Sequências de Farey

Prof. Doherty Andrade – DMA-UEM

Introdução

Dado um natural N a seqüência de Farey, também denominada de série de Farey de orden N, denotada por F_N, é a sequência de todas as frações irredutíveis entre 0 e 1 com denominador não excedendo N ordenadas de modo crescente:

$$\frac{0}{N},\frac{1}{N},\frac{1}{N-1},\frac{1}{N-2},\ldots,\frac{N-2}{N-1},\frac{2}{N},\frac{2}{N-1},\ldots,1.$$

Mais precisamente, F_N é a seqüência de todas as frações irredutíveis $\frac{a}{b}$ tais que $0\le\frac{a}{b}\le 1;\ 0\le b\le N$, ordenadas de modo crescente.

Note que F_N contém todos os termos de F_{N-1}. O comprimento da sequência F_N, denotado por $|F_N|$ é dado por $|F_N|=|F_{N-1}|+\varphi(N)$, onde φ é a função tociente de Euler. Como $|F_1|=2$, então $|F_N|=1+\sum_{k=1}^{N}\varphi(k)$.

O comportamento assimptótico de $|F_N|$ é $|F_N|\sim\frac{3N^2}{\pi^2}$.

Existem diversos métodos para construir a sequência F_N, por exemplo, a árvore de Stern-Brocot.

Utilizando Maple, pode-se gerar facilmente a sequência F_N:

```
> F:=n->{seq(seq(i/j,i=0..j-1),j=1..n)};

> F(7);#é um exemplo.
```

Frações que são termos vizinhos em sequência de Farey são chamados de pares de Farey. Os pares de Farey têm a seguinte propriedade:

Se $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ são pares de Farey, então $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bd}$.

Note que $\frac{c}{d}-\frac{a}{b}=\frac{1}{bd}$ se,e somente se, $bc-ad=1$. Em outras palavras, $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ é um par de Farey se, e somente se, $bc-ad=1$, isto é, ad e bc são inteiros consecutivos.

Note que $bc-ad=1$ é uma equação que lembra as equações diofantinas.

As séries de Farey estão relacionadas a diversos resultados da teoria dos números, à geometria (teorema de Pick) e em particular às equações diofantinas. A resolução de muitos problemas de aritmética depende da resolução de equações do tipo $ax+by=c$. Estas equações pertencem a um tipo de equação chamada Diofantinas, em homenagem a Diofantus de Alexandria (?-250 DC) que escreveu uma importante obra entitulada “Arithmetica" onde tratou destas e outras equações e suas soluções inteiras.

A equação $f(x_1,\cdots,x_n)=0$ é chamada de equação diofantina quando f é um polinômio de coeficientes inteiros e quando se exige que as soluções sejam inteiras. Vamos estudar um pouco do tipo mais simples das equações diofantinas, isto é, equações do tipo $ax+by=c$.

Perguntas:
Em que condições possui solução inteira?
Quantas soluções inteiras existem?
Como se determinam as soluções inteiras?
As respostas serão dadas abaixo e dependem do conceito de MDC.

Teorema 1. A equação $ax+by=c$ tem solução inteira se, e somente se, $MDC(a,b)\mid c$.
Demonstração: Sejam x_0 e y_0 solução da equação, isto é, $ax_0+by_0=c$.
Como $MDC(a,b)\mid a$ e $MDC(a,b)\mid b$, segue que $MDC(a,b)\mid c$. Reciprocamente, se $MDC(a,b)\mid c$, existem inteiros m e n tais que $ma+nb=MDC(a,b)$, e existe d inteiro tal que $c=dMDC(a,b)$. Logo, $c=dMDC(a,b)=d(ma+nb)=(dm)a+(dn)b$.
Portanto, $x_0=dm$ e $y_0=dn$ é solução. □

Note que dada uma equação $ax+by=c$, se $MDC(a,b)$ divide c, sejam $a_1=\frac{a}{MDC(a,b)}$, $b_1=\frac{b}{MDC(a,b)}$ e $c_1=\frac{c}{MDC(a,b)}$. Então a equação acima pode ser reduzida a $a_1x+b_1y=c_1$ com $MDC(a_1,b_1)=1$.

Teorema 2. Seja x_0 e y_0 solução particular da equação $ax+by=c$ com $MDC(a,b)=1$. Então, x,y é solução se, se somente se, $x=x_0+tb$ e $y=y_0-ta$, para algum $t\in\mathbb{Z}$.
Demonstração: Como x_0 e y_0 é solução, então $c=ax+by=ax_0+by_0$ implica que

(*). $a(x-x_0)=b(y_0-y)$.

Segue que a divide (y_0-y) e b divide $(x-x_0)$. Logo, $y_0-y=ta$ e $x-x_0=mb$, para algum $t\in\mathbb{Z}$ e para algum $m\in\mathbb{Z}$. Substituindo em (*) temos $amb=bta$ e assim $m=t$. Portanto, $x=x_0+tb$ e $y=y_0-ta$. A recíproca é imediata.

Problemas
1. De quantas maneiras diferentes pode-se comprar 100 reais de selos de 5 e 7 reais, de modo que se gaste todo dinheiro.
2. Um macaco sobe uma escada de dois em dois degraus e sobra um degrau, sobe de 3 em 3 degraus e sobram 2. Quantos degraus tem a escada sabendo que o número de degraus é múltiplo de 7 e está compreendido entre 40 e 100.

Teorema de Pick

No plano cartesiano xy consideremos a malha composta de linhas horizontais e verticais com coordenadas inteiras. Assim, também os pontos (m,n) de interseção entre elas possuem coordenadas inteiras.

Um ponto (m,n) dessa malha é dito visível se o segmento de reta unindo a origem a este ponto (m,n) não contém outros pontos da malha.

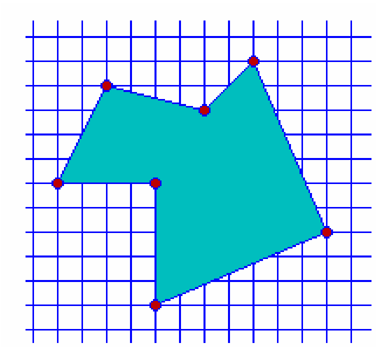
Proposição 3 : um ponto (m,n) da malha é visível se, e somente se, $MDC(m,n)=1$.

Se (a,b) e (c,d) são pontos da malha com $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$ é um par de Farey, então $bc-ad=1$. Da Geometria Analítica, sabemos que área do triângulo com vértices na origem e em (a,b) e (c,d) é dado por

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} c & a \\ d & b \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left(bc-ad\right)=\frac{1}{2}.$$

Assim, segue que a área de um triângulo com vértices na malha formando um par de Farey é igual a $\frac{1}{2}$. Este é um ponto crucial para a demonstração do teorema de Pick.

Sendo P um polígono simples, com vértices sobre os nós de uma malha, os pontos do reticulado sobre o contorno de P serão chamados pontos de fronteira e os pontos do reticulado que se encontram no interior de P serão chamados pontos interiores.



Teorema de Pick 4: Seja **P** um polígono simples com vértices sobre a malha. Se B é o número de pontos de fronteira e I o número de pontos interiores, então a área de **P** é dada por $A(\mathbf{P})=\frac{1}{2}B+I-1$.

Relação entre a Fórmula de Pick e a Fórmula de Euler: *O Teorema de Pick é equivalente à Fórmula de Euler.*

Relação da sequência de Farey com os círculos de Ford

Os círculos de Ford, assim denominados em homenagem a Lester R. Ford (1886-1975) que introduziu esse conceito em 1938 (*American Mathematical Monthly*, volume 45, number 9, pages 586-601).

Dado uma fração irredutível $\frac{p}{q}$ em F_N existe um círculo de Ford $C\left[{}^{p}\!/_{q}\right]$ que é o círculo de raio $r = \frac{1}{2q^2}$ e centro $\left(\frac{p}{q}, \frac{1}{2q^2}\right)$.

Pode-se provar que dois círculos de Ford ou são disjuntos ou são tangentes entre si. Além disso, se $0 < \frac{p}{q} < 1$ então os círculos de Ford que são tangentes a $C\left[{}^{p}\!/_{q}\right]$ são os os círculos para frações que foram par de Farey com $\frac{p}{q}$ em alguma sequência de Farey.

Bibliografia

[1] Hardy, G.H. & Wright, E.M. (1979) *An Introduction to the Theory of Numbers* (Fifth Edition). Oxford University Press. ISBN 0-19-853171-0.

[2] Norman Routledge, "Computing Farey Series," The Mathematical Gazette, Vol. **29** (No. 523), 55–62 (March 2008).

[3] Andrade, D. - A Formula de Pick, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática, Vol. 9 No. (1988) 119-126.

[4] Varberg, D.E. **Pick's Theorem Revisited**. The Am Math Monthly v 92 (1985), pp 584-587.

[5] Andrade, D., **Teorema de Pick**. Disponível em http://www.dma.uem.br/kit/pick.html.