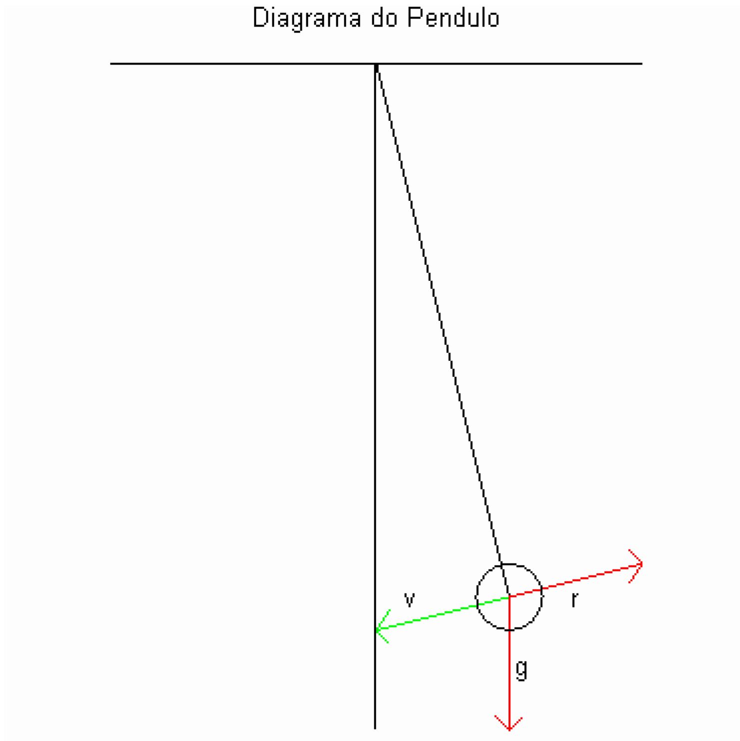
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática
Prof. Doherty Andrade (DMA- UEM)
TOPICOS EM EDO - CURSO DE VERAO -DMA/UEM

Maple

EDO-PÊNDULO

O diagrama abaixo mostra um pêndulo consistindo de uma pequena massa esférica suspensa por um fio. O pêndulo está imerso em um líquido que resiste ao seu movimento. A fecha verde mostra a velocidade v da esfera, a flecha vermelha mostra a força agindo sobre ela. Existe uma força para baixo g devido a gravidade e também r uma força resistiva devido ao fluido, agindo na direção oposta a velocidade do pêndulo.

```
> circle := proc(n) local i; [seq([ cos(2*Pi*i/n)/2, sin(2*Pi*i/n)/2 ], i = 1..n)] end:

> ball := POLYGONS( evalf( circle(16) ) ), CURVES([[-2,8],[0,0]]):

> lines := CURVES( [[-6,8],[2,8]], [[-2,8],[-2,-2]] ):

> red := COLOUR(RGB,1,0,0): green := COLOUR(RGB,0,1,0):

> resistance := CURVES( [[0,0],[2,0.5]], [[1.8,0.7],[2,0.5],[1.8,0.2]],red), TEXT( [1,0], r ):

> gravity := CURVES( [[0,0],[0,-2]], [[-0.2,-1.8],[0,-2],[0.2,-1.8]], red), TEXT( [0.2,-1.0], g ):

> velocity := CURVES( [[0,0],[-2,-0.5]], [[-1.8,-0.2],[-2,-0.5],[-1.8,-0.7]], green), TEXT( [-1.5,0], v):

> diagram := PLOT( ball, lines, resistance, gravity, velocity, SCALING(CONSTRAINED), AXESSTYLE(NONE), TITLE(`Diagrama do Pendulo`) ):

> diagram;
```



A equação que descreve o movimento do pêndulo em termos do ângulo θ entre o pêndulo e a vertical é dada por .

```
> diff(theta(t),t,t) = -k*diff(theta(t),t) - theta(t);
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) = -k\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) - \theta(t)$$

A constante k é a medida que mostra quanta resistência o fluido exerce sobre a esfera.

Se k = 0 então o fluido não exerce resistência. A equação então fica:

```
> pendulum := ": subs(k=0,pendulum);
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) = -\theta(t)$$

Podemos usar Maple e "dsolve" para resolver a equaçao diferencial. Devemos especificar as condiçoes iniciais, i.e.,os valores de theta e d(θ)/dt em t = 0. Supomos que o pêndulo inicia o movimento de um ângulo ϕ .

```
> dsolve({",theta(0)=phi,D(theta)(0)=0},theta(t));
```

$$\theta(t) = \phi \cos(t)$$

Como você pode ver, a solucao é a curva cosseno. Isto significa que o pendulo oscilará para sempre. Vamos plotar um grafico de θ contra o tempo para um particular angulo inicial $\phi = .1$:

> **subs(phi=0.1,");**

$$\theta(t) = .1\cos(t)$$

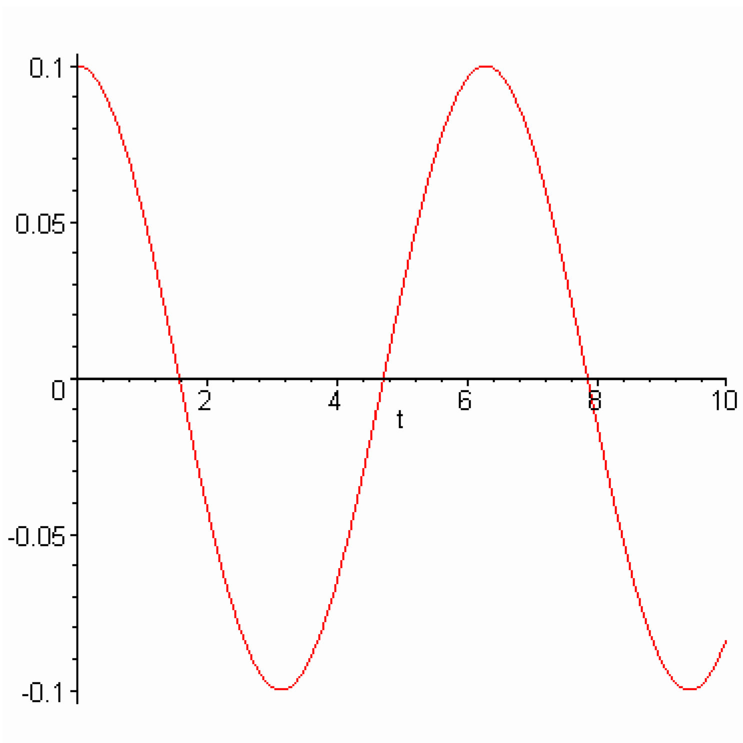
O comando RIGHT-HAND copia o lado direito da equaçao, que é o que vamos plotar.

> **rhs(");**

$$.1\cos(t)$$

Usamos o comando "plot":

> **plot(",t=0..10);**



Agora vamos experimentar para ver o que acontece se um pequeno numero k, correspondendo a resistencia do fluido sobre o pendulo, for considerado.

> **subs(k=1/10,pendulum);**

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) - \theta(t)$$

> **soln := dsolve({",theta(0)=phi,D(theta)(0)=0},theta(t));**

$$soln := \theta(t) = \phi\, e^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \cos\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t\right) + \frac{1}{399}\phi\sqrt{399}\, e^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \sin\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t\right)$$

Esta soluçao parece mais complicada do que quando k = 0. Vejamos o comportamento num grafico com o valor de ϕ =0.1.

> **subs(phi=0.1,soln);**

$$\theta(t) = .1\, e^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \cos\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t\right) + .0002506265664\sqrt{399}\, e^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \sin\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t\right)$$

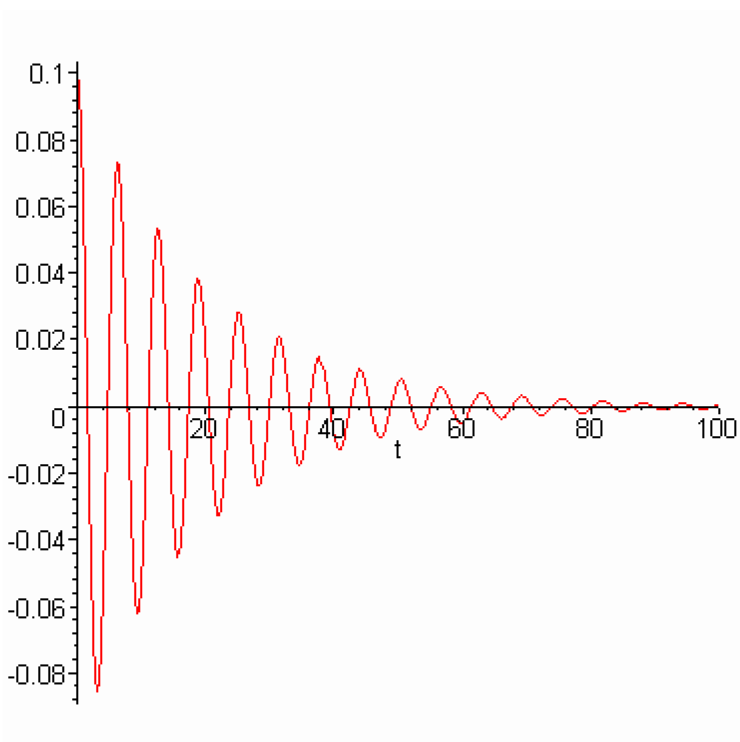
Vamos tomar o lado direito para plotar.

> **rhs(");**

$$.1\, e^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \cos\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t\right) + .0002506265664\sqrt{399}\, e^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \sin\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\,t\right)$$

Agora o comando plot.

> **plot(",t=0..100);**



Como você pode ver as oscilações do pêndulo gradualmente decrescem de amplitude.

Agoroa vamos tentar substituir um valor de k na equaçao e então resolver e plotar o resultado .

```
> pendulum := diff(theta(t),t,t) = -k*diff(theta(t),t) - theta(t);
```

$$pendulum := \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) = -k\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) - \theta(t)$$

Se k= 1/10 temos a equação abaixo. Tente valores tais como 1/2, 1, 2, 3 e 4 no comando abaixo . Você nota alguma diferença sobre a solução para valores grandes de k?

```
> subs(k=1/10,pendulum);
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) = -\frac{1}{10}\left(\frac{\partial}{\partial t}\theta(t)\right) - \theta(t)$$

```
> soln := dsolve({",theta(0)=phi,D(theta)(0)=0},theta(t));
```

$$soln := \theta(t) = \phi\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \cos\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\, t\right) + \frac{1}{399}\phi\sqrt{399}\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \sin\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\, t\right)$$

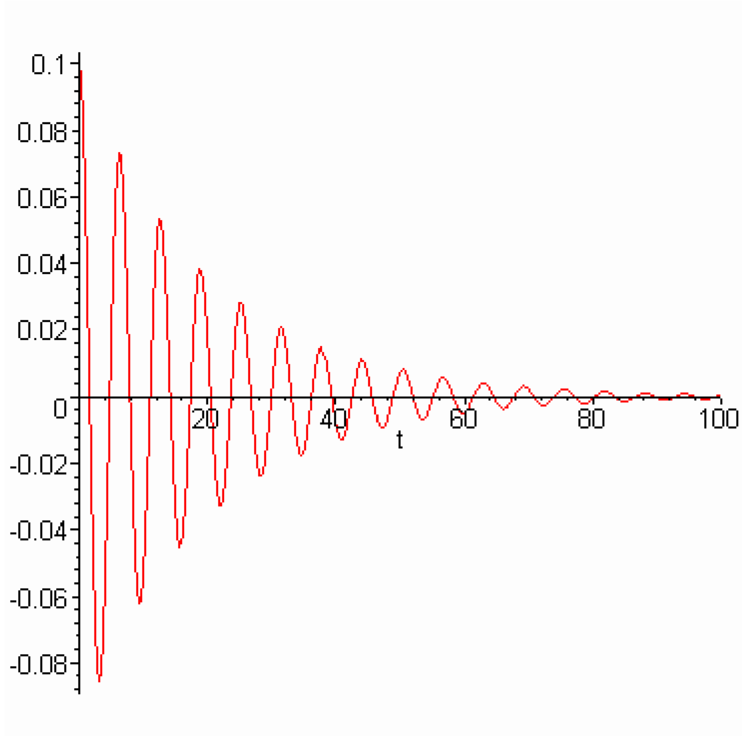
```
> subs(phi=0.1,soln);
```

$$\theta(t) = .1\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \cos\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\, t\right) + .0002506265664\sqrt{399}\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \sin\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\, t\right)$$

```
> rhs(");
```

$$.1\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \cos\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\, t\right) + .0002506265664\sqrt{399}\, \mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{20}t\right)} \sin\left(\frac{1}{20}\sqrt{399}\, t\right)$$

```
> plot(",t=0..100);
```


0.1
0.08
0.06
0.04
0.02
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
20
40
60
80
100
t

>