Mudança de Base

Doherty Andrade

DMA - F67 - Sala 205
e-mail:doherty@uem.br

Em muitas situações trabalhar com uma base particular de V^3 pode simplificar o trabalho.

Dado uma base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ e outra base $\beta' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ queremos determinar como as coordenadas de um vetor $\overrightarrow{v}$ na base β se relaciona com as coordenadas deste mesmo vetor $\overrightarrow{v}$ na base β'.

Esta relação é apresentada por uma matriz. Veremos como obter esta matriz.

Como β e β' são bases, existem escalares reais tais que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + x_3\overrightarrow{u_3}\\ \overrightarrow{v} &= y_1\overrightarrow{w_1} + y_2\overrightarrow{w_2} + y_3\overrightarrow{w_3}.\end{aligned}$$

Isto é, as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ nas bases β e β', respectivamente, são:

$$[\overrightarrow{v}]_\beta = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_\beta, \quad [\overrightarrow{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\beta'}.$$

Já que $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ é uma base, podemos escrever cada um dos vetores $\overrightarrow{w_i}, i = 1, 2, 3$ como combinação linear dos vetores da base β:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w_1} &= a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{21}\overrightarrow{u_2} + a_{31}\overrightarrow{u_3} \\
\overrightarrow{w_2} &= a_{12}\overrightarrow{u_1} + a_{22}u_2 + a_{32}\overrightarrow{u_3} \\
\overrightarrow{w_3} &= a_{13}\overrightarrow{u_1} + a_{23}\overrightarrow{u_2} + a_{33}\overrightarrow{u_3}.
\end{aligned}$$

Substituindo os valores de $\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}$ na expressão de $\overrightarrow{v}$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v} &= y_1\overrightarrow{w_1} + y_2\overrightarrow{w_2} + y_3\overrightarrow{w_3} \\
&= y_1\left(a_{11}\overrightarrow{u_1} + a_{21}\overrightarrow{u_2} + a_{31}\overrightarrow{u_3}\right) \\
&+ y_2\left(a_{12}\overrightarrow{u_1} + a_{22}\overrightarrow{u_2} + a_{32}\overrightarrow{u_3}\right) \\
&+ y_3\left(a_{13}\overrightarrow{u_1} + a_{23}\overrightarrow{u_2} + a_{33}\overrightarrow{u_3}\right) \\
&= \left[a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3\right]\overrightarrow{u_1} \\
&+ \left[a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3\right]\overrightarrow{u_2} \\
&+ \left[a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3\right]\overrightarrow{u_3}
\end{aligned}$$

Assim, temos $\overrightarrow{v}$ escrito na base β de duas formas e estas têm de serem iguais:

$$\begin{aligned}
x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 \\
x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 \\
x_3 &= a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3.
\end{aligned}$$

Em forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\beta'} . \tag{1}$$

A matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

denotada por $[M]_{\beta}^{\beta'}$ é chamada matriz mudança da base β' para a base β.

Resumindo: a relação entre as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ nas duas bases é dada por:

$$[\overrightarrow{v}]_{\beta} = M[\overrightarrow{v}]_{\beta'}$$

Exemplo: Consideremos $\beta = \{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ e $\beta' = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}\}$ bases de V^3, onde
$\overrightarrow{w_1} = -3\overrightarrow{i} + 1\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k}, \overrightarrow{w_2} = \overrightarrow{i} - 2\overrightarrow{j} + 1\overrightarrow{k}, \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

Note que

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{w_1} &= -3\,\overrightarrow{i} + 1\,\overrightarrow{j} + 1\,\overrightarrow{k} \\
\overrightarrow{w_2} &= 1\,\overrightarrow{i} - 2\,\overrightarrow{j} + 1\,\overrightarrow{k} \\
\overrightarrow{w_3} &= 1\,\overrightarrow{i} + 2\,\overrightarrow{k} + 0\,\overrightarrow{k}.
\end{aligned}$$

Assim matriz mudança da base β' para a base β é

$$[M]_{\beta}^{\beta'} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Se conhecemos que $[\overrightarrow{v}]_{\beta'} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\beta'}$ para determinar as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ na base β, basta efetuar o produto dado em (1):

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{\beta} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}_{\beta'}$$

e obter

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_\beta = \begin{bmatrix} -4 \\ 10 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Se conhecemos que

$$[\overrightarrow{v}]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_\beta$$

para determinar as coordenadas de $\overrightarrow{v}$ na base β', basta resolver o sistema de equações lineares:

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{\beta} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\beta'} .$$

Conhecendo a inversa da matriz, a solução é imedidata, pois

$$[\overrightarrow{v}]_{\beta'} = M^{-1}[\overrightarrow{v}]_{\beta}.$$

Como

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -2/11 & 1/11 & 4/11 \\ 2/11 & -1/11 & \frac{7}{11} \\ 3/11 & 4/11 & \frac{5}{11} \end{bmatrix},$$

obtemos que

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\beta'} = \begin{bmatrix} -2/11 & 1/11 & 4/11 \\ 2/11 & -1/11 & \frac{7}{11} \\ 3/11 & 4/11 & \frac{5}{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}_{\beta}.$$

Donde segue que

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}_{\beta'} = \begin{bmatrix} \frac{21}{11} \\ \frac{34}{11} \\ \frac{46}{11} \end{bmatrix}.$$

Já observamos as facilidades que uma base ortogonal nos traz. O processo de ortogonalização de Gram-Schmidt permite transformar uma base de vetores em outra base de vetores ortogonais.

Vamos começar com uma base de 2 vetores:
Seja $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ uma base para V^2. Faça

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1'} &= \overrightarrow{v_1} \\ \overrightarrow{v_2'} &= \overrightarrow{v_2} - \frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\|\overrightarrow{v_1'}\|^2} \overrightarrow{v_1'} \end{aligned}$$

Os vetores $\overrightarrow{v_1'}, \overrightarrow{v_2'}$ são ortogonais não nulos. Note que v_2' é obtido de v_2, subtraindo-se deste a projeção do vetor v_2 na direção de v_1'.

Vamos apresentar o processo com uma base de 3 vetores:
Seja $\beta = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ uma base para V^3. Faça

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1'} &= \overrightarrow{v_1} \\
\overrightarrow{v_2'} &= \overrightarrow{v_2} - \frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\| \overrightarrow{v_1'} \|^2} \overrightarrow{v_1'} \\
\overrightarrow{v_3'} &= \overrightarrow{v_3} - \frac{\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_2'}}{\| \overrightarrow{v_2'} \|^2} \overrightarrow{v_2'} - \frac{\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\| \overrightarrow{v_1'} \|^2} \overrightarrow{v_1'}.
\end{aligned}
$$

Vamos ilustrar como estes vetores ortogonais foram determinados: Tomemos $\overrightarrow{v_1'} = \overrightarrow{v_1}$ e vamos determinar escalar c tal que $\overrightarrow{v_2'} = \overrightarrow{v_2} - c\overrightarrow{v_1'}$ seja ortogonal a $\overrightarrow{v_1'}$. Portanto, deve ocorrer $\overrightarrow{v_2'} \cdot \overrightarrow{v_1'} = 0$. Disto segue que

$$c = \frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\|\overrightarrow{v_1'}\|^2}.$$

Agora vamos procurar um vetor $\overrightarrow{v_3'} = \overrightarrow{v_3} - c_1 \overrightarrow{v_1'} - c_2 \overrightarrow{v_2'}$ que seja ortogonal a $\overrightarrow{v_1'}$ e a $\overrightarrow{v_2'}$ simultaneamente. Por analogia ao caso anterior, devemos determinar escalares c_1, c_2 tais que $\overrightarrow{v_3'} \cdot \overrightarrow{v_1'} = 0$ e $\overrightarrow{v_3'} \cdot \overrightarrow{v_2'} = 0$.
Note que

$$\overrightarrow{v_3'} \cdot \overrightarrow{v_1'} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_1'} - c_1 \overrightarrow{v_1'} \cdot \overrightarrow{v_1'} - c_2 \overrightarrow{v_2'} \cdot \overrightarrow{v_1'} = 0 \Leftrightarrow c_1 = \frac{\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\| \overrightarrow{v_1'} \|^2}$$

e

$$\overrightarrow{v_3'} \cdot \overrightarrow{v_2'} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_2'} - c_1 \overrightarrow{v_1'} \cdot \overrightarrow{v_2'} - c_2 \overrightarrow{v_2'} \cdot \overrightarrow{v_2'} = 0 \Leftrightarrow c_2 = \frac{\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_2'}}{\| \overrightarrow{v_2'} \|^2}.$$

Este procedimento pode ser generalizado para uma quantidade maior de vetores LI.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1'} &= \overrightarrow{v_1} \\
\overrightarrow{v_2'} &= \overrightarrow{v_2} - \frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\|\overrightarrow{v_1'}\|^2}\overrightarrow{v_1'} \\
\vdots &= \vdots \\
\overrightarrow{v_n'} &= \overrightarrow{v_n} - \frac{\overrightarrow{v_n} \cdot \overrightarrow{v_{n-1}'}}{\|\overrightarrow{v_{n-1}'}\|^2}\overrightarrow{v_{n-1}'} - \cdots - \frac{\overrightarrow{v_n} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\|\overrightarrow{v_1'}\|^2}\overrightarrow{v_1'}.
\end{aligned}$$

Exemplo: Considere a base $\beta = \{\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{v_2} = 2\overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{k}\}$. Vamos, à partir desta base, determinar outra ortogonal. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, temos:

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{v_1'} &= \overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k} \\
\overrightarrow{v_2'} &= \overrightarrow{v_2} - \frac{\overrightarrow{v_2} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\|\overrightarrow{v_1'}\|^2}\overrightarrow{v_1'} = -\overrightarrow{i} + \overrightarrow{j} + 0\overrightarrow{k} \\
\overrightarrow{v_3'} &= \overrightarrow{v_3} - \frac{\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_2'}}{\|\overrightarrow{v_2'}\|^2}\overrightarrow{v_2'} - \frac{\overrightarrow{v_3} \cdot \overrightarrow{v_1'}}{\|\overrightarrow{v_1'}\|^2}\overrightarrow{v_1'} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{i} - \frac{1}{3}\overrightarrow{j} + \frac{2}{3}\overrightarrow{k}.
\end{aligned}
$$