Integrais duplas em coordenas retangulares e polares

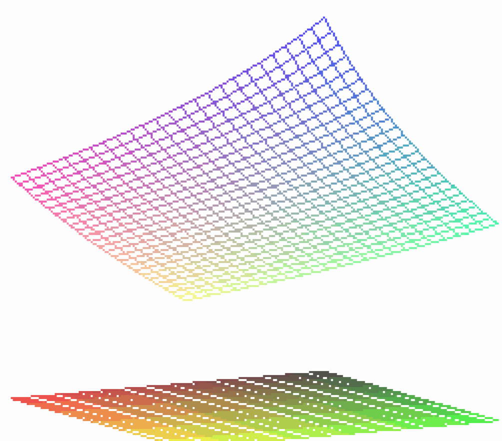
Integrais duplas representam volume. Por exemplo, a integral

> **Int(Int(1/(x+y),x=2..5),y=3..7);**

$$\int_{3}^{7}\int_{2}^{5}\frac{1}{x+y}\,dx\,dy$$

representa o volume sobre o retangulo **x=2..5,y=3..7** no plano xy que está contido sob a superficie **z=1/(x+y)** . Use o seguinte comando para ver a região do volume:

> **plot3d({0,1/(x+y)},x=2..5,y=3..7);**



Maple pode avaliar a integral facilmente:

```
> int(int(1/(x+y),x=2..5),y=3..7);
```

$$-6\ln(3)+5\ln(5)$$

```
> evalf(");
```

$$1.455515826$$

Para calcular integrais múltiplas em regiões mais gerais, você descreve-as de modo análogo.

Exemplo: O volume sob o parabolóide **z=3x^2+y^2** e acima da região limitada por **y=x** e **x=y^2-y** :

```
> solve(y=y^2-y);
```

$$0, 2$$

Assim y vai de 0 a 2 quando x vai de **y^2-y** a **y** . Para ver esta região, podemos parametrizá-la -- o segmento de **(y^2-y,y)** a **(y,y)** é parametrizado por: **x=t*y+(1-t)*(y^2-y), y=y** quando t vai de **0..1** :

```
> xp:=(x,y)->y*x+(1-y)*(x^2-x);
```

$$xp := (x,y) \rightarrow y\,x+(1-y)\,(x^2-x)$$

```
> plot3d({[xp(x,y),x,0],[xp(x,y),x,3*xp(x,y)^2+x^2]},x=0..2,y=0..1);
```

A integral que calcula o volume e':

```
> Int(Int(3*x^2+y^2,x=y^2-y..y),y=0..2);
```

$$\int_{0}^{2}\int_{y^2-y}^{y} 3x^2+y^2\,dx\,dy$$

```
> int(int(3*x^2+y^2,x=y^2-y..y),y=0..2);
```

$$\frac{144}{35}$$

Em coodenadas polares, precisamos lembrar que devemos usar $r\,dr\,d\theta$ e descrever a região em coordenadas polares, isto é, $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$ para obter desenhos.

Examplo: O volume limitado pelos paraboloides $z = 3x^2 + 3y^2$ e $z = 4 - x^2 - y^2$.

Naturalmente, em coordenadas polares os parabolóides são: z $? = 3r^2$ e $z = 4 - r^2$.

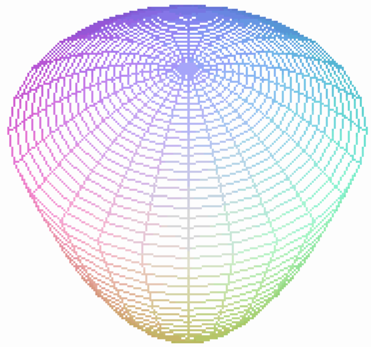
Precisamos resolver:

```
> solve(3*r^2=4-r^2,r);
```

$$1, -1$$

Assim integraremos *z* de 0 a 1. Para ver as superficies, use parametrização: $r = 0\,..\,1$ **e** $\theta = 0\,..\,2\pi$. Tente estimar o volume antes de calcular a integral.

```
> plot3d({[r*cos(theta),r*sin(theta),3*r^2],[r*cos(theta),r*sin
(theta),4-r^2]},r=0..1,theta=0..2*Pi);
```



Agora,devemos devemos ser cuidadosos para para multiplicar nosso integrando pelo fator extra r :

> **Int(Int((4-r^2-3*r^2)*r,r=0..1),theta=0..2*Pi);**

$$\int_0^{2\pi}\int_0^1 (4-4r^2)\,r\,dr\,d\theta$$

> **int(int((4-r^2-3*r^2)*r,r=0..1),theta=0..2*Pi);**

$$2\pi$$

>