Elementos de Lógica

Doherty Andrade

Emerson Luiz do Monte Carmelo

Fevereiro de 1999

Resumo

Nestas notas apresentamos, sob um ponto de vista *informal* e *introdutório*, alguns tópicos de Lógica, tendo em vista a disciplina Matemática Discreta oferecida aos calouros dos cursos Ciências da Computação e Informática da UEM. Não há pré-requisito formal para a leitura e acreditamos que ela também possa ser utilizada em outras disciplinas, como por exemplo, Fundamentos da Matemática, pois a apostila não enfatiza aplicações, simplesmente expõe nocões da teoria com intuito de o aluno procurar posteriormente utilizá-los em seu cotidiano.

Algumas questões são imprescindíveis não só para cientistas: uso correto de conectivos lógicos (quase todos os dias pessoas geram ambiguidades de comunicação devido ao uso incorreto de "ou", "todos ", inclusive em algoritmos); discernir argumentos válidos e também verificar se as conclusões obtidas são realmente válidas.

Com intuito de tamém procurar despertar interesse, algumas relações superficiais entre Lógica, Computação, Matemá tica são comentadas de tal modo que a omissão da leitura nestes pontos não acarretará prejuízo no entendimento.

Comentaremos brevemente algumas aplicações da Lógica à Computação.

Não é raro algoritmos apresentarem erros de sintaxe e lógicos. A compilação pode detectar erros do primeiro tipo, mas não impede que ainda persistam erros lógicos, os quais geram gasto de tempo de recursos humanos (custos) na busca das falhas. Portanto, não é difícil inferir a grande utilidade de um algoritmo que realize a seguinte tarefa: decidir se programas entram em " loop infinito " ou não. No entanto, é impossível construir tal algoritmo.

Este resultado implica que há limites reais na teoria da computação. Resultados desta natureza são encontrados em Computabilidade, uma área entre a Computação e Lógica.

O mecanismo de funcionamento dos circuitos eletrônicos encontrados nos computadores ("hardware") é regida pela Lógica de Boole. Quando Boole concebeu esta teoria, ele acreditava equivocadamente que ela serviria apenas à fins estritamente teóricos.

Computabilidade, Inteligência Artificial, Redes Neurais, Hardware, ou mesmo desenvolvimento de algoritmos, são áreas de pesquisa em Computação que utilizam recursos lógicos em grau variado de complexidade.

Um dos objetivos destas nots é propiciar subsídios teóricos de lógica para que o aluno possa usá-los como ferramenta de trabalho, por exemplo: evitar (e se for o caso, reconhecer mais rapidamente) erros usuais cometidos em programação ou mesmo em demonstrações matemáticas.

Sumário

Capítulo 1

Lógica Proposicional

1.1 Proposições

A Lógica proposicional estuda relações lógicas entre objetos chamados proposições, os quais podem usualmente (nem sempre) ser interpretados como sentenças da Língua Portuguesa.

Por sua vez, sentenças podem ser de vários tipos: *declarativas* (afirmações), *interrogativas*, *modais* (por exemplo, " parece que o carro do Zé é vermelho"), *performáticas* (ou de comandos) (por exemplo, o termo " go to " do Pascal.)

Vamos nos preocupar aqui apenas com as sentenças declarativas, simplesmente porque estas são suficientes para o estudo da Matemática.

A princípio, podemos ter a impressão de que toda sentença declarativa é falsa ou verdadeira. Vamos analisar a frase seguinte: " Esta sentença é falsa". Se ela é verdadeira, o conteúdo da frase se cumpre, ou seja, ela é falsa!. Resta o caso dela ser falsa, assim o seu conteúdo "Esta sentença é falsa " falha, assim ela é verdadeira !

Esta “ingênua ” sentença é o paradoxo de Eubulides de Mileto, longe de ser uma simples banalidade do pensamento, está ligado a um dos teoremas mais profundos do pensamento lógico-matemático, o célebre teorema de Gödel, formulado em 1936.

Para evitarmos situações deste tipo, vamos considerar apena sentenças declarativas “bem-comportadas ”.

Definição 1.1 *Proposição é uma sentença declarativa que é verdadeira ou falsa, mas não ambas.*

Dada uma proposição, ela pode assumir um dos valores: ela é verdadeira (**V**) ou ela é falsa (**F**). Assim, adotaremos dois princípios :

Princípio de não contradição: Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo

Príncipio do terceiro excluído: Toda proposição é verdadeira ou falsa, não há terceira possibilidade.

Exemplo 1.2 *Vejamos alguns exemplos de proposições:*

(a) A lua é feita de queijo.

(b) 4 é um número primo.

(c) 3+3 = 6.

(d) 4 é número positivo e 3 é par.

(e) Choveu no Brasil em 12 de abril de 1523.

(f) 4 é número positivo ou 3 é par.

(g) A Terra gira em torno do Sol.

As afirmações (a), (b), (d) são proposições falsas, enquanto (c), (f), (g) são verdadeiras. Embora (e) seja uma proposição, pois esta sentença é verdadeira ou não, não temos como determinar seu valor-verdade.

Exemplo 1.3 *As seguintes sentenças não são proposições: (a) x=3, (b) Você está bem ?, (c) Vá embora !*

O primeiro item representa uma sentença declarativa mas não uma proposição, pois seu valor-verdade depende do valor atribuído a x (estudaremos tais sentenças no cálculo de predicados). Os casos restantes nem são declarações.

Adotaremos letras maiúsculas: $P, Q, R, S, ...$ para representação de proposições. Por exemplo, podemos denotar por P a proposição "4 é número positivo", ou simplesmente, P : "$4 > 0$". Caso não seja especificado, P pode representará uma proposição qualquer.

1.2 Conectivos lógicos

Proposições podem ser combinadas coerentemente através de conectivos lógicos, gerando sentenças mais ricas. Alguns dos conectivos que estudaremos são: negação $\sim$, conjunção lógica $\wedge$, disjunção lógica $\vee$. Nas formas $P \wedge Q$, $P \vee Q$, P, Q são chamados operandos e os conectivos $\vee, \wedge$, são chamados operadores lógicos .

Operadores lógicos ou conectivos lógicos efetuam operações sobre as proposições do mesmo modo que adição é um operação sobre os números, ou que a interseção é operação sobre os conjuntos. Quando um operador lógico é usado para construir uma nova proposição, seu valor-verdade depende da natureza dos operadores lógicos usados e do valor-verdade das proposições originalmente dadas. Discutiremos agora como os operadores lógicos afetam o valor-verdade das proposições. Veremos que os significados dos operadores lógicos nem sempre coincidem com aqueles usados na nossa língua.

1.2.1 O operador negação: $\sim$

Denotando por P: "4 é positivo", a proposição $\sim P$ pode ser interpretada por: "nao é o caso de 4 ser positivo", ou ainda, "não é verdade que 4 é positivo", ou em linguaguem matemática, "$4 \leq 0$". Sabemos que P é verdadeira e também que a sua negação, $\sim P$, é falsa. Para o caso geral, quando P representa uma proposição qualquer, o valor de $\sim P$ assume valor diferente de P. Este fato pode ser representado através da seguinte tabela-verdade:

P	$\sim P$
V	F
F	V

1.2.2 O operador conjunção: $\wedge$

Representa intuitivamente o papel análogo ao conectivo "e" da Língua Portuguesa. O item (d) do exemplo 1.2 pode ser representado por $P \wedge Q$, onde P : "$4 > 0''$ e Q : "3 é par". Neste caso, sabemos que $P \wedge Q$ é falsa, pois falha a proposição Q. Em analogia ao conectivo "e", para o caso geral, $P \wedge Q$ será verdadeiro desde que ambas as componentes P e Q sejam verdadeiras.

O valor-verdade de $P \wedge Q$ segue a tabela:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

1.2.3 O operador disjunção: $\vee$

Funciona como o conectivo "ou". Considerando as mesmas proposições acima, a proposição $P \vee Q$ simboliza o item f) do Exemplo 1.2, cujo valor-verdade é determinado pelo de P, pois Q falha. No caso geral, para $P \vee Q$ ser verdadeira, basta que tenhamos pelo menos uma das componentes válida. O valor-verdade de $P \vee Q$ segue a tabela:

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Observação 1.4 *Em algumas situações cotidianas, o "ou" da Língua Portuguesa funciona com sentido de "ou exclusivo", cujo significado difere do usado aqui. Um exemplo do "ou exclusivo" segue: num supermercado, a mãe diz "- Filho, escolha sorvete ou chocolate. O dinheiro não dá para comprar os dois. "*

Esta difícil decisão imposta ao garoto acontece (é verdadeira) desde que escolha uma e apenas uma das opções. " Zé é paulista ou paranaense" exemplifica outra situação do mesmo tipo.

Para o nosso propósito, $P \vee Q$ é verdadeiro também quando ambas as proposições originais o são

1.2.4 O operador condicional: $\Rightarrow$

Notação: $P \Rightarrow Q$ (P: *antecedente ou hipótese*, Q: *consequente ou conclusão*).

Ilustremos inicialmente uma interpretação do conectivo $\Rightarrow$ através da sentença:

"Se Gustavo ganhar na próxima loteria, pagará um churrasco."

Definindo-se P: "Gustavo ganha na próxima loteria" e Q:"Gustavo paga churrasco". $P \Rightarrow Q$ representa a promessa de Gustavo.

Vamos analisar quando a promessa será cumprida. Primeiro caso : digamos que ele ganhe (P é V). Pode acontecer de ele pagar o churrasco (Q é V), cumprindo a promessa ($P \Rightarrow Q$ é V). Por outro lado, Gustavo pode não pagá-lo, descumprindo a promessa ($P \Rightarrow Q$ é F). Segundo caso: digamos que Gustavo não ganhe (P é F). Neste caso, independente de pagar ou não um churrasco, (Q é V ou F), a promessa não foi descumprida ($P \Rightarrow Q$ é V). Observe que a única possibilidade de $P \Rightarrow Q$ ser falsa é quando P é V e Q é F . Nós esperamos que tal operação funcione de maneira similar ao modelo acima, desta forma, quando P e Q assumirem proposições arbitrárias, $P \Rightarrow Q$ será regida pela tabela seguinte:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A proposição $P \Rightarrow Q$ pode ser lida de vários modos: "se P, então Q"; "P é suficiente para Q"; "Q é necessário para P"; "Q se P "; "Q segue de P "; " Q desde que P "; "Q é consequência de P ".

Em Português, o uso do condicional estabece uma relação de causa e efeito, ou relação de "herança " entre a hipótese e a conclusão. Assim, "se eu cair no lago, ficarei molhado " relaciona uma causa a seu efeito. O condicional "se eu sou homem, então sou mortal" caracteriza uma propriedade intrínsica à raça humana.

Entretanto, no condicional lógica $P \Rightarrow Q$, a hipótese P não precisa estar relacionada à conclusão Q. Isto pode causar alguma estranheza e confusão. Por exemplo, se P:"laranjas são pretas" e Q:"a Terra é plana ", $P \Rightarrow Q$ representa a sentença "se laranjas são pretas, então a Terra é plana", que é destituído de "sentido" na Língua Portuguesa. Como P é falso, pela tabela verdade, $P \Rightarrow Q$ é verdadeira, mesmo não existindo alguma relação de causa e efeito entre as proposições envolvidas .

1.2.5 O operador bicondicional : $\Leftrightarrow$

É definido pela composição de operações: $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$. Assim, sua tabela fica:

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Note que $P \Leftrightarrow Q$ vale quando P e Q possuem o mesmo valor.

Algumas leituras mais usuais de $P \Leftrightarrow Q$ são: "P é causa e consequência de Q "; "P é condição necessária e sufiente para Q "; "P se e somente se Q".

Exemplo 1.5 *Retornemos ao caso já visto: P:"Gustavo ganha na próxima loteria " e Q:"paga churrasco". Colocamos abaixo algumas fórmulas com respectivo sentido:*

$P \Rightarrow Q$: *"Se Gustavo ganhar na próxima loteria, pagará um churrasco. "*
$Q \Rightarrow P$: *"Se Gustavo pagar churrasco, então ele ganhou na loteria. "*
$P \Leftrightarrow Q$: *"Gustavo pagará um churrasco se e apenas se ganhar na loteria."*

As três sentenças são todas distintas e para elucidar melhor as diferenças, vamos considerá-las válidas, caso a caso. A primeira sentença, a promessa, inclui a possibilidade dele não ganhar na loteria, mas pagar o churrasco com outro recurso. No entanto, a segunda sentença Q $\Rightarrow$ P não permite tal possibilidade. Finalmente, a terceira diz que a única forma dele pagar o churrasco é ganhando na loteria.

Exemplo 1.6 *Outra ilustração de $P \Leftrightarrow Q$: considere T um triângulo de lados $a > b \geq c$ e defina P:"T é triângulo retângulo" e Q: "$a^2 = b^2 + c^2$ ". O clássico Teorema de Pitágoras com sua recíproca afirma que "T é triângulo retângulo se e somente se $a^2 = b^2 + c^2$", ou ainda, $P \Leftrightarrow Q$ acontece.*

1.3 Tabelas verdades

Um fato de importância fundamental: o valor-verdade de proposições compostas obtidas via combinação de conectivos está completamente determinado pelos valores das proposiçoẽs componentes e pela natureza dos conectivos envolvidos.

Exemplo 1.7 *Vamos construir a tabela verdade da fórmula $(P \vee \sim Q) \Rightarrow Q$. Iniciamos exibindo as colunas de P e Q. Observe que há quatro linhas de valores, pois há 4 possibilidades de combinar os valores de P e Q. Na segunda* *etapa, construímos a coluna relativa a* $\sim Q$*. Em seguida, a etapa 3 combina os valores das colunas de* P *e da coluna* $\sim Q$ *usando o conectivo* $\vee$*. Finalmente, a última coluna construída será combinada com a coluna* Q *via análise do condicional. A tabela abaixo esquematiza os nossos raciocínios:*

P	Q	$\sim Q$	$P\vee \sim Q$	$(P\vee \sim Q) \Rightarrow Q$
V	V	F	V	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	V	F
1	*1*	*2*	*3*	*4*

onde a última linha denota as estapas da construção. Em particular, quando P *e* Q *são verdadeiras, então a fórmula acima é* V *(primeira linha); e quando* P *é* V *e* Q *é* F*, então a proposição é* F*; e assim em diante.*

Exemplo 1.8 *Vamos determinar a tabela verdade de* $S = (P\wedge Q)\vee \sim(P\Rightarrow Q)$*. Na forma de tabela, fica*

P	Q	$(P \Rightarrow Q)$	$\sim (P \Rightarrow Q)$	$P \wedge Q$	S
V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	F	F
1	*1*	*2*	*3*	*3*	*4*

Os valores-verdades da coluna S na etapa 5 é determinado segundo as colunas de $\sim$(P$\Rightarrow Q$) e de (P$\wedge$Q) através da análise da tabela do $\vee$.

Exemplo 1.9 *A tabela verdade da proposição* $R = (P \wedge Q) \vee (\sim (P \vee Q))$

P	Q	$P \wedge Q$	$\sim (P \vee Q)$	R
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	F	F
F	F	F	V	V
1	*1*	*2*	*3*	*4*

Comentário: A tabela verdade de uma fórmula composta por n proposições originais (atômicas) possui 2^n linhas e um exercício da lista apresenta superficialmente um método de simular computacionalmente a construção de tabelas verdade. Existe um algoritmo "rápido" ? Esta problema continua em aberto e acredita-se que este problema seja "intratável algoritmicamente". Descobrir um programa "eficaz " que realize tal tarefa está relaciona com o célebre problema P=NP, o principal problema em computação teórica.

Notação: Faremos uso de sinais: ( ); [ ],{ } para evitar ambiguidades, como por exemplo em $P \wedge Q \vee R$, que pode gerar confusão, pois há duas distintas interpretações, a saber: $(P \wedge Q) \vee R$ ou ainda $P \wedge (Q \vee R)$. Faça as respectivas tabelas verdades para verificar a diferença.

1.4 Tautologias

Lembrando a promessa de Gustavo: $P \Rightarrow Q$, ela assume ambos os valores verdades: V e F, dependendo dos valores tomados em P e em Q. Mas vejamos um caso curioso:

Exemplo 1.10 *Analisemos a proposição* $[\ P \wedge (P \Rightarrow Q)\ ] \Rightarrow Q$.

Primeiro método: Análogo ao caso anterior, via construção da tabela :

P	Q	$(P \Rightarrow$Q)	P$\wedge(P \Rightarrow$Q)	[P$\wedge(P \Rightarrow$Q)] $\Rightarrow Q$.
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V
1	1	2	3	4

Segundo método: Para evitarmos a elaboração da tabela acima, vamos proceder de forma indireta. Conside, a princípio, onde a nossa proposição poderia receber valor F. Analisando a tabela do condicional, o único caso seria quando: $P \wedge (P \Rightarrow Q)$ for V e Q for F. Analogamente, para $P \wedge (P \Rightarrow Q)$ ser V, teríamos obrigatoriamente que P é V e $P \Rightarrow Q$ é V. Mas para $P \Rightarrow Q$ se cumprir, teríamos: ou P é F (contrariando resultado prévio na linha acima) ou P é V e Q é V (novamente contrariando resultado prévio). Ou seja, não há possibilidade alguma da proposição ser falsa.

Em contraste com a promessa de Gustavo, a proposição acima sempre é verdadeira (ver a coluna do passo 4), independente dos valores de P e Q. Isto motiva a definição :

Definição 1.11 *Uma tautologia é uma proposição que assume sempre valor verdade V, independente dos valores verdade das proposições que a compõe. Por outro lado, uma contradição é uma proposição sempre falsa.*

Um economista que disser "a inflação sobe ou não sobe" $(P \vee \sim P)$ corre o risco de ser acusado de incompetente, mas não de mentiroso. Independente do significado atribuído a P, $P \vee \sim P$ sempre é tautologia, enquanto que $P \wedge \sim P$ ilustra uma contradição.

É através das tautologias que podemos simplificar expressões lógicas e criar regras de inferências (veremos mais tarde este conceito).

Observe que se C é contradição então $\sim C$ é tautologia. Além disto, se T representa uma tautologia, então $\sim T$ denota uma contradição.

Elencamos uma pequena lista de tautologias e respectivos nomes:

Lista 1: tautologias

1. $P \Rightarrow (P \vee Q)$	adição
2. $(P \wedge Q) \Rightarrow P$	simplificação
3. $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$	modus ponens
4. $[(P \Rightarrow Q) \wedge \sim Q] \Rightarrow \sim P$	modus tollens
5. $[\sim P \wedge (P \vee Q)] \Rightarrow Q$	silogismo disjuntivo
6. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$	silogismo hipotético
7. $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow [(Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R)]$	
8. $[(P \Rightarrow Q) \wedge (R \Rightarrow S)] \Rightarrow [(P \wedge R) \Rightarrow (Q \wedge S)]$	
9. $[(P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$	

Verificar as tautologias acima

Em computação, dois programas distintos podem executar a mesma tarefa, ambos utilizando tempos próximos na execução e mesmo gasto de memória. Neste caso, é natural dizer que eles são programas equivalentes. A expressão algébrica $(x-1).(x+1)$ equivale a x^2-1. Assim como na álgebra, seria de grande interesse se pudessemos simplificar expressões lógicas. Para atingir tal objetivo, definimos o conceito de equivalência lógica .

Definição 1.12 *Duas proposições P e Q são equivalentes (equivalência lógica: notação: $P \equiv Q$) se ambas possuem a mesma tabela verdade, ou seja, P é V quando e apenas quando Q é V. Ou ainda, $P \equiv Q$ se e somente se $P \Leftrightarrow Q$ for tautologia. Neste caso, dizemos P e Q formam uma identidade lógica.*

Por exemplo, $\sim(\sim P)$ e P são claramente equivalentes. As fórmulas $\sim(P \vee Q)$ e $(\sim P) \wedge (\sim Q)$ ilustram outro exemplo importante de identidade lógica.

Exemplo 1.13 $P \Rightarrow Q \equiv (\sim P) \vee Q$. *(O uso aqui dos parênteses é desnecessário, mas foram usados por motivo de clareza. Em outros casos será ignorado.) De fato,*

P	Q	$P \Rightarrow Q)$	$\sim P \vee Q$	$(P \Rightarrow Q \Leftrightarrow \sim P \vee Q.$
F	F	V	V	V
F	V	V	V	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V
1	*1*	*2*	*2*	*3*

Repare que as colunas 2 coincidem em todas as linhas. Como comentamos, $P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$, *pois* $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \sim P \vee Q$ *é uma tautologia (ver coluna da etapa 3).*

Verifique as seguintes identidades lógicas.

Lista 2: identidades lógicas

1 .$P \equiv (P \vee P)$	idempotência de $\vee$
2.$P \equiv (P \wedge P)$	idempontência de.......
3.$(P \vee Q) \equiv (Q \vee P)$	comutatividade de.......
4.$(P \wedge Q) \equiv (Q \wedge P)$	comutatividade de....
5.$[(P \vee Q) \vee R] \equiv [P \vee (Q \vee R)]$	associatividade de....
6. $[(P \wedge Q) \wedge R] \equiv (P \wedge (Q \wedge R)]$	associatividade de...
7.$\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$	Lei de De Morgan
8.$\sim (P \vee Q) \equiv (\sim P \wedge \sim Q)$	Lei de De Morgan
9.$[P \wedge (Q \vee R)] \equiv [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$	distrib. de $\wedge$ sobre $\vee$
10.$[P \vee (Q \wedge R)] \equiv [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$	distrib. de $\vee$ sobre $\wedge$
11.$P \equiv \sim (\sim P)$	dupla negação
12.$(P \Rightarrow Q) \equiv (\sim P) \vee Q$	implicação
13.$(P \Leftrightarrow Q) \equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$.	equivalência
14.$[(P \wedge Q) \Rightarrow R] \equiv [P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$	exportação
15$[(P \Rightarrow Q) \wedge (P \Rightarrow \sim Q)] \equiv \sim P$	absurdo
16.$(P \Rightarrow Q) \equiv (\sim Q \Rightarrow \sim P)$	contra-positiva

Observação 1.14 *1: Note que $\equiv$ é uma relação de equivalência, ou seja, é reflexiva, simétrica e transitiva.*

2: A operação bicondicional foi definida através dos conectivos $\Rightarrow$ e $\wedge$. Por sua vez, o condicional (regra 12 acima, exemplo 1.13) pode ser definida via $\sim$ e $\vee$.

Pela lei de De Morgan (ver 7, lista acima), $\sim (P \wedge Q) \equiv (\sim P \vee \sim Q)$. Ora, como elas são equivalentes, suas respectivas negações também o são: $\sim (\sim (P \wedge Q)) \equiv \sim (\sim P \vee \sim Q)$. Por outro lado, (regra 11- lista 2), a primeira proposição é equivalente a $P \wedge Q$. Por último, pela transitividade de $\equiv$ $P \wedge Q \equiv \sim [(\sim P) \vee (\sim Q)]$ Assim, obtemos $\wedge$ a partir de $\vee$ e $\sim$.

Logo, estas duas últimas operações são suficientes para construírmos todos os conectivos vistos.

As identidades acima podem ser usadas para simplificar uma proposição dada. Por exemplo, vamos determinar uma fórmula equivalente a: $T = (P \wedge Q) \Rightarrow (\sim P \vee Q)$ sem usar o conectivo $\wedge$. Temos que: $P \wedge Q \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q)$ e também que $\sim P \wedge Q \equiv \sim(\sim\sim P \vee \sim Q)$ (feitos na observação anterior). Substituindo ambas as formas acima em T, obtemos: $T \equiv \sim(\sim P \vee \sim Q) \Rightarrow \sim (\sim\sim P \vee \sim Q)$, e usando regras 3 e 12, $T \equiv \sim(P \Rightarrow Q) \Rightarrow \sim (Q \Rightarrow P)$.

1.5 Inferência

Em nosso cotidiano estamos acostumados a "tirar certas conclusões", partindo de informações fornecidas. Por exemplo, quando alguém diz: " A recessão se agravou com a intervenção do FMI", <u>inferimos</u> mentalmente que essa pessoa nos prestou uma informação que se traduziria de modo mais completo nesta forma:

Se FMI ajudar o Brasil, a recessão aumenta.
<u>O FMI ajudou o Brasil</u>
A recessão se agravou.

Admitimos que as duas informações escritas sobre o traço horizontal são verdadeiras: a primeira, porque a ela nos habituamos através de experiências e constatações; a segunda porque a informação nos foi explicitamente fornecida. Nossa conclusão è legítima - a conclusão é verdadeira e não pode deixar de ser verdadeira.

Vejamos de que maneira o <u>raciocínio</u> se apresenta, usando enunciados simbólicos:

$$\begin{array}{l} \mathrm{P}\Rightarrow Q. \\ \underline{\mathrm{P}\qquad} \\ \mathrm{Q}. \end{array}$$

Como P e $P \Rightarrow Q$ são verdadeiros, e lembrando que $(\mathrm{P}\wedge\mathrm{P}\Rightarrow Q) \Rightarrow Q$ é uma tautologia, obtemos que a nossa conclusão Q é verdadeira, Nosso raciocínio foi legítimo, não passamos de informações verdadeiras para conclusões que poderiam, eventualmente, mostrar-se falsas.

Vamos alterar os significados das proposições acima, assumindo a validade da promessa de Gustavo (podemos considerá-la verdadeira, digamos, conhecendo a personlidade dele). Até aqui não podemos concluir nada. No entanto, se ele ganhar na loteria (P se cumpre), então agora sim podemos concluir que o churrasco será realizado (Q é V). Ambas as situações são representadas pelo mesmo esquema acima. É plausível então admitirmos que o argumento $\mathrm{P}\Rightarrow Q$ e P então Q sempre se verifica, independente dos significados atribuídos.

A *dedução* pretende assegurar-nos a verdade da conclusão, quando partimos de informacões verdadeiras. Ela nos dá garantias de que a verdade foi preservada.

De um modo geral, aquilo que nos baseamos em raciocínios e inferências e assumidos verdadeiros são as *premissas*, o ponto a que chegamos é a *conclusão*. A coleção de sentenças que "traduzem" o pensamento é o *argumento*.

Adotaremos uma forma padronizada para escrever os argumentos , colocando as premissas $A_1, A_2, ..., A_{n-1}$ (proposições que já sabemos ser verdadeiras, ou nos foi dado, ou simplesmente assumidas verdadeiras) sobre um traço horizontal e, em seguida, a conclusão A_n. Assim, podemos também escrever o argumento como

$$\begin{array}{l} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ \underline{A_{n-1} \quad\quad} \\ A_n \end{array} \tag{1.5.1}$$

Ou aind a na forma:

$$A_1; A_2, ..., A_{n-1} \vdash A_n.$$

Dado argumento acima, podemos associá-la ao condicional: $A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_{n-1} \Rightarrow A_n$.

Teorema 1.15 *O argumanto acima é legítimo se e somente se o condicional associado* $(A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_{n-1}) \Rightarrow A_n$ *é tautológico.*

Prova Se o argumento é legítimo(sempre obtemos verdades), então impede que as premissas sejam V e a conclusão F de modo que o condicional associado só toma valores V, sendo, pois, tautológico. Reciprocamente, sendo o condicional acima tautológico, é facil verificar que o argumento é legítimo. $\square$

Uma lista de argumentos legítimos, que nos ajudam a obter conclusões, já foi elencada na lista de tautologias, que passamos a chamá-las *regras de inferência* (ver lista 1 acima).

Exemplos de regras: (todas obtidas via tautologias: lista 1)

1) $\dfrac{P \qquad .}{(P \vee Q)}$ *adição*

2) $\dfrac{P \wedge Q \qquad .}{P}$ *simplificação*

3) $\dfrac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ P \qquad . \end{array}}{Q}$ *modus ponens: MP.*

4) $\dfrac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ \sim Q \qquad . \end{array}}{\sim P}$ *modus tollens: MT.*

5) $\dfrac{\begin{array}{l} P \vee Q) \\ \sim P \qquad . \end{array}}{Q}$ *silogismo disjuntivo: SD*

6) $\dfrac{\begin{array}{l} P \Rightarrow Q \\ Q \Rightarrow R \quad . \end{array}}{P \Rightarrow R}$ *silogismo hipotético: SH*

:

Exemplo 1.16 *Considere as premissas: "Se o dia estiver quente, irei nadar ". "Se eu for nadar, não estudarei " Logo, podemos concluir que :"Se o dia estiver quente, não estudarei." Aqui usamos a regra 6 (silogismo disjuntivo), onde* P, Q *e* R *denotam respectivamente as sentenças:" o dia está quente "; "eu vou nadar ", " não vou estudar ". Note que a conclusão* $P \Rightarrow R$ *é uma sentença condicional. Se incluírmos a premissa* P*, através de MP obtemos a conclusão* R*. Todo o argumento pode ser esquematizado abaixo:*

1	$P \Rightarrow Q$	*premissa 1*
2	$Q \Rightarrow R$	*premissa 2*
3	P	*premissa 3(adicionada na segunda parte)*
4	$P \Rightarrow R$	*primeira conclusão (linhas 1, 2, SH)*
5	R	*conclusão da segunda parte (linhas 3, 4, MP)*

Observe que a primeira conclusão (linha 4) foi usada como premissa, pois já faz parte do nosso repertório de informações válidas.

Observação 1.17 *Note que o significado atribuído a cada proposição é irrelevante para a conclusão. Em outras palavras, sempre que tivermos as 3 premissas anteriores, poderemos concluir a validades de* R *.*

Ilustremos uma aplicação do cálculo proposicional.

Exemplo 1.18 *Imagine Flávio, um químico, na seguinte experiência e constatou os fatos:*

- Flávio notou que o papel de tornasol ficou vermelho ao ser posto em ácido.

- Verificou que ficou azul ao ser posto em solução alcalina.

- Agora, Flávio está colocando o papel em solução alcalina ou ácida.

- Ele observou que o papel naõ ficou azul.

- Concluiu que o papel ficou vermelho.

O argumento pode ser colocado na forma:

$$A \Rightarrow V; B \Rightarrow Z; A \vee B; \sim Z \vdash V$$

onde : A: ácido, B: base, V: vermelho, Z: azul. As premissas são verdadeiras, pois são fatos da experiência. Podemos enumerá-las

1.	$A \Rightarrow V$	Premissa
2.	$B \Rightarrow Z$	Premissa
3.	$A \vee B$	Premissa
4.	$\underline{\sim Z \quad .}$	Premissa

Aplicamos Modus Tollens (MT) nas linhas 2 e 3 e obtemos a conclusão exibida na linha 5.

$$5 \qquad \sim B \qquad (3, 2, MT)$$

deixando explícito entre parênteses as premissas (linha 2 e 3) usadas e a regra de inferência em questão (no caso, MT). Portanto a conclusão da linha 5 é verdadeira e podemos usá-la agora como uma nova premissa. Agora, usando silogismo disjuntivo (SD) nas linhas 4 e 5, obtemos a conclusão:

$$6.. \qquad A \qquad (4,5,SD)$$

Finalmente, usando Modus Ponens nas linhas 1 e 6, chegamos à conclusão desejada:

$$7.. \qquad V \qquad (1,6,MP)$$

ou seja, realmente está certa a conjectura de Flávio.

Exemplo 1.19 *Vamos analisar o argumento:" Se estudo ou se eu sou um gênio, então eu passarei nesta disciplina. Se eu passar nesta disciplina, então estarei automaticamente inscrito na próxima disciplina. Portanto, se eu não estiver inscrito na próxima disciplina, eu não sou um gênio."*

Tomando-se: S: " eu estudo " ; G: " eu sou gênio " ; P: " eu passarei na disciplina "; A: " eu estarei inscrito na próxima disciplina ", o argumento fica:

$$(S \vee G) \Rightarrow P; P \Rightarrow A \vdash \sim A \Rightarrow \sim G$$

Vamos verificar o argumento, como no exemplo anterior.

1.	$(S \vee G) \Rightarrow P$	Premissa
2.	$P \Rightarrow A$	Premissa

Inicialmente incluiremos uma premissa (linha 3) que já faz parte do nosso conhecimento, e o argumento segue:

3.	$G \Rightarrow (G \vee S)$	adição (regra)	
4.	$G \Rightarrow (S \vee G)$	3 e	comutatividade
5.	$G \Rightarrow P$	4, 1 e	silogismo hipotético
6.	$G \Rightarrow A$	5, 2 e	silogismo hipotético
7.	$\sim A \Rightarrow \sim G$	6 e	contra-positiva,

portanto, o argumento é legítimo.

Definição 1.20 *Falácias ou sofismas são argumentos que resultam de inferências incorretas.*

Exemplo 1.21 *Considere o raciocínio:*

> "Se o réu é culpado, ele ficará nervoso quando interrogado
>
> O réu estava muito nervoso quando foi interrogado
>
> Portanto, o réu é culpado."

com a representação na forma:

$$P \Rightarrow Q; Q \vdash P.$$

Tal argumento não é correto porque a conclusão P pode ser falsa, embora $P \Rightarrow Q$ e Q sejam válidos, basta verificar que condicional associado $[(P \Rightarrow Q) \wedge Q] \Rightarrow P$ não é tautologia, caracterizando uma falácia

Exemplo 1.22 *Vejamos outro exemplo de sofisma:*

"Se o réu tinha as mãos cobertas de sangue, então ele é o assassino

O réu estava impecável.

Portanto, o réu é inocente."

Este argumento ignora a esperteza do criminoso, que lava as mãos imediatamente após cometer um crime.

Lista de Exercícios

1. Sejam as proposições P : "Está chovendo, Q : "O sol está brilhando e R: "há nuvens no céu ". Traduza sentenças abaixo em notação lógica:

   a) "choverá se o sol brilhar ou se o céu estiver com nuvens"

   b) "se está chovendo, então há nuvens no céu. "

   d) "o sol brilha quando e apenas quando o céu fica sem nuvens. "

2. Utilizando o exercício anterior, determine significados para as proposições:

   (a) $(P \wedge Q) \Rightarrow R$, (b) $\sim P \Leftrightarrow (Q \vee R)$, (c) $\sim (P \vee Q) \wedge R$.

3. Detemine os valores:

   (a) se 2+2=4 então 2+4 =8 , (b) se 2+2=5 então 2+4 =8,

   (c) se 2+2=4 então 2+4 =6, (d) se 2+2=5 então 2+4 =6.

4. Suponha que $P \Rightarrow Q$ seja falso. É possível determinar os valores-verdade de: (a) $P \wedge Q$, (b) $P \vee Q$, (c) $Q \Rightarrow P$?

5. Assuma que " Zé é uma menina " e que "Zé tem dez anos " são sentenças falsas. Quais das seguintes são válidas ?

   (a) Se Zé tem dez anos então Zé é menina .

   (b) Zé tem dez anos se e somente se é menina.

   (c) Zé não é uma menina com dez anos.

6. Suponha que " Zé não é baixo" seja falso e que assuma válidas as sentenças:

   " Zé ou Maria têm dez anos " e

   " se Maria tem dez anos, então Zé não é baixo ".

   Quais das seguintes sentenças são verdadeiras?

   (a) Zé não é baixo.

(b) Maria tem dez anos.

(c) Zé tem dez anos.

(d) Ou Zé ou Maria não têm dez anos.

7. * O que realiza o programa abaixo (em psedo-Pascal) ?

$$i := 1; \quad j := 1$$
$$\text{while } (i < 2 \text{ and } j < 5) \text{ or } i + j = 5 \text{ do}$$
$$\text{begin } i := i + 2 \text{ , } j := j + 1 \text{ end}$$

8. * Quantas vezes o comando $x := x + 1$ será executado no programa abaixo?

$$i := 1; \; x := -1$$
$$\text{while } (i > 0 \text{ and } x < 5) \text{ or } i = 3 \text{ do}$$
$$\text{begin } x := x + 1 \text{ , } i := x + i \text{ end}$$

9. Construa tabelas-verdade para:

$$\text{(a)} \quad \sim (P \wedge Q), \quad \text{(b)} \quad R \Rightarrow \sim (P \wedge Q)$$
$$\text{(c)} \quad \sim (P \wedge Q), \quad \text{(d)} \quad (P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee \sim R).$$

10. Prove ou disprove as proposições abaixo: (Note que basta uma linha ser F para falhar uma tautologia.)

$$\text{(a)} \quad (Q \Rightarrow P) \equiv (P \wedge Q), \quad \text{(b)} \quad (P \wedge \sim Q) \Rightarrow (P \Rightarrow Q).$$

11. Verifique as leis de absorção:

$$\text{(a)} \quad [P \vee (P \wedge Q)] \equiv P, \quad \text{(b)} \quad [P \wedge (P \vee Q)] \equiv P.$$

12. Denote por I: “uma dada matriz é inversível ” e por D: “seu determinante é diferente de zero ”. Considerando válida a proposição $I \Rightarrow D$, quais da sentenças abaixo são consequências da asserção feita? (não

é necessário conhecimento de Álgebra Linear e observe a posição do para):

a) "para uma matriz ter inversa basta que seu determinante seja não nulo "
b) "para seu determinante ser não nulo é suficiente que a matriz seja inversível "
c) "para seu determinante ser nulo é necessário que a matriz nã o seja inversível "
d) "uma matriz tem inversa se e apenas se seu determinante é não nulo "
e) "uma matriz tem determinante zero se ela não é inversível."

13. Em Cálculo, a seguinte asserção vale: "uma função diferenciável é contínua". Análogo ao exercício anterior, quais das sentenças seguem da asserção feita? (nao é necessário conhecimento de cálculo)

a) "uma função é diferenciável apenas se é contínua."
b) "uma função é contínua apenas se é diferenciá vel."
c) " ser diferenciável é condição necessária para que seja contínua."
d) "ser diferenciável é condição suficiente para que seja contínua."
e) "a função é diferenciável se e somente se é contínua."

14. O conectivo "ou exclusivo " acontece apenas se uma das duas cláusulas componentes for verdadiro. Denote tal conectivo por $\oplus$.
(a) Fazer as tabelas-verdade de: $P \oplus Q$, $P \oplus P$, $(P \oplus Q) \oplus R$.
(b) Mostre que $P \oplus Q$ equivale a $(P \vee Q) \wedge \sim (P \wedge Q)$ e a $\sim (P \Leftrightarrow Q)$.

15. * Vários livros apresentam as notações: $w(P) = 1$ se P vale e $w(P) = 0$ quando ela é falsa. Tais notações facilitam a simulação de tabelas-verdade no computador, por exemplo: se $w(P) = x$ e $w(Q) = y$, a tabela da conjunção pode ser simulada pela função $f_\wedge : \{0,1\} \times \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ onde $f_\wedge(x,y) = x.y$, ou ainda $w(P \wedge Q) = w(P).w(Q)$. Verifique tal afirmação:

(a) analogamente, crie funções: $f_\sim$, $f_\vee$, $f_\Rightarrow$, $f_\Leftrightarrow$, $f_\oplus$ que representem os outros conectivos. (dica: determine-as caso a caso, ou observe as relações entre os conectivos)

(b) através destas funções, crie funções representativas de: $\sim (P \vee Q)$, $(P \wedge Q) \wedge \sim Q$, $(P \vee Q) \Rightarrow R$. (Este exercício ilustra o fato de que a construção de tabelas-verdade é um problema compatível.)

16. O operador Sheffer é definido pela tabela:

P	Q	$P \mid Q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Mostre que $\sim P \equiv P \mid P$ e que $P \vee Q \equiv (P \mid P) \mid (Q \mid Q)$. Usando apenas o operador Sheffer, encontre porposições equivalentes a outros conectivos. (Este operador consegue gerar sozinho todos os outros)

17. Numa acariação da CPI do "pão de queijo ", as seguintes informações ocorreram: (a) A diz que B mente. (b) B diz que C mente. (c) C diz que A e B mentem. Se o conjunto de sentenças não é contraditório, quem está falando a verdade?

18. Verifique que são válidos os argumentos:$\sim (P \vee Q)$, $(P \wedge Q) \wedge \sim Q$, $(P \vee Q) \Rightarrow R$

    (a) $P \Rightarrow \sim Q, \quad Q, \quad \sim P \Rightarrow (R \wedge S) \vdash \quad R \wedge S$

    (b) $G \Rightarrow H, \quad \sim G \Rightarrow \sim\sim F, \quad \sim H \vdash \quad F$

    (c) $\sim Q \vee S, \quad \sim S, \quad [\sim (R \wedge S)] \Rightarrow Q \vdash \quad R$

    (d) $(\sim R) \Rightarrow S, \quad R \Rightarrow T, \quad S \Rightarrow (P \wedge Q), \quad \sim T \vdash \quad Q$

19. Legitime o argumanto: "Se eu não especifico as condições iniciais, meu programa não roda. Se eu cometo 'loop infinito ', meu programa não termina. Se o programa não roda ou se ele não termina, então o programa falha. Logo, se o programa não falha, então eu especifiquei as condições iniciais e não cometi 'loop '."

Capítulo 2

Lógica de Predicados

2.1 Predicados

A Lógica proposicional não é suficientemente poderosa para englobar todas as afirmações necessárias em matemática. Nós também precisamos lidar com expressões do tipo

$$x > 0, \;\; x + y = 20, \;\; x \geq y.$$

que não são proposições. De fato, a análise da primeira mostra que ela não assume valor V, pois "$x > 0$ " falha quando $x = 0$ e também não pode ser F, pois pois "$x > 0$ " vale quando $x = 1$. Sentenças análogoa ocorrem também na nossa língua: "Ela vive em Maringá" pode ser formulada como

$$x \text{ vive em Maringá}$$

onde x é variável e "vive em Maringá " é um predicado.

Dicionários apresentam as seguintes definções do vocábulo *predicado*: "atributo ou propriedade característica de alguma coisa"', "termo da oração no qual se enuncia um fato ou se diz alguma coisa do sujeito", por exemplo:

(1) "__________estuda lógica "

(2) "__________é maior que zero. "

Note que tais predicados não assumem valores verdade. Para torná-los sentenças completas (declarativas), é necessário especificar o sujeito, por exemplo:

(1) " <u>Alexandre</u> estuda lógica "

(2) " <u>Dois</u> é maior que zero. "

Vamos nos fixar no segundo exemplo. Com a variação do sujeito na oração, digamos:

" <u>Dois</u> é maior que zero. "

" <u>Cinco negativo</u> é maior que zero. "

obtemos, neste caso, distintas proposições (cada sujeito forma uma proposição).

A fim de estudarmos esta classe de proposições, podemos denotar o predicado "é maior que zero", ">0" por P, associado a um jeito genérico x:

$$P(x) : \text{“}x > 0''$$

Assim, as duas últimas proposições ficam: $P(2)$ e $P(-5)$. Note que $P(x)$ não assume valor V ou F quando o sujeito x não está especificado.

Observação 2.1 *Com a variação do sujeito x, podemos obter novas proposições $P(x)$. Em outras palavras, um predicado pode ser visto como uma função P que leva determinado sujeito x a uma proposição $P(x)$.*

2.2 Quantificadores

Repare agora nas sentenças

Alguém vive em Maringá.

Todos os números são maiores que zero

As palavras grifadas indicam, de maneira óbvia, a idéia de quantidade.

O interesse do *cálcudo de predicados consiste em "quantificar "* os predicados, obtendo-se e estudando-se, como já comentamos, classes de proposições. Ao invés de isolarmos proposições $P(1), P(2), ...$, estaremos interessado no estudo simultâneo de toda a classe de proposições $P(x)$ obtidas através de um dado predicado P. Para tanto, a nossa estratégia será quantificar os predicados e as formas mais comuns envolvem dois quantificadores: universal (para todos) e existencial (existe algum) denotados por $\forall$ e $\exists$, respectivamente. Daqui em diante, $P(x)$ denota um predicado com variável x como argumento.

2.2.1 Operador universal: $\forall$

Se $P(x)$ é um predicado com variável x como argumento, então a proposição:

"Para todo valor de x , a afirmação $P(x)$é verdadeira",

denotada simbolicamnte por

$$\forall x P(x)$$

está associada ao predicado cuja a variável x foi quantificada universalmente.

O operador $\forall x P(x)$ checa se todas as proposições $P(x)$ se verificam na medida que variamos x.

Retornemos ao nosso predicado $P(x)$: "$x > 0$ ". Se dissermos: "qualquer x número natural, $x > 0$ " é agora sim uma proposição verdadeira, pois $P(1), P(2), P(3), ...$ são todas verdadeiras. No entanto, se dissermos, "qualquer x número inteiro, $x > 0$ " é uma proposição falsa, pois, digamos, $P(-1)$ falha. Repare que basta encontrar apenas um $P(x)$ falso, onde x é convenientemente escolhido, para que $\forall x P(x)$ receba valor F.

Assim, é necessário também especificar em qual *universo do discurso* $\mathcal{U}$, universo a qual x pode assumir valores, para que a operação fique bem definida. No primeiro e segundo caso acima, $\mathcal{U}$ coincide com o conjunto dos naturais e inteiros, respectivamente.

Dizer que $\forall x P(x)$ é falso no universo $\mathcal{U}$ significa que existe algum $x_0 \in \mathcal{U}$ que invalida $P(x_0)$.

2.2.2 O operador existencial: $\exists$

A frase "para algum $x, P(x)$" simplifica:

"Existe pelo menos um valor de x para o qual a afirmação $P(x)$ é verdadeira"

foi quantificada existencialmente e podemos denotá-la simbolicamente por

$$\exists x P(x).$$

Note que $\exists x P(x)$ busca, dentro do universo $\mathcal{U}$ se há algum sujeito tal que torne a sentença (relativa ao sujeito) verdadeira. Se tal elemento for encontrado, $\exists x P(x)$ recebe valor V, caso contrário, receberá F.

2.2.3 Uso de quantificadores

Denote por $\mathcal{C}$ uma classe de proposições. Dado o universo $\mathcal{U}$, um predicado P pode ser visto como uma função que leva cada sujeito x de $\mathcal{U}$ em uma proposição $P(x)$: simbolicamente

$$\begin{aligned} P:\ \mathcal{U} &\to \mathcal{C} \\ x &\to P(x) \end{aligned}$$

Exemplo 2.2 *Seja $\mathcal{U}$ o conjunto dos números naturais e $P(x)$ o predicado "$x^2 = x$". Então $\forall x P(x)$ é falso porque $P(3)$ é falso. Por outro lado, $\exists x P(x)$ é verdadeiro porque pelo menos uma das proposições $P(x)$ se verifica, embora exista apenas uma proposição válida, quando $x = 1$.*

Exemplo 2.3 *Se o universo é os inteiros, então:*

$$\exists x[x = 3] \text{ é } V, \quad \exists x[x + 2 = 2] \text{ é } V, \quad \exists x[x < x + 1] \text{ é } V,$$
$$\forall x[x = 3] \text{ é } F\,, \quad \forall x[x + 2 = 2] \text{ é } F\,, \quad \forall x[x < x + 1] \text{ é } V.$$

Exemplo 2.4 *Para os números naturais como o universo de discurso, seja $Q(x)$ o predicado " $x^2 + x + 41$ é primo ".*

Assim, $\exists x Q(x)$ vale, pois $Q(1)$ vale. Inspeções para $x = 1, 2, 3, ...$, mostram que $Q(1), Q(2), Q(3), ...$ sã0 válidos, levando-nos a tentação de considerar $\forall x Q(x)$ também verdadiro. (Convém alertar aqui que este procedimento pouco cuidadoso pode gerar erros). Embora $Q(1), Q(2), ..., Q(39)$ sejam todos verdadeiros, $Q(40)$ é falso. Por outro lado, se o universo fosse $\mathcal{U}$ =$\{1, 2, ...30\}$, ambas $\exists x P(x)$ e $\forall x Q(x)$ seriam válidas.

Assim como utilizamos os conectivos lógicos em proposições, podemos operá-los também em predicados, formando sentenças mais complexas. Aproveitando o exemplo acima, $\sim Q(n)$ representa o predicado "$n^2 + n + 41$ não é primo ". Aplicando os conectivos lógicos já conhecidos, podemos criar as proposições: $\forall x\,[P(x) \Rightarrow Q(x)]$, $\exists x\,[P(x) \wedge Q(x)]$ e etc. Tente determinar os respectivos valores verdade.

Muitas propriedades, axiomas, resultados da matemática podem ser expressos em termos de predicados

Exemplo 2.5 *Considere P uma propriedade e os naturais como universo de discurso, a tautologia seguinte*

$$[P(1) \wedge \forall k\,[P(k) \Rightarrow P(k+1)]] \Rightarrow \forall x P(x)$$

recebe o nome de Princípio de Indução.

Comentário: Quando o universo do discurso é finito, digamos $\mathcal{U} = \{1, 2, ..., n\}$, as proposições $\forall x P(x)$ e $\exists x P(x)$ podem ser simuladas via procedimentos computacionais. De fato, vamos determinar o valor verdade de $\exists x P(x)$, onde P é um predicado fixado. Precisamos assumir que todos $P(i), 1 \leq i \leq n$, são decidíveis computacionalmente, digamos que já exista uma função computacional booleana f (que depende de P) que determina o valor verdade $f(P(i))$ para cada proposição $P(i)$, ou seja, $f(P(i)) =$ "*true*" se $P(i)$ é verdadeira, e "$false$" caso contrário.

O procedimento abaixo está em "pseudo-Pacal". Dados $\mathcal{U} = \{1, 2, \ldots, n\}$ e predicado P,

P : o vetor de comprimento n: $\{P[1], P[2], \ldots, P[n]\}$

b: variável booleana, i contador

Begin: b:= false, $i := 0$

While $b =$ false and $i < n$ do

$i := i + 1$, $b := f(P[i])$

Write (b); End.

Note que o valor verdade de $\exists x P(x)$ coincide com a variável booleana b.

Definição 2.6 *Como $P(x)$ se tranforma em proposição na medida que atribuímos valores específicos para x, dizemos então que x é variável livre, pois o valor verdade fica dependendo de x. No entanto, quando o valor verdade de $\forall x P(x)$ não depende de x, e assim dizemos que x é variável ligada.*

2.3 Predicado com mais de uma variável

A utilização de predicados na lógica engloba situações bem mais abrangentes, por exemplo, predicado "vive em Maringá" pode ser generalizado por $P(x, y)$: "x vive na cidade y", fazendo com que tal sentença dependa de duas variáveis: x(sujeito) e y(cidade em questão).

Analogamente, podemos considerar predicados que dependam de uma ou mais variáveis e utilizar quantificadores para cada uma delas.

Exemplo 2.7 *Considere os números naturais como o universo de discurso $\mathcal{U}$ para ambas variáveis e $P(x, y)$ o predicado "$x < y$ ". Note que ele assume agora o papel de uma função: P: $\mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{C}$: $(x, y) \to P(x, y)$. Ambas as variáveis x e y estão, no sentido que o valor verdade de $P(x, y)$ depende de ambas as variáveis x e y. Na sentença $\exists x P(x, y)$, x é variável ligada, mas y é livre, de modo que ela não assume valor verdade. O predicado $\exists x P(x, y)$, " existe um x tal que $x < y$ ", se transforma em proposição na medida que atribuímos valores específicos para y, por exemplo: $\exists x P(x, 1)$ é F, $\exists x P(x, 2)$ é V (pois $x = 1$ satisfaz a sentença), e assim por diante. Agora o valor-verdade de $\exists y P(x, y)$ não depende de x (x está ligada) mas depende de y, ou seja, apresenta y como variável livre e pode ser pensada como um novo predicado que apenas depende de y. Desta forma, podemos quantificar tal variável, tranformando finalmente numa proposição. Se quantificamos com o operador universal, a proposição $\forall y \exists x P(x, y)$ é F, pois $\exists x P(x, 1)$ é F. Por* *outro lado, com o operador existencial,* $\exists y \exists x P(x,y)$ *é V (desde que* $\exists x P(x,2)$ *é V, basta tomar* $y=2$*).*

Num predicado $P(x,y)$ com duas variáveis, há oito modos de quantificá-lo:

$$\forall x \forall y, \qquad \forall x \exists y, \qquad \forall y \forall x, \qquad \forall y \exists x$$
$$\exists x \forall y, \qquad \exists x \exists y, \qquad \exists y \forall x, \qquad \exists y \exists x$$

Uma questão natural é saber se os quantificadores podem ser comutados, ou seja, se a ordem deles importa no enunciado. Para responder esta pergunta, vejamos o exemplo abaixo.

Exemplo 2.8 *Este exemplo ilustra a importância da ordem dos quantificadores. Considere* $P(x,y)$ *o predicado : " y é mãe de x". Para a variável* x*, seja o universo do discurso a população mundial que está viva; e inclua as pessoas falecidas no universo da variável* y*. Apresentamos alguns modos de quantificá-la seguido com a respectiva interpretação e valor-verdade:*

(1) $\forall x \exists y P(x,y)$ " qualquer pessoa tem uma mãe " (V)
(2) $\exists y \forall x P(x,y)$ " alguma pessoa é mãe de todo mundo "(F)
(3) $\forall y \exists x P(x,y)$ " todo mundo é uma mãe. "(F)
(4) $\exists x \forall y P(x,y)$ " uma pessoa é filho de todo mundo " (F)

Note que as frase (1) e (2) apresentam enunciados e até valores distintos, embora a única diferença das fórmulas seja a ordem dos quantificadores. Analogamente, vale para as frases (3) e (4); refletindo a importância da ordem dos quantificadores.

Exemplo 2.9 *Considere o universo de* x *e* y *os naturais e o predicado* $P(x,y)$: "$y > 2^x$."

(a) Para determinar a proposição $\forall x(\exists y P(x,y))$, inicialmente consideramos o predicado interno $\exists y P(x,y)$, onde y está ligada e x livre. Assim, tal expressão pode ser vista como um predicado na variável x e então, atribuindo valores para x, obtemos: $\exists y P(1,y)$ é V (pois para $y = 3$, torna $P(1,3)$ válida), $\exists y P(2,y)$ é V (pois $5 > 4$) e assim por diante. O caso geral $\forall x \exists y P(x,y)$: " para todo número x, existe um número y maior que 2^x" é V (basta tomar $y = 2^x + 1$).

(b) Se invertermos o ordem dos quantificadores, $\exists y \forall x(P(x,y)$, lido " existe um número y maior que todas as potências na base 2" é F. De fato, o predicado interno $\forall x P(x,y)$, que significa " para todo x, $y > 2^x$", é sempre F para todo y, basta tomar $x = y$ e da´ i obtemos $y > 2^x$ que é F.

Exemplo 2.10 *Muitas propriedades matemáticas podem ser expressa em termos de predicados. Vejamos formulações lógicas de algumas propriedades dos números reais:*

$\forall x \forall y \forall z\, [x.(y+z) = xy + xz]$	*o produto é distributivo*
$\exists y \forall x\, [x + y = x]$	*existe elemento neutro para a soma*
$\forall x \exists y\, [x + y = 0]$	*todo número real tem oposto*
$\forall x\, [x \neq 0 \Rightarrow (\exists y \quad x.y = 1)]$	*todo real diferente de zero possui inverso*

2.4 Cálculo de predicados

No cálculo proposicional, podemos criar proposições novas combinando conectivos lógicos sobre proposições mais simples. Tautologias nos permitem criar regras de equivalência entre proposições, as quais são usadas na simplificação de expressões lógicas. Há também regras de inferências.

Utilizaremos os recursos já vistos em lógica proposicional para estudarmos a lógica de predicados.

Nos próximos comentários, denotamos por P e Q duas proposições quaisquer e $P(x)$ e $Q(x)$ dois predicados quaisquer, ambos com variável livre x.

1. Assim como fizemos com as proposições, podemos criar naturalmente novos predicados via conectivos lógicos, a saber:

$$\begin{array}{lll} \sim P(x), & P(x) \wedge Q(x), & P(x) \vee Q(x), \\ & P(x) \Rightarrow Q(x), & P(x) \Leftrightarrow Q(x). \end{array}$$

2. Algumas identidades lógicas: $(\equiv)$ para predicados também podem ser "importadas " do cálculo proposicional. Citamos:

Proposicões		*Predicados*
$P \equiv \sim\sim P$,		$P(x) \equiv \sim\sim P(x)$,
$P \Rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$	,	$P(x) \Rightarrow Q(x) \equiv \sim P(x) \vee Q(x)$.

3. Lembramos que os predicados quantificados em todas as variáveis (por exemplo: $\forall x P(x), \exists x \forall y R(x,y)$) são transformados em proposições e podem ser estudadas como tais.

Há também tautologias próprias nos predicados. Citamos alguns casos particulares. Dizer que "Todas as bolas são brancas " tem o mesmo significado de "Não há bola de outra cor ". Em notação lógica, $\forall x P(x) \ \equiv \sim \exists x \sim P(x)$, onde $P(x)$ denota o predicado "ser bola branca ". Analogamente, dizer que "Nem todas as bolas são brancas tem o mesmo significado de "Há uma bola de outra cor", ou simbolicamente: $\sim \forall x P(x) \equiv \exists x \sim P(x)$. A substituição do predicado não invalidaria a equivalência lógica. Acabamos de ilustrar relações entre os quantificadores. Devido à sua importância, estudaremos tautologias desta natureza isoladamente.

Teorema 2.11 *As tautologias são válidas:*

$$\begin{array}{ll} 1) & \sim \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x\,(\sim P(x)) \\ 2) & \sim \exists x P(x) \Leftrightarrow \forall x\,(\sim P(x)) \\ 3) & \forall x P(x) \;\; \Leftrightarrow \sim \exists x\,(\sim P(x)) \\ 4) & \exists x P(x) \;\; \Leftrightarrow \sim \forall x\,(\sim P(x)) \end{array}$$

Prova: Vamos considerar a primeira delas. Devemos lembrar que $\sim \forall x P(x) \equiv \exists x\,(\sim P(x))$ se e somente se $\sim \forall x P(x) \Leftrightarrow \exists x\,(\sim P(x))$ é tautologia. Assim, basta verificar que as proposições $\sim \forall x P(x)$ e $\exists x\,(\sim P(x))$ assumem sempre o mesmo valor- verdade. De fato, se $\sim \forall x P(x)$ é V, então $\forall x P(x)$ é F, ou seja, existe pelo menos um x tal que $P(x)$ é falso, ou equivalentemente, existe pelo menos um x tal que $\sim P(x)$ é V, e esta última frase pode ser interpretada por $\exists x \sim P(x)$. As outras podem ser obtidas a partir da primeira ou via argumentos como acima. □

Observação 2.12 *Seja P um predicado com universo de discurso formado pelos elementos 1 e 2. Aplicando a tautologia (1) acima, temos:*

$$\sim (P(1) \wedge P(2)) \equiv \sim \forall x P(x) \equiv \exists x\,(\sim P(x)) \equiv \sim P(1) \vee \sim P(2)$$

Note que assim obtemos novamente a lei de De Morgan (veja as regras). Por esta razão, as regras acima são chamadas Leis De Morgan generalizadas.

A regra (3) acima afirma que podemos obter o quantificado $\exists$ partindo do quantificador $\forall$ e da negação $\sim$. Enquanto a regra (4) afirma resultado análogo para o quantificador $\forall$. Desta forma, basta um quantificador (e os conectivos lógicos) para gerar todas as fórmulas na lógica de predicados.

As regras (1) e (2) são utilizadas para o cálculo da negação de um quantificador. Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 2.13 *Digamos que um estudante, quando está aprendendo equações* *literais, acredita na validade da seguinte lei:*

$$\forall x \left[(x+1)^2 = x^2 + 1\right]$$

Nós podemos alertar ao estudante que a lei é falsa mostrando que sua negação é verdadeira, ou seja, que $\exists x\,[(x+1)^2 \neq x^2+1]$ *se cumpre, basta tomar ou* $x = 1$*, ou* $x = 2$.

Exemplo 2.14 *A negação de* $\forall x \forall y\,(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$ *fica:* $\sim\ [\forall x \forall y\,(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)] \equiv \exists x\ \sim\ [\forall y\,(x < y \Rightarrow x^2 < y^2)] \equiv \exists x \exists y\ \sim\ (x < y \Rightarrow x^2 < y^2)$. *Mas como* $\sim\ (P \Rightarrow Q) \equiv \sim (\sim P \vee Q) \equiv P \wedge \sim Q$*, o último predicado é equivalente a :* $\sim\ (x < y \Rightarrow x^2 < y^2) \equiv (x < y) \wedge (x^2 \geq y^2)$. *Portanto, a negação desejada fica:* $\exists x \exists y\,((x < y) \wedge (x^2 \geq y^2))$.

Exemplo 2.15 *Vejamos uma ilustração das propriedades acima no âmbito do cálculo. O limite* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *pode ser reformulado em lógica de predicados pela proposição:* $\forall \varepsilon \exists \delta \forall x\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$. *As vezes, precisamos determinar que* $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$. *Tentar determinar a negação do limite diretamente pode causar confusão, pois tal fórmula envolve três quantificadores. O uso do teorema pode ser muito útil, como por exemplo neste caso. Assim,* $\lim_{x\to a} f(x) \neq L$ *é equivalente a :*

$$\begin{aligned}
&\sim [\forall \varepsilon \exists \delta \forall x\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv \\
&\exists \varepsilon \sim [\exists \delta \forall x\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv \\
&\exists \varepsilon \forall \delta \sim [\forall x\,(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv \\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x \sim [(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv \\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x \sim [\sim (0 < |x-a| < \delta) \vee (|f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv \\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x\,[(0 < |x-a| < \delta) \wedge \sim (|f(x) - L| < \varepsilon)] \equiv \\
&\exists \varepsilon \forall \delta \exists x\,[(0 < |x-a| < \delta) \wedge |f(x) - L| \geq \varepsilon.]
\end{aligned}$$

Comentário: O célebre problema de Fermat, resolvido em 1995, depois de mais de 300 anos de incessantes pesquisas (durante este tempo, tal probema era a mais famosa conjectura em aberto em toda a matemática), consistia "simplesmente " decidir o valor verdade da proposição abaixo:

$$\exists_{n \geq 3} \exists x \exists y \exists z \left(x^n + y^n = z^n \right),$$

onde o universo do discurso compreende os números naturais positivos. A resposta para este problema é não.

Se tentássemos procurar uma solução do sistema via busca computacional, e se fosse encontrada, a proposição seria verdadeira. Como a resposta é falsa, significa que o programa jamais chegaria ao final.

Outros exemplos de tautologias no cálculo de predicados são:

Teorema 2.16 *Mais Tautologias:*

$$\begin{array}{ll}
5) & \forall x \forall y P(x,y) \Leftrightarrow \forall y \forall x P(x,y) \\
6) & \exists x \exists y P(x,y) \Leftrightarrow \exists y \exists x P(x,y) \\
7) & \exists x \forall y P(x,y) \Rightarrow \forall y \exists x P(x,y) \\
8) & \forall x P(x) \Rightarrow \exists x P(x)
\end{array}$$

Observação 2.17 *Outra forma de quantificação é "existe um e apenas um" elemento do universo do discurso que torna o predicado verdadeiro. Este quantificador é representado por $\exists!$. Tente expressá-lo em função dos outros conectivos e quantificadores.*

2.5 Inferências

Análogo ao cálculo proposicional, podemos também realizar argumentos na lógica de predicados. No entanto, regras adicionais de inferência, que estão fora do nosso objetivo, são necessárias para provar afirmações envolvendo predicados e quantificadores.

Já vimos regras de inferência (proposicionais) com intuito de concluir resultados verdadeiros através de argumentos legítimos. Veremos alguns casos simples de regras de inferência em predicados:

2.5.1 Exemplificação universal: EU

Vamos supor o enunciado verdadeiro: "Todos somos mortais"(premissa). Considerando o predicados $M(x)$:"x é mortal ", com x no universo dos humanos, o enunciado fica: $\forall x M(x)$. Como assumimos verdadeira tal proposição, na medida que atribuímos sujeitos específicos, inferimos legitimamante as sentenças:

M(Sócrates) : " Sócrates é mortal. "

M(Kafka) : " Kafka é mortal. "

que são verdadeiras, e assim por diante. Portanto, parece plausível assumir como legítimo o argumento (regra): *o que vale para todos deve valer para um sujeito particular*. No enunciado acima, se vale $\forall x M(x)$, então vale para M(c) (conclusão), onde c é um sujeito particular.

A regra de *exemplificação universal* pode ser resumida na forma:

$$\frac{\forall x P(x)}{P(c).}$$

onde P é um predicado qualquer e c é um sujeito escolhido do discurso. Note que esta regra elimina o quantificador universal.

2.5.2 Generalização universal: GU

A segunda regra de inferência, denominada *generalização universal*, permite a quantificação de uma afirmação. Se mostramos que $P(c)$ vale para todo c do universo de discurso, então podemos concluir que $\forall x P(x)$. O esquema abaixo representa tal argumento (regra):

$$\frac{P(x)}{\forall x P(x)}$$

Note que esta regra inclui o quantificador $\forall$.

2.5.3 Exemplificação existencial: EE

Tal regra formaliza o argumento: *se P(x) vale para algum x, então P(c) vale para algum sujeito c convenientemente escolhido.* A terceira regra de inferência chamada de *exemplificação existencial* é simbolizada por :.

$$\frac{\exists x P(x)}{P(c)}$$

2.5.4 Generalização existencial: GE

Esta última diz: *se P(c) vale para algum sujeito, então deve valer* $\exists x P(x)$. A generelização existencial pode ser representada por

$$\frac{P(c)}{\exists x P(x)}$$

Observação 2.18 *Nestas regras, ou há inclusão ou eliminação de quantificadores.*

2.5.5 Uso das regras

A dedução no cálculo de predicados é feita usualmente utilizando-se os seguintes passos:

1. eliminando quantificadores (regras 1 e 3)

2. " raciocinando " como no cálculo proposicional (isto é, aplicando as conhecidas regras de inferência do cálculo proposicional - modus ponens, silogismos, etc).

3. Introduzindo quantificadores (regras 2 e 4)

Vejamos exemplos:

Exemplo 2.19 *Consideremos a situação:*

" Toda crinça têm direito à edução"
" Zequinha é uma crinça "
" Logo, Zequinha tem direito à edução "

Se $C(x)$ denota: "x é crinça", $D(x)$: " x tem direito à edução" e z representa Zequinha, temos:

1.	$\forall x[C(x) \Rightarrow D(x)]$	premissa
2.	C(z)	premissa
3.	$C(z) \Rightarrow D(z)$	1. exemplif. universal: EU
4.	D(z)	2,3 e modus ponens

O argumento é legítimo.

Exemplo 2.20 "*Sócrates é mortal. Logo, alguém é mortal ": Se M(x) denota " x é mortal " e s denota Sócrates, temos:*

1.	*M(s)*	*premissa*
2	$\exists x M(x)$	*GE*

Exemplo 2.21 *"Todos os ladrões são espertos, Artur não é esperto. Portanto, ele não é ladrão". Predicados: L ser ladrão, E ser esperto, a denota*

Arthur.

1	$\forall x\, [L(x) \Rightarrow E(x)]$	*premissa*
2	$\sim E(a)$	*premissa*
3	$L(a) \Rightarrow E(a)$	*1. EU*
4	$\sim L(a)$	*2,3 Modus Tollens*

2.6 Conexões entre lógica e teoria dos conjuntos

Vamos interpretar o argumento " todos os ganhadores do prêmio Nobel são criativos, Saramago[1] ganhou este prêmio; logo, Saramago é criativo " na óptica da teoria dos conjuntos. Seja $\mathcal{U}$ o universo das pessoas e os predicados A ser prêmio Nobel, B ser criativo. Defina o conjunto dos prêmios Nobel $\mathcal{A} =\{\ x \in \mathcal{U}\ /\ A(x)\}$ e o das pessoas criativas $\mathcal{B} = \{\ x \in \mathcal{U}\ /\ B(x)\}$. Observe agora que o argumento acima:$\forall x\, [A(x) \Rightarrow B(x)]$ e $A(s)$ logo $B(s)$, onde s denota Saramago tem o mesmo significado de: $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $s \in \mathcal{A}$, logo $s \in \mathcal{B}$.

Dado um predicado A, selecionar todos os sujeitos x do universo $\mathcal{U}$ tais que satisfaçam a setença $A(x)$ induz a "criação " de um conjunto $\mathcal{A} =\{\ x \in \mathcal{U}$ / $A(x)$ é verdadeiro$\}$, ou simplesmente $\mathcal{A} =\{\ x \in \mathcal{U}\ /\ A(x)\}$. Note que $A(x)$ representa a cláusula para a escolha de x.

Certamente $\mathcal{A}$ é subconjunto de $\mathcal{U}$. Mais ainda, $\mathcal{A} = \mathcal{U}$ se $A(x)$ é satisfeita para todo x, ou seja $\forall x A(x)$ é verdadeira. Por outro lado, $\mathcal{A} = \emptyset$ quando sempre falha $A(x)$, ou seja $\exists x A(x)$ é falso. Assim, acabamos de verificar as relações :

[1]Saramago: escritor português.

Proposição 2.22 *Em vista das notações acima, temos as equivalências:*

$$\begin{array}{lll} (1) & \mathcal{A} = \mathcal{U} & \forall x A(x) \text{ é } V \\ (2) & \mathcal{A} = \emptyset & \exists x A(x) \text{ é } F \end{array}$$

As "coincidências " não param por aí. Vamos aprofundar a nossa ligação entre lógica e conjuntos. Vimos operações lógicas e também operações sobre conjuntos. Elencamos abaixo uma lista de algumas conexões. Para os nossos propósitos, além de A, inclua os predicados B e C e seus respectivos conjuntos induzidos: $\mathcal{B} = \{\ x \in \mathcal{U}\ /\ B(x)\}$ e $\mathcal{C} = \{\ x \in \mathcal{U}\ /\ C(x)\}$. O símbolo s denota um sujeito particular de $\mathcal{U}$.

Proposição 2.23 *São válidas as conexões:*

$$\begin{array}{lll} (3) & s \in \mathcal{A}^c (\textit{complementar de } \mathcal{A}) & A(s) \text{ é } F \\ (4) & s \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B} & A(s) \vee B(s) \text{ é } V \\ (5) & s \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} & A(s) \wedge B(s) \text{ é } V \\ (6) & \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} & \forall x\, [A(x) \Rightarrow B(x)] \\ (7) & \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B} \textit{ se e somente se } \mathcal{B}^c \subseteq \mathcal{A}^c & \forall x\, [A(x) \Rightarrow B(x)] \equiv \forall x\, [\sim B(x) \Rightarrow \sim A(x)] \end{array}$$

Muitas outra conexões podem ser obtidas, por exemplo a transitividade de $\subseteq$ é traduzido para a transitividade da implicação em predicados, ou seja, "se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$ então $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ " é equivalente a "se $\forall x\, [A(x) \Rightarrow B(x)]$ e $\forall x\, [B(x) \Rightarrow C(x)]$ então $\forall x\, [A(x) \Rightarrow B(x)]$ ".

Resultagos da teoria dos conjuntos podem ser obtidos através de aplicações da inferências lógicas.

Exemplo 2.24 *O resultado " se $s \in \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e $s \notin \mathcal{B}$ então $s \in \mathcal{A}$ " é uma simples consequência do silogismo disjuntivo: " se $A(s) \vee B(s)$ e $\sim B(s)$ logo $A(s)$.*

Em outras situações, o uso de conjuntos facilita o entendimento de alguns enunciados lógicos:

Exemplo 2.25 *Vamos verificar se é sempre válida a implicação:*

$$[(\exists x A(x)) \wedge (\exists x B(x))] \Rightarrow \exists x\,[A(x) \wedge B(x)]$$

Pelas linhas (2) e (5), este resultado é equivalente a

$$\textit{se } \mathcal{A} \neq \emptyset \textit{ e } \mathcal{B} \neq \emptyset \textit{ então } \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \neq \emptyset$$

Tome, por exemplo, $\mathcal{A}$ o conjunto dos números pares e $\mathcal{B}$ os ímpares. Então o resultado acima não se verifica e, por consequência, a implicação também não.

As veses, fica mais fácil interpretar os argumentos através de resultados já conhecidos da teoria dos conjuntos. Talvez o exemplo abaixo convença o leitor.

Exemplo 2.26 *Dadas as premissas:*

(1)" minhas panelas são as únicas coisas feitas de lata que possuo ",

(2) " acho todos seu presentes muito úteis ",

(3)"Nenhuma das minhas panelas tem a menor utilidade ".

Encontre uma conclusão.

Resolução*: Seja $\mathcal{U}$ o conjunto de todas as coisas que possuo, A o conjunto das feitas de lata, B minhas panelas, C minhas coisas úteis e D as que foram presentes seus. Então (1),(2),(3) se traduzem como A=B, $D \subseteq C$, $B \cap C = \emptyset$. Mas $B \cap D \subseteq B \cap C$, pois $D \subseteq C$. Assim $B \cap D = \emptyset$ e portanto $A \cap D = \emptyset$, ou seja, "nenhum dos presentes que você me deu é feito de lata. "*

Lista de Exercícios

1. Se $S(x,y,z)$ denota o predicado: "$x+y=z$ ", $P(x,y,z)$: "$x.y=z$" e $L(x,y)$ denota "$x<y$"; e o universo do discurso é o conjunto dos naturais, expresse as frases usando predicados acima:

   (a) Para todo x e y, existe z tal que $x+y=z$.

   (b) Nenhum x é menor do que zero.

   (c) Existe elemento neutro da adição.

   (d) Existe um único elemento neutro da adição.

   (e) Para todo x, $x.y=y$ para todo y.

   (f) Existe um x tal que $x.y=y$ para todo y.

2. Determine quais das seguintes proposições são verdadeiras se o universo é os inteiros

$$\forall x \exists y [xy=0] \qquad \forall x \exists y [xy=1]$$
$$\exists y \forall x [xy=1] \qquad \exists y \forall x [xy=x]$$

3. Análogo ao exemplo das notas, simule computacionalmente os predicados:

   (a) $\forall x P(x)$ ($P(x)$ um vetor com entradas boolenas de comprimento 20).

   (b) $\forall x \exists y P(x,y)$. ($P(x,y)$ um "array"-matriz 10x30 com entradas boolenas, digamos, $1 \leq x \leq 10$ e $1 \leq y \leq 30$.

4. Outra forma de quantificar é " existe um apenas um " elemento do discurso que torna o predicado P verdadeiro, denotado por $\exists! x P(x)$. Tente expressá-lo em função dos outros conectivos e quantificadores.

5. Quando $\forall x P(x)$ é falso, então existe um sujeito x_0 tal que $P(x_0)$ não vale. Nesta caso dizemos que x_0 é um *contra-exemplo* da proposição P. Encontre contra-exemplos das proposições abaixo:

(a) “ Todos os primos são ímpares ”: $\forall x[x$ é primo $\Rightarrow x$ é ímpar$]$

(b) “ Todos inteiro é soma de 2 quadrados ”

(c) “ Todos inteiro é soma de 3 quadrados ”

6. Utilizando os predicados: $a \backslash b$ “a divive b”, $a = b$ “ a igual a b ”, exiba o predicado $P(x)$:“ x é primo ” em notação lógica. Como fica a sua negação sem usar $\rceil$?

7. Expresse a sentença “ não existe o maior primo ” (use predicado P do exercício acima e o predicado “ maior que: $>$.

8. Seja $T(a, b, c)$ o predicado “a, b, c são lados de um triângulo retângulo, enuncie o teorem de Pitágoras (pode usar também o predicado $\leq$).

9. Universo: inteiros. Para cada uma das afirmações abaixo, encontre um predicado P que torna a implicacão falsa

   (a) $\forall x \exists ! y P(x, y) \Rightarrow \exists ! y \forall x P(x, y)$

   (b) $\exists ! y \forall x P(x, y) \Rightarrow \forall x \exists ! y P(x, y)$

10. Mostre que as afirmações não são válidas:

$$\exists x\,[P(x) \Rightarrow Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\exists x P(x) \Rightarrow \exists x Q(x)]$$
$$\forall x\,[P(x) \Rightarrow Q(x)] \quad \Leftrightarrow \quad [\forall x P(x) \Rightarrow \forall x Q(x)]$$

11. Inferir: “ Todos os gaúchos gostam de contar estórias. Todos os contadores de estórias são interessantes. O escritor Veríssimo é gaúcho. Logo, alguém é gaucho e interessante ” (G ser gaúcho, C: contar estórias, I : interessante, V: Veríssimo) .

Referências Bibliográficas

[1] D. Andrade, “ *Introdução à Álgebra - Notas de aula*”, UEM-DMA (1992)

[2] W. A. Carnielli, “ *Introdução à Lógica - Notas de aula*”, IMECC-Unicamp (1991)

[3] S.S. Epp, Discrete Mathematics with Applications, Wadsworth Publ., USA, 1990.

[4] H.G. Camphell e R.E. Spencer, Finite Mathematics, Macmillian Publ., Canada, 1974.

[5] L. Hegenberg, “Lógica, Simbolização e Dedução ”, EPU, Universidade de São Paulo (1975)

[6] R. Johnsonbaugh, Essencial Discrete Mathematics, Macmillian Publ., New york, 1987.

[7] P. Suppes and S. Hill, Primeiro curso de lógica matemática, Ed. Reverté, 1968.

[8] A. Tarski, Introduccioón a la lógica, y a la metodología de las ciencias deductivas, Espasa-Calpe, Madrid, 1968.

Doherty Andrade, Departamento de Matemática,Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo 5790 –CEP 87020-900– Maringá Brazil.
Email doherty@dma.uem.br

Emerson M. Carmelo, Departamento de Matemática,Universidade Estadual de Maringá, Av. Colombo 5790 –CEP 87020-900– Maringá Brazil.
Email carmelo@dma.uem.br.