Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

O Teorema de Radon-Nikodým

Angela Mognon[1]
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática - 87020-900 Maringá-PR, Brazil

[1]Aluna de Mestrado em Matemática, UEM.

Sumário

Resumo: Nestas notas apresentamos em detalhes a demonstração do Teorema de Radon-Nikodým e exibimos exemplos em que as hipóteses do teorema não podem ser enfraquecidas. Como aplicação apresentamos o Teorema de Representação de Riesz.

0.1 Introdução

Por $(X, \mathbb{X})$ denotamos um espaço mensurável, isto é, um conjunto X munido de uma σ-álgebra $\mathbb{X}$. Lembramos que uma carga sobre um espaço mensurável $(X, \mathbb{X})$ é uma função real λ definida sobre a σ-álgebra $\mathbb{X}$ tal que

$$\lambda(\emptyset) = 0$$
$$\lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n),$$

para qualquer sequência de subconjuntos disjuntos (E_n) de $\mathbb{X}$.

Se λ é uma carga sobre $\mathbb{X}$, então um conjunto $P \in \mathbb{X}$ é dito ser positivo com relação a λ se
$$\lambda(E \cap P) \geq 0, \forall E \in \mathbb{X}.$$

Analogamente, um conjunto $N \in \mathbb{X}$ é dito ser negativo com relação a λ se
$$\lambda(E \cap N) \leq 0, \forall E \in \mathbb{X}.$$

Um conjunto $M \in \mathbb{X}$ é dito ser nulo com relação a λ se

$$\lambda(E \cap M) = 0, \forall E \in \mathbb{X}.$$

O seguinte resultado estabelece a relação entre conjuntos positivos e negativos com uma carga λ.

Teorema 1 (Decomposição de Hahn) *Se λ é uma carga sobre $\mathbb{X}$, então existem conjuntos P e N em $\mathbb{X}$, com $X = P \cup N$, e $P \cap N = \emptyset$ tal que P é positivo e N é negativo com respeito a λ.*

Seja λ uma carga sobre $\mathbb{X}$. O Teorema da Decomposição de Hahn garante a existência de um conjunto P e um conjunto N mensuráveis, chamados positivo e negativo, respectivamente. A variação positiva λ^+ e a variação negativa λ^- de λ são definidas por

$$\lambda^+(E) = \lambda(E \cap P)$$

$$\lambda^-(E) = -\lambda(E \cap N),$$

para todo $E \in \mathbb{X}$.

A variação total de λ é a medida $|\lambda|$ definida por

$$|\lambda|(E) = \lambda^+(E) - \lambda^-(E),$$

para todo $E \in \mathbb{X}$.

O Teorema de Decomposição de Jordan, afirma que toda carga é diferença de duas medidas.

Teorema 2 (Decomposição de Jordan) *Se λ é uma carga sobre $\mathbb{X}$, então λ é a diferença de duas medidas finitas sobre $\mathbb{X}$. Em particular, λ é a diferença de λ^+ e λ^-. Além disso, se $\lambda = \mu - \nu$ onde μ, ν são medidas finitas sobre $\mathbb{X}$, então*

$$\mu(E) \geq \lambda^+(E), \qquad e \qquad \nu(E) \geq \lambda^-(E),$$

para todo E em $\mathbb{X}$.

0.2 A demonstração do Teorema de RN

Sejam λ e μ duas medidas sobre $\mathbb{X}$. Dizemos que λ é absolutamente contínua com relação a μ se, $\mu(E) = 0$ implica que $\lambda(E) = 0$. Neste caso, escrevemos $\lambda \ll \mu$.

Uma carga λ é absolutamente contínua com relação a uma carga μ quando a variação total $|\lambda|$ for absolutamente contínua com relação a variação total $|\mu|$.

Teorema 3 (Radon-Nikodým) *Sejam λ e μ medidas σ-finitas definidas sobre $\mathbb{X}$. Suponha λ absolutamente contínua com relação a μ. Então, existe uma função $f \in M^+(X, \mathbb{X})$ tal que*

$$\lambda(E) = \int_E f(x)d\mu, \ \forall E \in \mathbb{X}. \tag{2.1}$$

Além disso, a função f é unicamente determinada a menos de um conjunto de μ-medida nula.

Demonstração: Vamos mostrar primeiramente que o resultado vale sob as hipóteses que $\lambda\ (X)$ e $\mu\ (X)$ são finitas.

Se $c > 0$, seja $P(c)$, $N(c)$ a decomposição de Hahn de X para a carga $\lambda - c\mu$. Se $k \in \mathbb{N}$, considere os conjuntos mensuráveis

$$A_1 = N(c), \qquad A_{k+1} = N((k+1)c) \setminus \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

É claro que os conjuntos A_k, $k \in \mathbb{N}$, são disjuntos e que

$$\bigcup_{j=1}^{k} N(jc) = \bigcup_{j=1}^{k} A_j.$$

Segue que

$$A_k = N(kc) \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} N(jc) = N(kc) \cap \bigcup_{j=1}^{k-1} P(jc).$$

Assim, se E é um subconjunto mensurável de A_k, então $E \subseteq N(kc)$ e $E \subseteq P((k-1)c)$, daí

$$(k-1)c\mu(E) \leq \lambda(E) \leq kc\mu(E). \tag{2.2}$$

Defina B por

$$B = X \setminus \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j = \bigcap_{j=1}^{\infty} P(jc),$$

assim $B \subseteq P(kc)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Isto implica que

$$0 \leq kc\mu(B) \leq \lambda(B) \leq \lambda(X) < +\infty,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, daí $\mu(B) = 0$. Como $\lambda \ll \mu$, obtemos que $\lambda(B) = 0$.

Seja f_c definida por

$$f_c(x) = \begin{cases} (k-1)c, \text{ se } x \in A_k \\ 0, \text{ se } x \in B. \end{cases}$$

Se E é um conjunto mensurável arbitrário, então E é a união dos conjuntos disjuntos $E \cap B$, $E \cap A_k$, $k \in \mathbb{N}$, segue de (2.2) que

$$\int_E f_c d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E (f_c + c) d\mu \leq \int_E f_c d\mu + c\mu(X).$$

Aplicando a construção anterior para $c = 2^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência de funções, denotadas por f_n, tais que

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_n d\mu + 2^{-n}\mu(X), \tag{2.3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Seja $m \geq n$. Observemos que

$$\int_E f_n d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_m d\mu + 2^{-m}\mu(X),$$

$$\int_E f_m d\mu \leq \lambda(E) \leq \int_E f_n d\mu + 2^{-n}\mu(X),$$

de onde obtemos que

$$\left| \int_E (f_n - f_m) d\mu \right| \leq 2^{-n}\mu(X),$$

para todo $E \in \mathbb{X}$.

Se considerarmos os conjuntos onde o integrando é positivo e negativo, e combinando, deduzimos que

$$\int_E |f_n - f_m| \, d\mu \leq 2^{-n+1}\mu(X)$$

sempre que $m \geq n \in \mathbb{N}$.

Assim, a sequência (f_n) converge na medida para uma função f. Como $f_n \in M^+$, segue que $f \in M^+$. Além disso,

$$\left| \int_E f_n d\mu - \int_E f d\mu \right| \leq \int_E |f_n - f| \, d\mu \leq \int |f_n - f| \, d\mu,$$

donde concluimos, de (2.3), que

$$\lambda(E) = lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu,$$

para todo $E \in \mathbb{X}$. Isto completa a demonstração da existência da função no caso onde ambas, λ e μ, são medidas σ-finitas.

Afirmamos que f é unicamente determinada, a menos de um conjunto de medida nula. De fato, suponha que $f, h \in M^+$ e que

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu = \int_E h d\mu,$$

para todo $E \in \mathbb{X}$.

Sejam

$$E_1 = \{x : f(x) > h(x)\}$$

e

$$E_2 = \{x : f(x) < h(x)\}.$$

Logo, podemos concluir que $f(x) = h(x)$ quase sempre na medida μ.

Suponhamos agora que λ e μ são σ-finitas e seja (X_n) uma sequência crescente de conjuntos em $\mathbb{X}$ tal que

$$\lambda(X_n) < \infty, \quad \mu(X_n) < \infty.$$

Aplicamos o argumento anterior para obtermos uma função h_n em M^+ que é nula para $x \notin X_n$, tal que se E é um subconjunto mensurável de X_n, então

$$\lambda(E) = \int_E h_n d\mu.$$

Se $n \leq m$, então $X_n \subseteq X_m$ e segue que

$$\int_E h_n d\mu = \int_E h_m d\mu$$

para qualquer subconjunto E de X_n. Da unicidade de h_n, segue que $h_n(x) = h_m(x)$ para quase todo x em X_n, sempre que $m \geq n$.

Seja $f_n = \sup\{h_1, ..., h_n\}$, assim (f_n) é uma sequência monótona crescente em M^+, e seja $f = \lim f_n$. Se $E \in \mathbb{X}$, então

$$\lambda(E \cap X_n) = \int_E f_n d\mu.$$

Como $(E \cap X_n)$ é uma sequência crescente de conjuntos com união E, segue do Teorema da Convergência Monótona que

$$\lambda(E) = lim \lambda(E \cap X_n) = lim \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

A unicidade da f é estabelecida como anteriormente. $\square$

0.3 Exemplos

Nesta seção apresentaremos situações que provam que as hipóteses do Teorema de Radon Nikodým não podem ser retiradas.

1. Seja $X = [0,1]$ e seja $\mathbb{X}$ os subconjuntos de Borel de X. Se μ é a medida de contagem sobre $\mathbb{X}$ e λ é a medida de Lebesgue sobre $\mathbb{X}$, então λ é uma medida finita e $\lambda \ll \mu$, mas o Teorema Radon-Nikodým é falso.

Temos λ finita e $\lambda \ll \mu$. Mas não existe f tal que

$$\lambda([0,1]) = \int_{[0,1]} f d\mu.$$

De fato, suponha que exista, logo

$$0 = \lambda(\{x\}) = \int_{\{x\}} f d\mu = \int f(x)\chi_{\{x\}} d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x),$$

desse modo, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Portanto,

$$1 = \lambda([0,1]) = \int_{[0,1]} 0 d\mu = 0.$$

Contradição!

2. Seja X um subconjunto não enumerável e $\mathbb{X}$ a família de todos os subconjuntos E de X tais que E ou $X \setminus E$ é enumerável. Seja $\mu(E)$ igual ao número de elementos de E se E é finito, e igual $+\infty$ caso contrário, e seja $\lambda(E) = 0$ se E é enumerável, e igual a $+\infty$ se E é não enumerável. Então $\lambda \ll \mu$, mas o Teorema de Radon-Nikodým é falso.

Temos que $\lambda \ll \mu$ pois se $\mu(E) = 0$ então $E = \emptyset$, logo $\lambda(E) = 0$. Mas não existe f definida em $[0,1]$ com valores em $[0,\infty]$ mensurável tal que

$$\lambda(E) = \int_E f d\mu.$$

De fato, suponha que o teorema seja verdadeiro e tome $\mu(\{x\}) = 1$, logo

$$\lambda(\{x\}) = 0 = \int_{\{x\}} f d\mu = \int f(x)\chi_{\{x\}} d\mu = f(x)\mu(\{x\}) = f(x).$$

Logo $f(x) = 0$, para todo $x \in X$. Portanto

$$\infty = \lambda(X) = \int 0 d\mu = 0.$$

Contradição!

0.4 Aplicação: Teorema de Representação de Riesz

Nesta seção apresentaremos uma aplicação do Teorema de Radon Nikodým.

Um funcional linear em $L^p(X, \mathbb{X}, \mu)$ é uma aplicação $G : L^p \to \mathbb{R}$ tal que

$$G(af + bg) = aG(f) + bG(g),$$

para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in L^p$.

Um funcional linear G é limitado se existe uma constante M tal que

$$|G(f)| \leq M\|f\|_p,$$

para todo $f \in L^p$.

Neste caso, a norma de um funcional linear limitado G é definida como

$$\|G\| = \sup\{|G(f)|; f \in L^p, \|f\|_p \leq 1\}.$$

Dado $g \in L^q$, onde $q = 1$ se $p = \infty$ e $q = \frac{p}{p-1}$ caso contrário, podemos definir um funcional linear limitado sobre L^p. Basta definir o seguinte funcional

$$G(f) = \int fgd\mu,$$

para todo $f \in L^p$.

É fácil ver que G é um funcional linear. A limitação de G é uma consequência da desigualdade de Hölder e $\|G\| = \|g\|_q$.

O Teorema de Representação de Riesz diz que todos os funcionais lineares limitados sobre L^p são desta forma.

Teorema 4 (Representação de Riesz para L^1) . *Se $(X, \mathbb{X}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finita e G é um funcional linear limitado sobre $L^1(X, \mathbb{X}, \mu)$ então existe $g \in L^\infty(X, \mathbb{X}, \mu)$ tal que*

$$G(f) = \int fgd\mu.$$

Além disso, $\|G\| = \|g\|_\infty$.

Demonstração: Vamos supor primeiramente $\mu(X) < \infty$ e que G é positivo. Defina $\lambda(E) = G(\chi_E)$ para todo $E \in \mathbb{X}$. Claramente $\lambda(\emptyset) = 0$. Se (E_n) é uma sequência crescente em $\mathbb{X}$ e $E = \cup E_n$ então $(\chi_{\{E_n\}})$ converge pontualmente para $\chi_{\{E\}}$. Como $\mu(E) < \infty$, então $\chi_{\{E_n\}}$ converge para $\chi_{\{E\}}$ em L_1. Como

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda(E) - \lambda(E_n) &= G(\chi_{\{E\}}) - G(\chi_{\{E_n\}}) \\ &= G(\chi_{\{E\}} - \chi_{\{E_n\}}) \leq \|G\| \|\chi_{\{E\}} - \chi_{\{E_n\}})\|_1, \end{aligned}$$

segue que λ é uma medida.

Além disso, se $M \in \mathbb{X}$ e $\mu(M) = 0$, então $\lambda(M) = 0$. Assim, $\lambda \ll \mu$.

Aplicando o Teorema de Radon- Nikodým, obtemos uma função real não negativa mensurável sobre $\mathbb{X}$ tal que

$$G(\chi_{\{E\}}) = \lambda(E) = \int \chi_{\{E\}} g d\mu$$

para todo $E \in \mathbb{X}$.

Da linearidade de G segue que

$$G(\varphi) = \int \varphi g d\mu$$

para toda função simples $\mathbb{X}$-mensurável φ.

Se f é uma função não negativa em L^1, seja (φ_n) uma sequência crescente de funções simples convergindo quase sempre em L^1 para f. Da limitação de G, temos que

$$G(f) = \lim G(\varphi_n).$$

Além disso, do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$G(f) = \lim \int \varphi_n g d\mu = \int f g d\mu,$$

para toda $f \in L^1$.

Suponha agora que μ é apenas σ-finita. Então existe uma sequência crescente de conjuntos mensuráveis de medida finita (F_n) tal que $X = \cup F_n$. Como anteriormente, temos que existem funções não negativas g_n tais que

$$G(f\chi_{F_n}) = \int f \chi_{F_n} g_n d\mu,$$

para toda f em L^1. Se $m \leq n$ já vimos que $g_m(x) = g_n(x)$, para quase todo $x \in F_m$. Assim, obtemos uma função g que representa G.

Se G é um funcional linear limitado arbitrário sobre L^1, podemos escrever $G = G^+ - G^-$, onde G^+ e G^- são funcionais lineares positivos limitados. Aplicando o mesmo procedimento para G^+ e G^-, obtemos funções não negativas mensuráveis g^+ e g^- que representam G^+ e G^-, respectivamente. Considerando $g = g^+ - g^-$, obtemos a representação

$$G(f) = \int fg d\mu$$

para todo $f \in L^1$.

Para mostrar a igualdade da norma, seja $f \in L^1$ e $c > 1$. Seja

$$E_c = \{x; |g(x)| \geq c\|G\|\}.$$

Defina

$$f_c(x) = \begin{cases} \pm 1, \text{ se } \pm g(x) \geq c\|G\| \\ 0, \text{ se } x \in E_c. \end{cases}$$

Então, podemos verificar que

$$c\|G\|\mu(E_c) \leq G(f_c) \leq \|G\|\mu(E_c).$$

O que é possível, apenas se $\|G\| = 0$ ou $\mu(E_c) = 0$. Se $G \neq 0$, então

$$|g(x)| \leq \|G\| = \|g\|_\infty.$$

□

O Teorema de representação de Riesz vale para funcionais definidos sobre espaços L^p.

Teorema 5 (Representação de Riesz para $L^p, 1 < p < \infty$) . *Se $(X, \mathbb{X}, \mu)$ é um espaço de medida σ-finita e G é um funcional linear limitado sobre $L^p(X, \mathbb{X}, \mu)$, então existe $g \in L^q(X, \mathbb{X}, \mu)$ tal que*

$$G(f) = \int fg d\mu,$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Além disso, $\|G\| = \|g\|_q$.

Referências Bibliográficas

[1] Robert G. Bartle, Os Elementos de Integração, John Wiley e Sons, New York.