Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática
Prof. Doherty Andrade (DMA- UEM)
TOPICOS EM EDO - CURSO DE VERAO -DMA/UEM

Maple

Neste exemplo vamos estudar alguns modelos bem simples que tratam da dinâmica de uma população. Os modelos que vamos analisar são obtidos fornecendo a taxa de crescimento da população. A taxa de crescimento de uma população p(t), num instante t, é $\frac{dp(t)}{dt}$.

O MODELO MALTHUSIANO

Supomos que a taxa de crescimento da população é constante e igual a k. Assim temos $\frac{dp(t)}{dt} = k\,p(t)$. Este modelo e' bom para descrever a dinâmica de uma populaçao de microorganismos e num intervalo limitado de tempo.

A equação que descreve a dinamica da população é dada por.

> **diff(p(t),t) = k*p(t);**

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t) = k\,p(t)$$

A constante k é a medida que mostra como a população cresce por unidade de tempo.

Se k = 0 então a população não cresce e se k<0 a população está decrescendo.

> **populacao := ": subs(k=0,populacao);**

$$\frac{\partial}{\partial t}p(t) = 0$$

Podemos usar Maple e "dsolve" para resolver a equação diferencial. Devemos especificar as condições iniciais, i.e.,os valores de $p(t)$ e $\frac{d\,p(t)}{dt}$ em $t = 0$. Supomos que a população inicial seja igual a P0..

> **dsolve({",p(0)=P0},p(t));**

$$p(t) = P0$$

Como você pode ver, a solução é a curva constante. Isto significa que a população será sempre a mesma. Vamos plotar um gráfico de $p(t)$ contra o tempo para um particular P0 inicial = 0.1:

> **subs(P0=0.1,");**

$$p(t) = .1$$

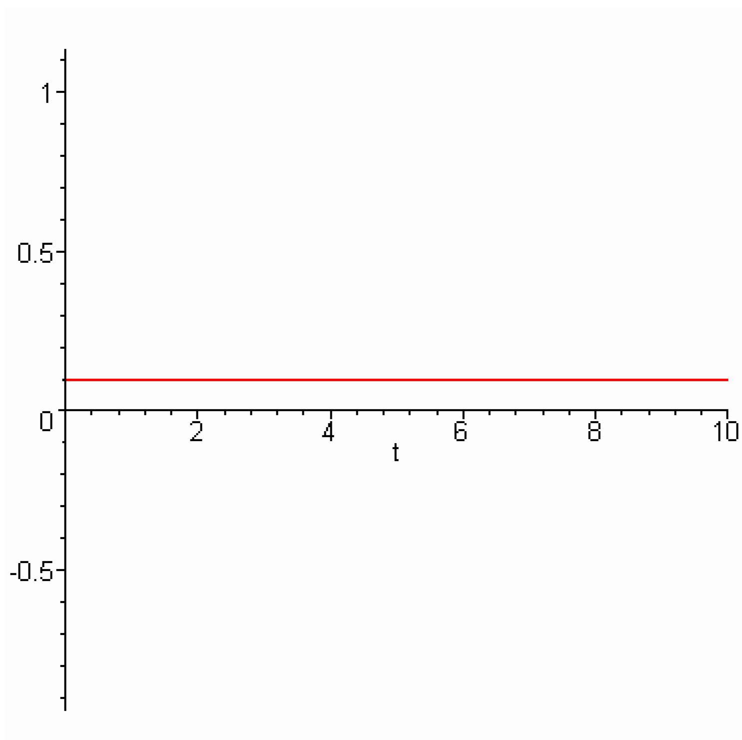
O comando RIGHT-HAND copia o lado direito da equação, que é o que vamos plotar.

> **rhs(");**

$$.1$$

Usamos o comando "plot":

> **plot(",t=0..10);**



Agora vamos experimentar para ver o que acontece se um pequeno número k, correspondendo a taxa de crescimento, for considerado.

> **subs(k=1/10,populacao);**

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t) = \frac{1}{10} p(t)$$

> **soln := dsolve({",p(0)=k},p(t));**

$$soln := p(t) = e^{\left(\frac{1}{10}t\right)} k$$

Esta solução parece mais complicada do que quando k = 0. Vejamos o comportamento num grafico com o valor de k=0.1.

> **subs(k=0.1,soln);**

$$p(t) = .1\, e^{\left(\frac{1}{10}t\right)}$$

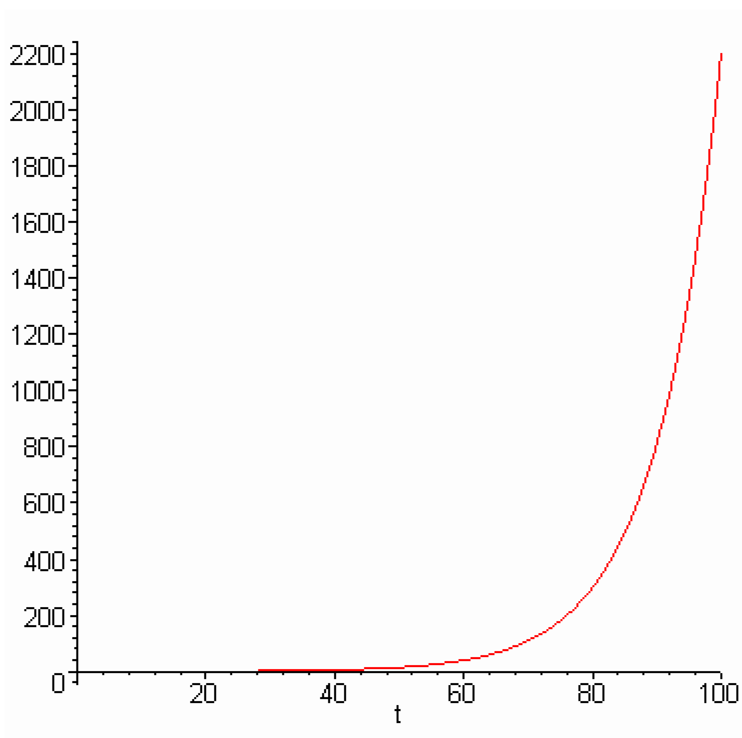
Vamos tomar o lado direito para plotar.

> **rhs(");**

$$.1\, e^{\left(\frac{1}{10}t\right)}$$

Agora o comando plot.

> **plot(",t=0..100);**



Como você pode ver a população cresce exponencialmente.

Agoroa vamos tentar substituir um valor de k <0 na equação e entao resolver e plotar o resultado.

```
> populacao := diff(p(t),t) = -k*p(t);
```

$$populacao := \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{p}(t) = -k\,\mathrm{p}(t)$$

Se k= 1/10 temos a equação abaixo. Tente valores tais como 1/2, 1, 2, 3 e 4 no comando abaixo . Você nota alguma diferença sobre a solução para valores grandes de k?

```
> subs(k=1/10,populacao);
```

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{p}(t) = -\frac{1}{10}\mathrm{p}(t)$$

```
> soln := dsolve({",p(0)=P0},p(t));
```

$$soln := \mathrm{p}(t) = \mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{10}t\right)}P0$$

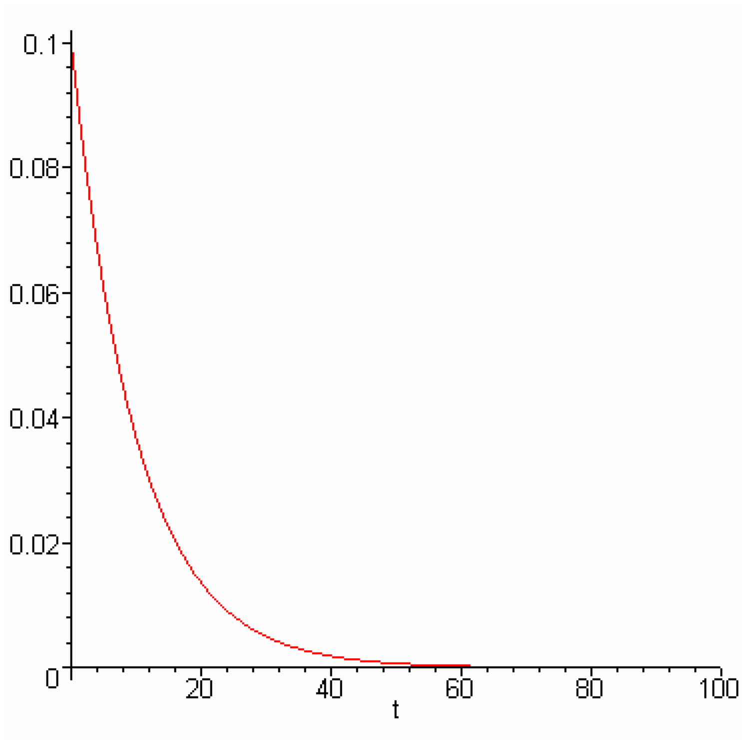
```
> subs(P0=0.1,soln);
```

$$\mathrm{p}(t) = .1\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{10}t\right)}$$

```
> rhs(");
```

$$.1\,\mathbf{e}^{\left(-\frac{1}{10}t\right)}$$

```
> plot(",t=0..100);
```



MODELO DE VERHULST

Não parece razoavel ter numa população uma taxa de crescimento constante. O modelo Verhulst leva isto em conta, a taxa de crescimento proposto por ele é dp(t)/dt = (a-bp)p, onde a e b são constantes positivas. O modelo de Verhulst supõe que a taxa de crescimento decresce linearmente com a população. Este ainda não é um modelo ideal, pois não leva em conta que a taxa de produção de novos membros da espécie depende da idade dos pais, isto é, os novos membros não contribuem de imediato para o aumento da espécie.

A equação que descreve a dinâmica da população neste modelo é dada por.

> **diff(p(t),t) = (a-b*p(t))*p(t);**

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{p}(t) = (a - b\,\mathrm{p}(t))\,\mathrm{p}(t)$$

> **vpopulacao := ": subs(a=b+1,b=2,vpopulacao);**

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{p}(t) = (3 - 2\,\mathrm{p}(t))\,\mathrm{p}(t)$$

> **subs(P0=200,");**

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{p}(t) = (3 - 2\,\mathrm{p}(t))\,\mathrm{p}(t)$$

> **dsolve({",p(0)=200},p(t));**

Como você pode ver, a solução tem uma exponencial no denominador.

$$p(t) = \frac{3}{2 - \frac{397}{200} e^{(-3\,t)}}$$

> **simplify(");**

$$p(t) = -\frac{600}{-400 + 397\, e^{(-3\,t)}}$$

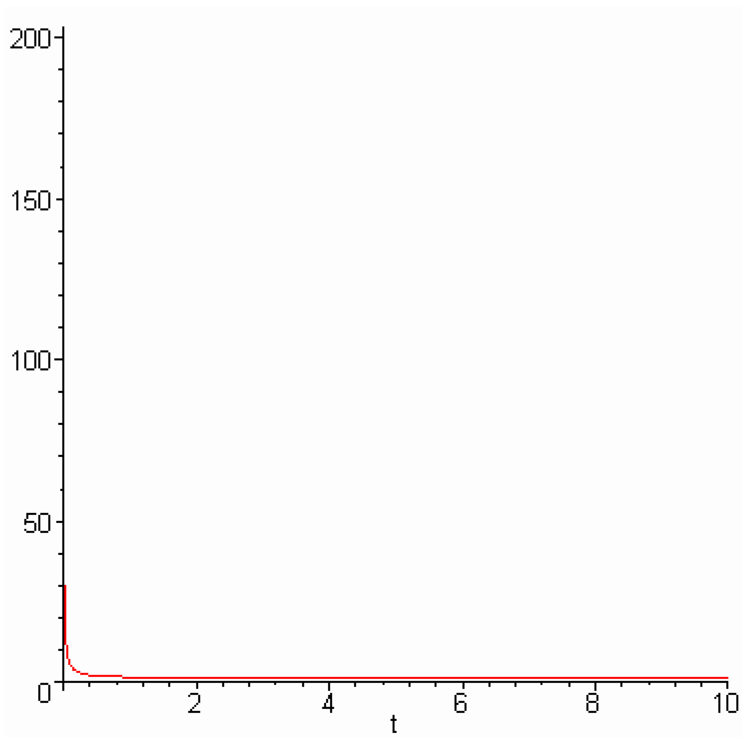
O comando RIGHT-HAND copia o lado direito da equação, que é o que vamos plotar.

> **rhs(");**

$$-\frac{600}{-400 + 397\, e^{(-3\,t)}}$$

Vamos plotar um grafico de p(t) contra o tempo para um particular P0 inicial = 200. Usamos o comando "plot":

> **plot(",t=0..10);**



>

O que acontece quando o tempo tende para o infinito? A população tende para uma população limite que é dada por a/b.

```
> #restart;
>
```