$$SOL := \{\lambda = 0, z = 0, y = 0, x = a\}, \{\lambda = 0, z = 0, y = 0, x = -$$

Otimização com restrições, usando Multiplicadores de Lagrange

Determine o ponto da superficie xy+yz+zx=12 que está mais próximo da origem.

```
> restart;
```

```
> with(plots):
```

A função objetiva é

```
> f:=(x,y,z)->sqrt(x^2+y^2+z^2);
```

$$\{\lambda = -4\,\mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,c\,b\,a, z = \mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,c, x = \mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,a, y = -\mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,b\},$$

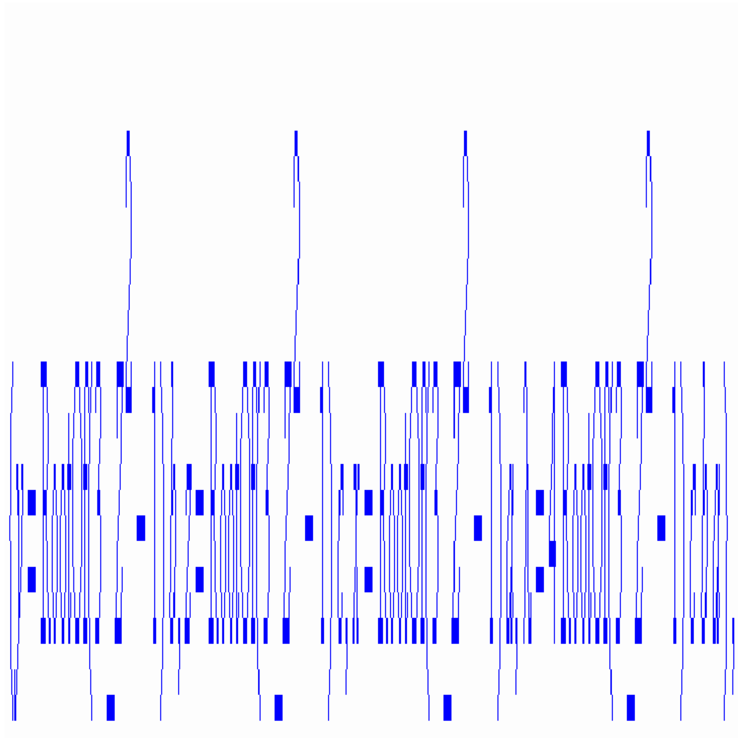
Introduzimos uma função g de tres variaveis tais que a superficie é a superficie de nivel

g(x,y,z)=0.

```
> g:=(x,y,z)->x*y+y*z+z*x-12;
```

$$\{y = \mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,b, x = -\mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,a, \lambda = -4\,\mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,c\,b\,a, z = \mathrm{RootOf}(3\_Z^2 - 1)\,c\},$$

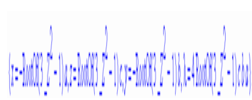
```
> implicitplot3d(g(x,y,z)=0,x=-6..6,y=-6..6,z=-6..6,axes=boxed,orientation=[-25,76]);
```



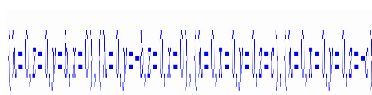
Neste caso podemos tambem realizar esta superficie como grafico da uma função

z=h(x,y).

> **zz:=solve(g\(x,y,z)=0,z);**



> **h:=unapply(zz,x,y);**



Existe uma descontinuidade obvia ao longo da reta y+x=0 -- no desenho pode aparecer coisas estranhas, para obter alguma sensibilidade nós precisamos truncar a variação de z. ROTACIONE O seguinte plot.

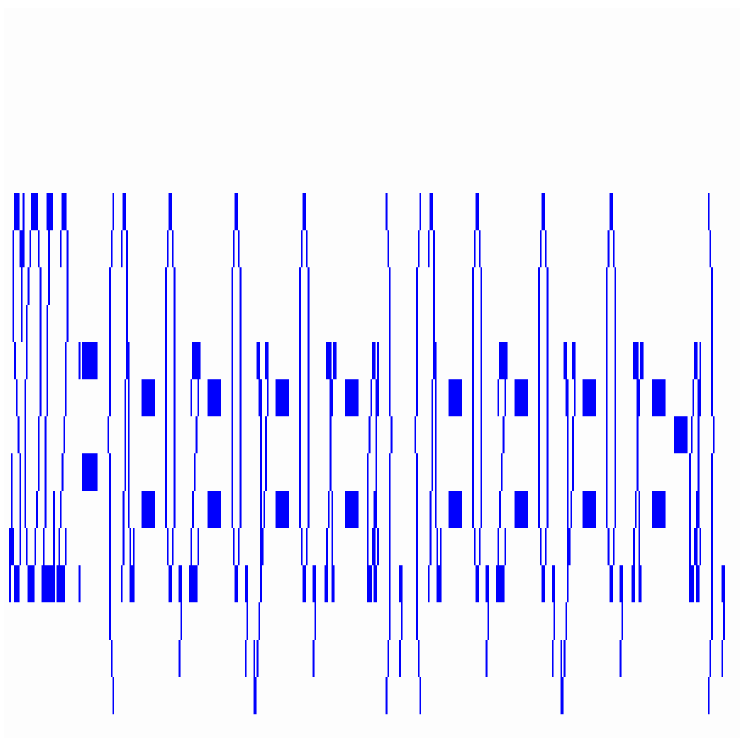
> **plot3d(h,-6..6,-6..6,view=-6..6);**

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

>

Restrigindo o dominio apenas na parte positiva de x e y obtemos um desenho melhor.

> **plot3d(h,0..6,0..6,view=0..6);**

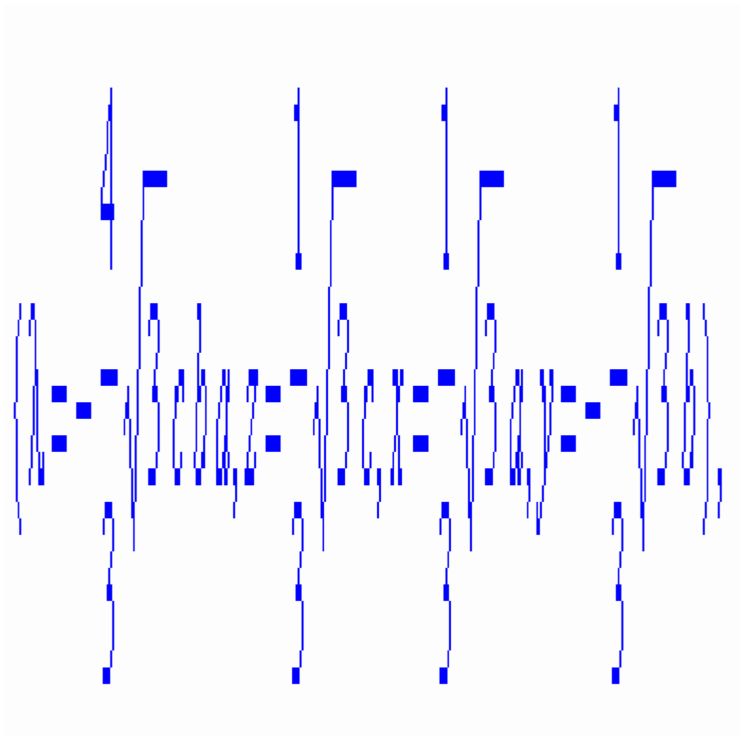


>

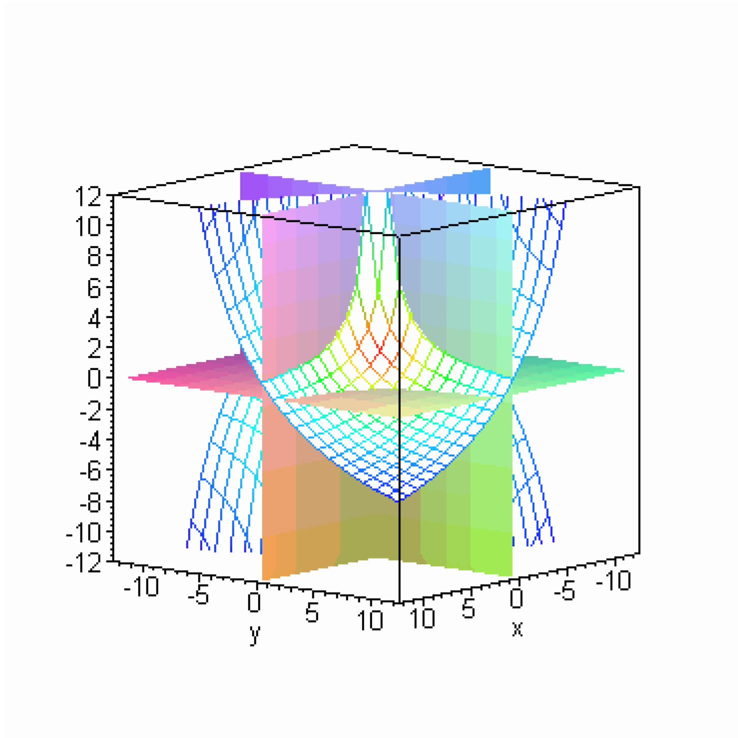
O seguinte é o plot mais sofisticado, de fato usamos a função objetiva distância para colorir o plot.

Juntamos os eixos coordenados para melhor visualização.

```
> constr:=a->display([plot3d(h(x,y),x=-a..a,y=-a..a,view=-a..a,axes=boxed,

> color=-sqrt(3/f(x,y,h(x,y)))),

> plot3d({[u,v,0],[u,0,v],[0,u,v]},u=-a..a,v=-a..a,grid=[30,30],style=patchnogrid)],

> orientation=[-20,80]):

> constr(6);
```



```
> display(constr(12),orientation=[40,80]);
```



Os gráficos ilustram que existem dois minimos localizados em alguns pontos

(r,r,r) e (-r,-r,-r) (usando a simetria da fórmula).

>

Uma boa maneira de ilustrar o problema de minimizar distancias eh plotar juntos os conjuntos de nivel da função objetiva f que são esferas na origem. em vez de perguntar sobre o ponto de distância minima sobre a superficie

g(x,y,z)=0, perguntamos pela maior esfera que não intercepta a superficie.

> **level:=(r,cc)->sphereplot(r,theta=0..2*Pi,phi=0..Pi,color=cc);**

$$level := (r, cc) \rightarrow \mathrm{sphereplot}(r, \theta = 0 .. 2\,\pi, \phi = 0 .. \pi, color = cc)$$

> **constr2:=a->plot3d(h(x,y),x=-a..a,y=-a..a,view=-a..a,axes=boxed,**

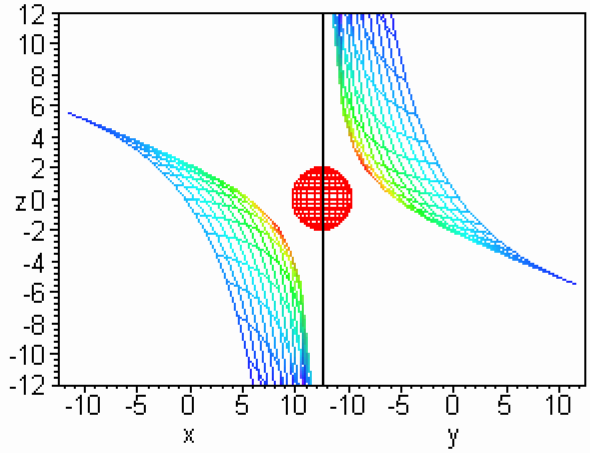
> **color=-sqrt(3/f(x,y,h(x,y))), orientation=[-20,80]);**

$$constr2 := a \rightarrow \mathrm{plot3d}\left(\mathrm{h}(x, y), x = -a .. a, y = -a .. a, view = -a .. a, axes = boxed, color = -\sqrt{\frac{3}{\mathrm{f}(x, y, \mathrm{h}(x, y))}}, orientation = [-20, 80]\right)$$

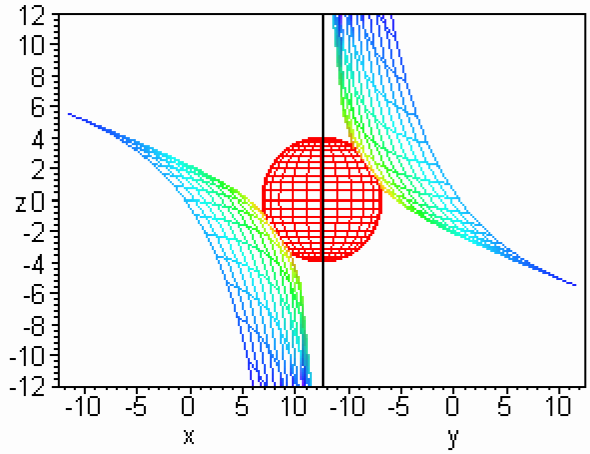
> **largest:=r->display({level(r,red),constr2(12)},orientation=[-45,90]);**

$$largest := r \rightarrow \mathrm{display}(\{\mathrm{level}(r, red), \mathrm{constr2}(12)\}, orientation = [-45, 90])$$

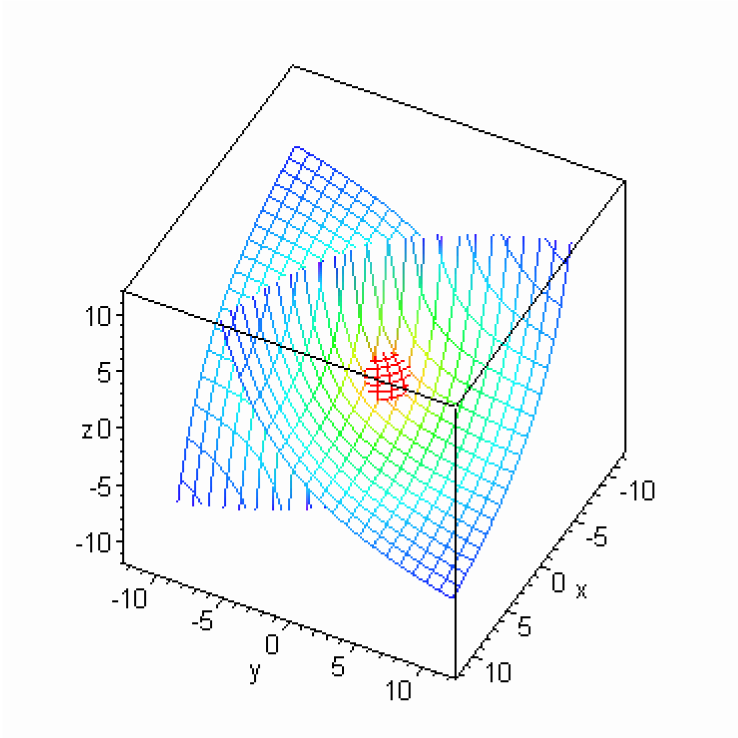
> **largest(2);**



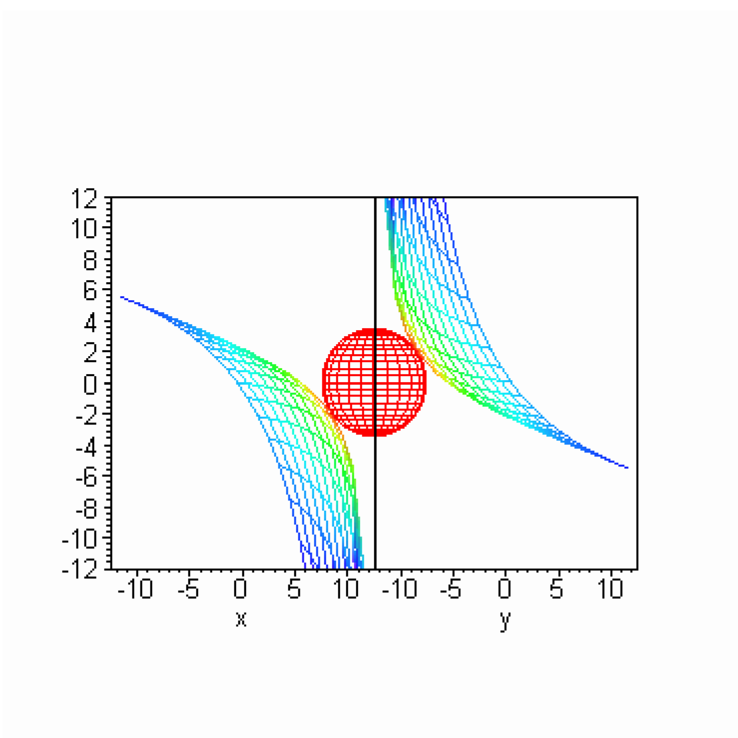
> **largest(4);**



> **display(largest(4),orientation=[27,47]);**



> **largest(2*sqrt(3));**



Voltando ao cálculo I : Usamos a restrição para resolver para uma variavel como função das outras, então substituir na objetiva f e obter um novo problema de otimização.

Vamos aqui zerar a memoria do MAPLE.

```
> restart;
> with(plots):
> f:=(x,y,z)->sqrt(x^2+y^2+z^2);
```

$$f := (x, y, z) \to \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

```
> g:=(x,y,z)->x*y+y*z+z*x-12;
```

$$g := (x, y, z) \to x\,y + y\,z + z\,x - 12$$

```
> h:=unapply(solve(g(x,y,z)=0,z),x,y);
```

$$h := (x, y) \to -\frac{x\,y - 12}{y + x}$$

```
> F:=(x,y)->f(x,y,h(x,y));
```

$$F := (x, y) \to \mathrm{f}(x, y, \mathrm{h}(x, y))$$

```
> F(x,y);
```

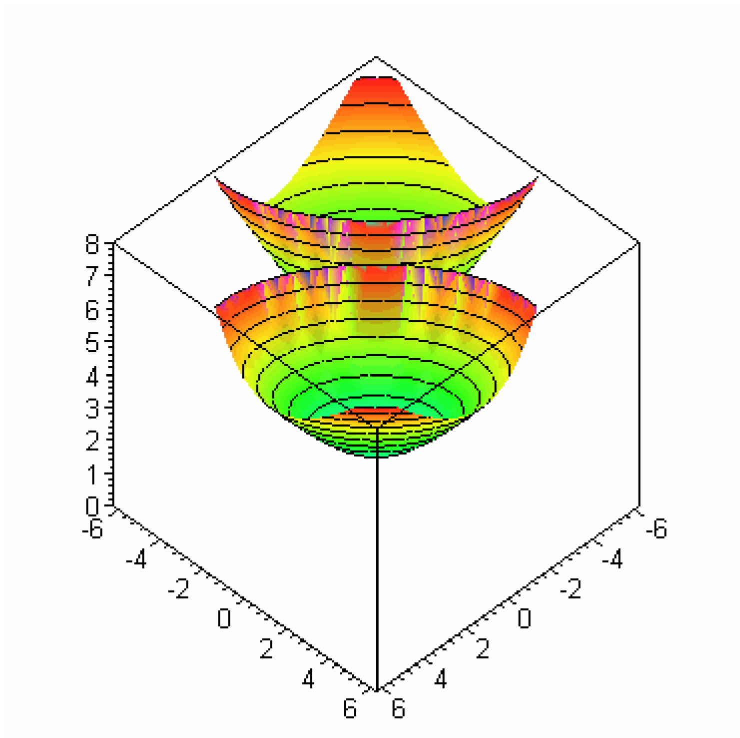
$$\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(x\,y - 12)^2}{(y + x)^2}}$$

O grafico de F novamente revela a singularidade sobre a reta x+y=0.

Apos alguma tentativa obtemos o seguinte :

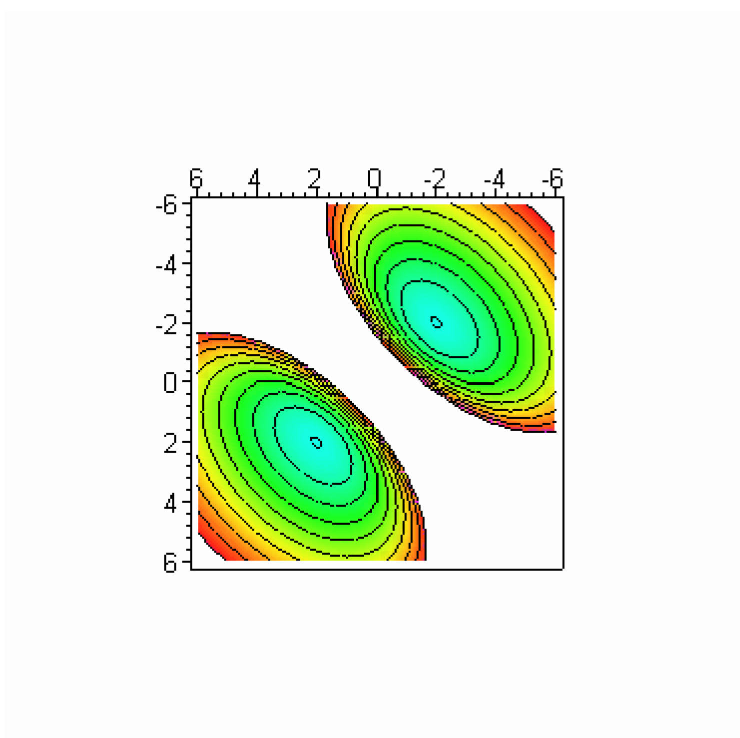
(Rotacione o view para identificar os pontos criticos):

```
> plot3d(F,-6..6,-6..6,view=0..8,style=patchcontour,shading=ZHUE,axes=boxed);
```



> plot3d(F,-6..6,-6..6,view=0..8,style=patchcontour,shading=ZHUE,

> orientation=[90,0],axes=boxed);



Como no calculo I, para encontrar os extremos de F, nós trabalhamos com F^2 (esta poderia ter mais pontos criticos, mas não menos!). Vamos determinar o gradiente e igular a zero e

encontrar os pontos criticos. Vamos usar o teste da derivada segunda para estudar a natureza dos pontos criticos.

> **FF:=F(x,y)^2;**

$$FF := x^2 + y^2 + \frac{(x\,y - 12)^2}{(y + x)^2}$$

> **FFx:=diff(FF,x);**

$$FFx := 2\,x + 2\,\frac{(x\,y - 12)\,y}{(y + x)^2} - 2\,\frac{(x\,y - 12)^2}{(y + x)^3}$$

> **FFy:=diff(FF,y);**

$$FFy := 2\,y + 2\,\frac{(x\,y - 12)\,x}{(y + x)^2} - 2\,\frac{(x\,y - 12)^2}{(y + x)^3}$$

> **sys:=({FFx=0,FFy=0});**

$$sys := \left\{2\,x + 2\,\frac{(x\,y - 12)\,y}{(y + x)^2} - 2\,\frac{(x\,y - 12)^2}{(y + x)^3} = 0, 2\,y + 2\,\frac{(x\,y - 12)\,x}{(y + x)^2} - 2\,\frac{(x\,y - 12)^2}{(y + x)^3} = 0\right\}$$

> **solve(sys,{x,y});**

$$\{y = y, x = \mathrm{RootOf}(y^2 + 12 + \_Z\,y + \_Z^2)\}, \{y = 2, x = 2\}, \{y = -2, x = -2\},$$
$$\{y = 2\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + 1), x = -4\,\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + 1)\}$$

Surpresa o MAPLE determinou as raizes e algumas são complexas.

Em geral esperamos ter que usar o comando fsolve em problemas não lineares.

> **fsolve(sys,{x,y},x=-5..5,y=-5..5);**

$$\{x = -2.000000000, y = -2.000000000\}$$

Obtemos apenas soluções negativas -- do nosso estudo sobre o grafico sabemos que existe uma raiz tambem no primeiro quadrante; vamos procurar raizes nesta região:

> **fsolve(sys,{x,y},x=0..5,y=0..5);**

$$\{x = 2.000000000, y = 2.000000000\}$$

Para completar:

> FFxx:=diff(FFx,x);

$$FFxx := 2 + 2\frac{y^2}{(y+x)^2} - 8\frac{(x\,y-12)\,y}{(y+x)^3} + 6\frac{(x\,y-12)^2}{(y+x)^4}$$

> FFxy:=diff(FFx,y);

$$FFxy := 2\frac{y\,x}{(y+x)^2} - 4\frac{(x\,y-12)\,y}{(y+x)^3} + 2\frac{x\,y-12}{(y+x)^2} - 4\frac{(x\,y-12)\,x}{(y+x)^3} + 6\frac{(x\,y-12)^2}{(y+x)^4}$$

> FFyy:=diff(FFy,y);

$$FFyy := 2 + 2\frac{x^2}{(y+x)^2} - 8\frac{(x\,y-12)\,x}{(y+x)^3} + 6\frac{(x\,y-12)^2}{(y+x)^4}$$

> discr:=FFxx*FFyy-FFxy^2;

$$discr := \left(2 + 2\frac{y^2}{(y+x)^2} - 8\frac{(x\,y-12)\,y}{(y+x)^3} + 6\frac{(x\,y-12)^2}{(y+x)^4}\right)\left(2 + 2\frac{x^2}{(y+x)^2} - 8\frac{(x\,y-12)\,x}{(y+x)^3} + 6\frac{(x\,y\right.$$
$$- \left(2\frac{y\,x}{(y+x)^2} - 4\frac{(x\,y-12)\,y}{(y+x)^3} + 2\frac{x\,y-12}{(y+x)^2} - 4\frac{(x\,y-12)\,x}{(y+x)^3} + 6\frac{(x\,y-12)^2}{(y+x)^4}\right)^2$$

> subs({x=2,y=2},discr);

$$27$$

> subs({x=-2,y=-2},discr);

$$27$$

> subs({x=2,y=2},FFxx);

$$6$$

> subs({x=-2,y=-2},FFxx);

$$6$$

O teste da derivada segunda mostra que estes são de fato minimos de FF= F^2 **, e assim tambem minimos de F (note que maximo de FF pode ser minimo ou maximo de F).**

>

Finalmente o enfoque com multiplicadores de Lagrange:

```
> restart;
> with(plots):
> f:=(x,y,z)->x^2+y^2+z^2;
```

$$f := (x, y, z) \to x^2 + y^2 + z^2$$

```
> g:=(x,y,z)->x*y+y*z+z*x-12;
```

$$g := (x, y, z) \to x\,y + y\,z + z\,x - 12$$

Vamos novamente maximizar o quadrado da distancia.

Usualmente tomamos o Lagrangiano $L = f + \lambda\,g$ **e igualamos a zero todas as derivadas parciais de L de ordem 1. Isto produz um sistema grad(f) = -lambda*grad(g) combinado com a restrição g=0.**

```
> L:=f(x,y,z)+lambda*g(x,y,z);
```

$$L := x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\,(x\,y + y\,z + z\,x - 12)$$

```
> Lx:=diff(L,x);
```

$$Lx := 2\,x + \lambda\,(y + z)$$

```
> Ly:=diff(L,y);
```

$$Ly := 2\,y + \lambda\,(x + z)$$

```
> Lz:=diff(L,z);
```

$$Lz := 2\,z + \lambda\,(y + x)$$

```
> LL:=diff(L,lambda);
```

$$LL := x\,y + y\,z + z\,x - 12$$

```
> solve({Lx=0,Ly=0,Lz=0,LL=0},{x,y,z,lambda});
```

$$\{y = \mathrm{RootOf}(\_Z^2 + \_Z\,z + z^2 + 12),\ \lambda = 2,\ z = z,\ x = -\mathrm{RootOf}(\_Z^2 + \_Z\,z + z^2 + 12) - z\},$$
$$\{z = 2,\ \lambda = -1,\ y = 2,\ x = 2\},\ \{z = -2,\ \lambda = -1,\ y = -2,\ x = -2\}$$

```
>
```

Novamente esperamos dois pontos criticos em (x,y,z)=(2,2,2) e (-2,-2,-2), mais duas soluções que após investigação verifica-se complexa.

NOTA: o metodo de multiplicadores de Lagrange apenas dá os pontos criticos -- não discutimos um teste de derivada segunda. Naturalmente, para distinguir os pontos criticos bons dos ruins é recomendavel, por exemplo, substituir na funçao.