalg):
> with(plots):
> curva:=[cos(t),sin(t),t=0..2*Pi];
```

$$curva := [\cos(t), \sin(t), t = 0\,..\,2\,\pi]$$

A parte da variação do parametro é muito importante, além da orientação.

Podemos plotar a curva:

```
> plot(curva);
```

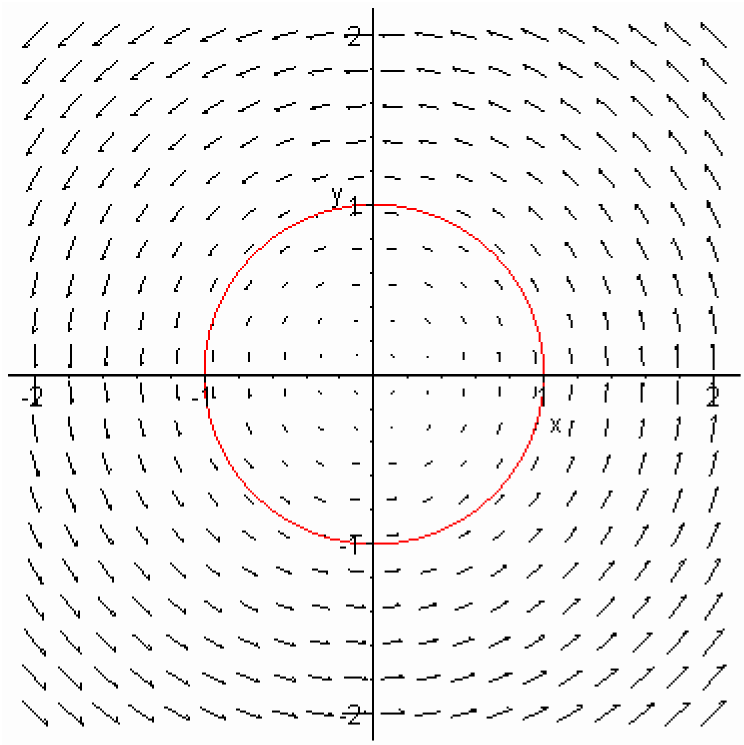


Vamos considerar o campo vetorial F(x,y)= (-y,x). Aqui M(x,y)= -y e N(x,y)=x .

```
> vf:=[-y,x];
```

$$vf := [-y, x]$$

```
> F:=fieldplot(vf,x=-2..2,y=-2..2):
> G:=plot(curva):
> display({F,G});
```



Como o campo de vetores é sempre na direção da curva, esperamos que a integral de linha seja positiva.

Para avaliar a integral de linha, nos precisamos substituir a parametrização no campo de vetores, e então integrar o produto interno:

> **vpar:=subs(x=curva[1],y=curva[2],vf);**

$$vpar := [-\sin(t), \cos(t)]$$

> **Int(dotprod(vpar,diff([curva[1],curva[2]],t)),curva[3]);**

$$\int_0^{2\pi} \sin(t)^2 + \cos(t)^2 \, dt$$

> **value(");**

$$2\pi$$

Um procedimento em Maple para fazer isto (assumindo **x,y** and **t** com seus papeis usuais) é dado por:

> **Lineint2:=proc(vf,curve)**

> **Int(dotprod(subs(x=curve[1],y=curve[2],vf),diff([curve[1], curve[2]],t)),curve[3]);**

> **end;**

Lineint2 :=
proc(*vf*, *curve*) Int(dotprod(subs(*x* = *curve*[1], *y* = *curve*[2], *vf*), diff([*curve*[1], *curve*[2]], *t*)), *curve*[

Testando:

```
> Lineint2(vf,curva);
```

$$\int_{0}^{2\pi} \sin(t)^2 + \cos(t)^2 \, dt$$

```
> Int(Int(diff(vf[2],x)-diff(vf[1],y),y=-sqrt(1-x^2)..sqrt(1-x^2)),x=-1..1);
```

$$\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 2 \, dy \, dx$$

```
> evalf(");
```

$$6.283185307$$

```
>
```

Que é o esperado.