Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

Um problema de Viviani

Nicole Borwein – nicoleborwein@hotmail.com

Sumário

Resumo:[1] Nessas notas apresentamos um problema devido a Vincenzo Viviani cuja solução emprega apenas teoria de máximos e mínimos do Cálculo de uma variável. Este problema de Viviani consiste basicamente em determinar o ponto P situado sobre uma reta AB que corta duas retas paralelas $\overline{AC}$ e $\overline{QB}$ de modo que a soma das áreas dos dois triângulos ΔACP e ΔPQB assim obtidos seja mínima.

1 Introdução

Existem várias questões matemáticas envolvendo o nome de Viviani. O Vincenzo Viviani do problema que apesentamos aqui viveu em Florença de 1622 até 1703, foi aluno de Torricelli e Galileu. Escreveu vários livros de matemática e mantinha correspondência com Galileu.

Viviani é também conhecido por um livro que publicou em 1692, o mais famoso deles, onde é mencionado um templo: *Aenigma geometricum de miro opificio testudinis quadrabilis hemisphaericae, auctore D. Pio Lisci Posillo Geometra.* O Templo de Viviani, como ficou conhecido, consiste na interseção de uma esfera com um cilindro sólido.

A forma exata da interseção iludiu e confundiu os matemáticos que o estudaram por longo tempo. As figuras apresentadas (nem mesmo a do livro do professor Struik) estavam corretas. A parte principal do problema, que é a intersecção entre a esfera e o cilindro, sempre foi representada erroneamente. Só recentemente, com o uso do computador, é que temos um gráfico tridimensional de computador, e, talvez pela primeira vez em mais de 300 anos, ver a forma exata do templo de Viviani. Veja detalhes no site http://alem3d.obidos.org/pt/struik/viviani/

2 O problema de Viviani

O problema de Viviani que tratamos aqui é bem mais simples do que aquele do templo. Aqui em sua versão mais simples, o problema de Viviani consiste basicamente em determinar o ponto P situado sobre uma reta AB que corta duas retas paralelas r (determinada pelos pontos A e C) e s (determinada pelos pontos Q e B) de modo que a soma das áreas dos dois

[1]Aceito para publicação em 04–Jan–2016

triângulos ΔACP e ΔPQB obtidos seja mínima. A solução aqui apresentada está baseada em [1]. Veja a figura.

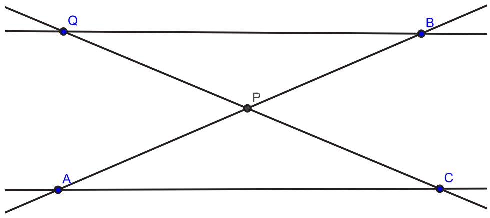

Figura 1: ilustração inicial

Vamos denotar por α a distância entre os pontos Q e B. Assim, devemos determinar α de modo que a soma das áreas dos dois triângulos seja mínima.

A reta AB é dada e portanto, podemos assumir que o ponto A seja a origem e o ponto B tenha coordenadas dadas por (β, b). Assim, podemos supor que o ponto C tenha coordenadas $(a, 0)$. Portanto, o ponto Q tenha coordenadas dadas por $(\beta - \alpha, b)$.

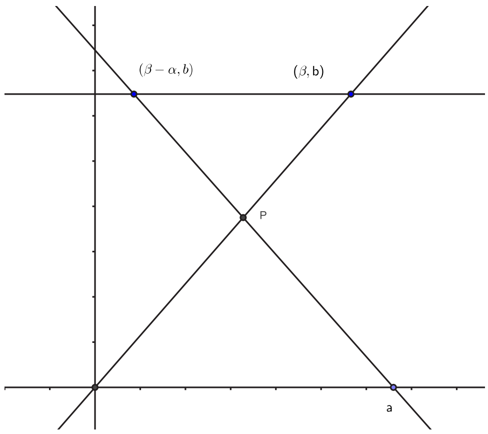

Figura 2: ilustração com a coordenadas

Um cálculo simples nos dá a equação da reta AB, que é

$$y = \frac{b}{\beta}x.$$

A reta AC é dada por

$$\frac{y - 0}{x - \alpha} = \frac{0 - b}{a - (\beta - \alpha)},$$

ou equivalentemente,

$$y = \frac{-b}{a + \alpha - \beta}(x - a).$$

O ponto P é a interseção dessas duas retas, você pode verificar facilmente que o ponto P tem as seguintes coordenadas:

$$P = \left(\frac{\alpha\beta}{a + \alpha}, \frac{ab}{a + \alpha}\right). \tag{2.1}$$

As alturas h e h_0 dos triângulos ΔACP e ΔPQB são, respectivamente,

$$h = \frac{ab}{a+\alpha}, \quad h_0 = b - \frac{ab}{a+\alpha} = \frac{b\alpha}{a+\alpha}.$$

Finalmente, a soma das áreas dos triângulos, em função de α, é dada por

$$A(\alpha) = \frac{a^2b}{2(a+\alpha)} + \frac{b\alpha^2}{2(a+\alpha)} = \frac{b(a^2+\alpha^2)}{2(a+\alpha)}.$$

A fim de minimizar a área, vamos derivar e igualar a zero, como aprendemos em Cálculo:

$$\frac{\alpha^2 + 2a\alpha - a^2}{(a+\alpha)^2} = 0.$$

De onde segue que

$$\alpha = (\sqrt{2} - 1)a.$$

Note que conhecendo-se α tem-se o ponto P dado por (2.1). Assim, tem-se que

$$P = \left(\frac{(\sqrt{2}-1)\beta}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}} \right),$$

que depende apenas das coordenadas do ponto B. ■

3 Outro problema de Viviani

Outro importante problema associado a Viviani trata da determinação de um ponto de um triângulo. Conta-se que o grande matemático amador Pierre Fermat certa vez desafiou Torricelli com a seguinte questão: encontre o ponto do triângulo cuja soma das distâncias aos vértices do triângulo seja mínima. Em uma das soluções ele utilizou o teorema de Viviani.

O ponto que resolve o problema proposto é hoje conhecido como ponto de Fermat. Veja a seguir o teorema que está relacionado a este problema, ele afirma que em um triângulo equilátero essa soma é constante e igual a altura do triângulo. A demonstração não é difícil, mas omitiremos essa prova pois não é este o nosso objetivo. Mais detalhes podem ser encontrados nos sites `http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0903/0903.0753v3.pdf` ou em `http://dadosdedeus.blogspot.com.br/2011/07/`

Teorema 1 (Viviani) *A soma das distâncias aos lados de um triângulo equilátero de um ponto pertencente ao seu interior ou a seus lados é constante e igual a medida da altura do triângulo.*

Agradecimentos: Agradeço ao professores Bernadete Suaki e Doherty Andrade pelas sugestões que tornaram esse trabalho melhor.

Referências

[1] Rivera, J. E. M., Cálculo Diferencial e Integral I. Petrópolis, Rio de Janeiro, 2007. 2

[2] de Figueiredo, D. G., Análise I. L.T.C. Rio de Janeiro, 1995.