KIT de sobrevivencia em CALCULO

Prof. Doherty Andrade - DMA- UEM
doherty@gauss.dma.uem.br

Otimização com Restrições

Considere o seguinte exemplo .

Exemplo: Encontre as dimensões da caixa de maior volume que pode ser colocada dentro do elipsoide.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

assumindo que cada lado da caixa seja paralelo aos eixos coordenados.

Solução:

como cada um dos oito vertices da caixa devem pertencer ao elipsoide, seja o vertice no primeiro octante tendo coordenadas (x, y, z). As dimensoes da caixa são $2x$, por $2y$ por $2z$ se seu volume é $V = 8\,x\,y\,z$. O problema é encontrar os valores de (x, y, z), que pertencem ao elipsoide e que torman V tao grande quanto possivel. Assim desejamos otimizar $V = 8\,x\,y\,z$ sujeito a restricao

$$g(x, y, z) = 1$$,

onde

$$g(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$$.

Assim devemos resolver as equações dadas por

$$\mathrm{grad}(V) = \lambda\, \mathrm{grad}(g)$$,

para x, y, z , e λ , sujeito a restrição acima.

Primeiro defina V e g usindo Maple V.

> **V := 8*x*y*z;**

$$V := 8\,x\,y\,z$$

> **g := x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2;**

$$g := \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

> **with(linalg):**

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace

O procedimento **grad** do Maple V do pacote **linear algebra** pode ser usado para calcular os gradientes necessários.

> **GradV := grad(V,[x,y,z]);**

$$GradV := [8\,y\,z, 8\,x\,z, 8\,x\,y]$$

> **Gradg := grad(g,[x,y,z]);**

$$Gradg := \left[2\,\frac{x}{a^2}, 2\,\frac{y}{b^2}, 2\,\frac{z}{c^2}\right]$$

Agora podemos resolver as equações relevantes para (x, y, z) and λ .

> **SOL := solve({g=1,seq(GradV[i]=lambda*Gradg[i],i=1..3)},{x,y,z,lambda});**

$$SOL := \{\lambda = 0, z = 0, y = 0, x = a\}, \{\lambda = 0, z = 0, y = 0, x = -a\},$$
$$\{\lambda = -4\,\mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,c\,b\,a, z = \mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,c, x = \mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,a, y = -\mathrm{RootOf}(3\,\_$$
$$\{y = \mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,b, x = -\mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,a, \lambda = -4\,\mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,c\,b\,a, z = \mathrm{RootOf}(3\,\_$$
$$\{y = \mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,b, z = \mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,c, x = \mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,a, \lambda = 4\,\mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1$$
$$\{x = -\mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,a, z = \mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,c, y = -\mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2 - 1)\,b, \lambda = 4\,\mathrm{RootOf}(3\,\_Z^2$$
$$\{\lambda = 0, z = 0, y = b, x = 0\}, \{\lambda = 0, y = -b, z = 0, x = 0\}, \{\lambda = 0, x = 0, y = 0, z = c\}, \{\lambda = 0, x = 0, y =$$

Maple retornou dez conjuntos de respostas. Devemos agora escolher aqueles que são corretos. Como os valores de x,y, e z devem ser positivos podemos excluir todas as respostas com alguma entrada negativa.

Primeiro notamos que %1 é um termo de **RootOf** (uma expressão quadratica).

```
> allvalues(RootOf(3*_Z^2-1));
```

$$\frac{1}{3}\sqrt{3}, -\frac{1}{3}\sqrt{3}$$

Assim obtemos as soluções sem o **RootOf** e suprimimos os simbolos %1,%2, etc. com o próximo comando.

```
> interface(labeling=false);
```

```
> SOL2:=seq(allvalues(SOL[i]),i=1..10);
```

$$SOL2 := \{\lambda = 0, z = 0, y = 0, x = a\}, \{\lambda = 0, z = 0, y = 0, x = -a\},$$

$$\{\lambda = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, z = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a, y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, b\},$$

$$\{\lambda = \frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, z = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, a, y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, b\},$$

$$\{\lambda = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, z = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, a, y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, b\},$$

$$\{x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a, y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, b, \lambda = \frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, z = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, c\}, \{z = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a, \lambda = \frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, y =$$

$$\{\lambda = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, b, z = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, a\},$$

$$\{z = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, b, \lambda = \frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, x = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, a\},$$

$$\{\lambda = -\frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a, z = -\frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, b\}, \{\lambda = 0, z = 0, y = b, x = 0\}, \{\lambda = 0, y = -b,$$

$$\{\lambda = 0, x = 0, y = 0, z = c\}, \{\lambda = 0, x = 0, y = 0, z = -c\}$$

A unica solução é o conjunto dado por todos os valores positivos, isto é o quinto conjunto, SOL[5].

```
> allvalues(SOL[5])[1];
```

$$\{z = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, c, x = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, a, \lambda = \frac{4}{3}\sqrt{3}\, c\, b\, a, y = \frac{1}{3}\sqrt{3}\, b\}$$

Com estes valores concluimos que o volume máximo é

```
> subs(allvalues(SOL[5])[1],V);
```

$$\frac{8}{9}\sqrt{3}\, c\, b\, a$$

E com estes valores substituido em g vemos que de fato (x, y, z) satisfaz a restrição.

> **subs(allvalues(SOL[3])[1],g);**

$$1$$

>

Exercicios

1 . Encontre o máximo da função $z = -4\,x^3\,y^2$ onde (x, y) deve ser um ponto sobre o circulo unitario centrado na origem.

2 . Dado $a^x\,b^y\,c^z = A$, encontre o valor máximo de $(x+1)\,(y+1)\,(z+1)$.

3 . Encontre o máximo de $x^m\,y^n\,z^p$ sujeito a restrição

x+y+z=a.

4 . O modelo de produção de Cobb-Douglas para um processo de manufatura depende de três entradas x, y, e z com custos unitários a, b, e c, respectivamente, é dado por

$P = k\,x^{\alpha}\,y^{\beta}\,z^{\gamma}$, α > 0, β > 0, γ > 0, $\alpha + \beta + \gamma = 1$,

subjeito a restrição

$a\,x + b\,y + c\,z = d$.

Determine x, y, e z para maximizar P.