Programa de Integração Estudantil - PROINTE

Apostila de exercícios resolvidos de Geometria Analítica

Preceptora: Jéssica Mariane B. da Silva

Coordenadora: Patrícia Hernandes Baptistelli

Universidade Estadual de Maringá

Maringá, 2021

Capítulo 1

Álgebra Vetorial

1.1 Adição de vetores e produto por escalar.

Exercício 1.1. *Prove que* $(A + \vec{u}) - \vec{u} = A$.

Solução: Utilizando a propriedade associativa de vetores, temos:

$$(A + \vec{u}) - \vec{u} = A + (\vec{u} - \vec{u}) = A + \vec{0}.$$

O vetor nulo $\vec{0}$ pode ser representado por $\overrightarrow{AA}$, pois é do tipo (A, A), com origem e extremidade coincidentes. Então,

$$(A + \vec{u}) - \vec{u} = A + \vec{0} = A + \overrightarrow{AA} = A.$$

Exercício 1.2. *Sendo os vetores* $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (2, 1, 3)$ *e* $\vec{w} = (-1, -1, 4)$ *com relação a uma base fixada de* V^3*, determine:*
a) $\vec{u} + \vec{v}$*;* *b)* $\vec{u} - 2\vec{v}$*;* *c)* $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$*.*

Solução:
a) $\vec{u} + \vec{v} = (1, -1, 3) + (2, 1, 3) = (3, 0, 6)$;
b) $\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -1, 3) - 2(2, 1, 3) = (1, -1, 3) + (-4, -2, -6) = (-3, -3, -3)$;
c)

$$\begin{aligned}\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w} &= (1, -1, 3) + 2(2, 1, 3) - 3(-1, -1, 4) \\ &= (1, -1, 3) + (4, 2, 6) + (3, 3, -12) \\ &= (1 + 4 + 3, -1 + 2 + 3, 3 + 6 - 12) = (8, 4, -3).\end{aligned}$$

1.2 Dependência, independência linear e base.

Exercício 1.3. *O vetor* $\vec{u} = (1, -1, 3)$ *pode ser escrito como combinação linear de* $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ *e* $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$*?*

Solução: O vetor $\vec{u}$ é combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$ se existirem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}.$$

Substituindo, temos:

$$(1, -1, 3) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(2, 3, 1/3) = (-\alpha, \alpha, 0) + (2\beta, 3\beta, \beta/3) = (-\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \beta/3).$$

Logo,

$$\begin{cases} 1 = -\alpha + 2\beta & (1) \\ -1 = \alpha + 3\beta & (2) \\ 3 = \beta/3 & (3) \end{cases}$$

Pela equação (3), $\beta = 9$. Substituindo o valor encontrado de β na equação (2), obtemos

$$-1 = \alpha + 27 \Rightarrow \alpha = -28.$$

Com os valores encontrados de α e β, vamos verificar se o sistema possui ou não solução, utilizando a equação (1):

$$-\alpha + 2\beta = -(-28) + 18 = 46.$$

Como $46 \neq 1$, temos que o sistema não possui solução. Sendo assim, o vetor $\vec{u}$ não pode ser escrito como combinação linear dos vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Exercício 1.4. *Se* $E = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *é uma base de* V^3*, quais condições deve satisfazer* m *para que*

$$F = (\vec{u} + \vec{v}, m\vec{v} - \vec{w}, \vec{u} + m\vec{w})$$

seja outra base de V^3*? Escreva a matriz mudança de base de* E *para* F*.*

Solução: Temos

$$F = (\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}) = (\vec{u} + \vec{v}, m\vec{v} - \vec{w}, \vec{u} + m\vec{w}).$$

Para F ser uma base de V^3 precisamos que os vetores $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$ sejam LI. Para que isso ocorra, devemos ter

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} \neq 0,$$

pois

$$\vec{f_1} = 1 \cdot \vec{u} + 1 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{w}, \quad \vec{f_2} = 0 \cdot \vec{u} + m \cdot \vec{v} - 1 \cdot \vec{w} \quad \text{e} \quad \vec{f_3} = 1 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} + m \cdot \vec{w}.$$

Então,

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & -1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0.$$

Logo, $m^2 \neq 1$, o que implica $m \neq \pm 1$.

A matriz mudança de base de E para F é dada por

$$M_{EF} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \\ 0 & -1 & m \end{pmatrix},$$

onde as colunas da matriz representam as coordenadas dos vetores $\vec{f_1}, \vec{f_2}$ e $\vec{f_3}$ da base F em função dos vetores da base E.

1.3 Produto interno, vetorial e misto.

Exercício 1.5. *Obtenha o produto interno $\vec{u} \cdot \vec{v}$ em relação a uma base ortonormal de V^3, sendo:*

a) $\vec{u} = (2, -5, 6)$ *e* $\vec{v} = (8, 2, -3)$*;*

b) $\vec{u} = (4, 2, -3)$ *e* $\vec{v} = (2, 6, -1)$*.*

Solução: a) Como os vetores são dados em relação a uma base ortonomal, temos:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2, -5, 6) \cdot (8, 2, -3) = 16 - 10 - 18 = -12.$$

b) De modo análogo ao item anterior,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (4, 2, -3) \cdot (2, 6, -1) = 8 + 12 + 3 = 23.$$

Exercício 1.6. *Sejam os vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$, $\vec{v} = 3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$, em que $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é a base canônica de V^3. Encontre:*

a) $\vec{u} \wedge \vec{v}$*;*

b) $\vec{u} \wedge \vec{w}$*.*

Solução: a) Existe um método algébrico simbólico para calcular tal produto vetorial:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 6\vec{i} + 12\vec{j} + 2\vec{k} - (-9\vec{k} - 4\vec{j} + 4\vec{i}) = 2\vec{i} + 16\vec{j} + 11\vec{k}.$$

b) Utilizando o mesmo método algébrico, temos

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k} - (-3\vec{k} + 6\vec{j} + 20\vec{i}) = -29\vec{i} - 2\vec{j} + 13\vec{k}.$$

Exercício 1.7. *Dados os vetores* $\vec{a} = (1, -1, 2)$*,* $\vec{b} = (3, 4, -2)$ *e* $\vec{c} = (-5, 1, -4)$ *com respeito à base canônica, mostre que*

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Solução: Sendo $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (3, 4, -2)$ e $\vec{c} = (-5, 1, -4)$, vamos calcular primeiro o produto misto $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$. Calculando $\vec{b} \wedge \vec{c}$, temos:

$$\vec{b} \wedge \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -2 \\ -5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16\vec{i} + 10\vec{j} + 3\vec{k} - (-20\vec{k} - 12\vec{j} - 2\vec{i}) = -14\vec{i} + 22\vec{j} + 23\vec{k}.$$

Portanto, $\vec{b} \wedge \vec{c} = (-14, 22, 23)$, donde segue que

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (1, -1, 2) \cdot (-14, 22, 23) = -14 - 22 + 46 = 10.$$

Resolvendo agora $(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$, começamos calculando $\vec{a} \wedge \vec{b}$:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + 4\vec{k} - (-3\vec{k} - 2\vec{j} + 8\vec{i}) = -6\vec{i} + 8\vec{j} + 7\vec{k}.$$

Assim, $\vec{a} \wedge \vec{b} = (-6, 8, 7)$, donde segue que

$$(\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c} = (-6, 8, 7) \cdot (-5, 1, -4) = 30 + 8 - 28 = 10.$$

Portanto, $\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \wedge \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

Capítulo 2

Retas e Planos

2.1 Equações da reta.

Exercício 2.1. *Estude a posição relativa das retas r e s:*

a) $r : X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1), \qquad s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}$;

b) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3), \qquad s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2)$;

c) $r : x + 3 = \dfrac{2y - 4}{4} = \dfrac{z - 1}{3}, \qquad s : X = (0, 2, 2) + \lambda(1, 1, -1)$.

Solução: a) Um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (-2, 1, -1)$. Para encontrar um vetor diretor da reta s, tomemos $y = 0$. Usando a primeira equação de s, temos $z = 3$. Substituindo na segunda equação de s, obtemos:

$$x + 0 - 3 = 6 \Rightarrow x = 9.$$

Portanto, o ponto $A = (9, 0, 3)$ pertence à reta s. Analogamente, tomando $y = 1$, temos:

$$1 + z = 3 \Rightarrow z = 2$$

e, portanto,

$$x + 1 - 2 = 6 \Rightarrow x = 7.$$

Logo, temos $B = (7, 1, 2) \in s$. Logo, podemos considerar o seguinte vetor diretor de s:

$$\vec{s} = \overrightarrow{AB} = (7, 1, 2) - (9, 0, 3) = (-2, 1, -1).$$

Como os vetores diretores das retas r e s são iguais e, portanto, linearmente dependentes, as retas r e s são paralelas.

Resta verificar se tais retas são coincidentes ou não. Pra isso, vamos verificar se o ponto $P = (1, -1, 1) \in r$ pertence ou não à reta s. Veja que somando a ordenada com a cota do ponto P, temos

$$y + z = -1 + 1 = 0 \neq 3.$$

Logo, a primeira equação da reta s não é satisfeita, implicando que P não pertence à s. Como $P \in r$, concluímos que r e s são retas paralelas distintas.

b) Facilmente vemos que $\vec{r} = (2, -1, 3)$ e $\vec{s} = (1, -2, 2)$ são vetores diretores das retas r e s. Como $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são linearmente independentes, pois não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r} = \alpha.\vec{s}$, concluímos que as retas r e s não são paralelas. Resta verificar se elas são concorrentes ou reversas. Considere os pontos $A = (8, 1, 9) \in r$ e $B = (3, -4, 4) \in s$. Veja que

$$\overrightarrow{BA} = (8, 1, 9) - (3, -4, 4) = (5, 5, 5).$$

Vamos verificar se $\overrightarrow{BA}, \vec{r}, \vec{s}$ são LD ou LI. Como

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -10 - 20 + 15 - (-5 + 20 - 30) = -15 + 15 = 0,$$

concluímos que $\{\overrightarrow{BA}, \vec{r}, \vec{s}\}$ é LD. Portanto as retas r e s são concorrentes.

c) Com relação à reta r, temos que

$$x + 3 = \frac{2(y-2)}{4} = \frac{z-1}{3},$$

ou seja,

$$\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}.$$

Logo $\vec{r} = (1, 2, 3)$ é um vetor diretor da reta r. Considere $\vec{s} = (1, 1, -1)$ um vetor diretor da reta s. Como $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI (pois não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r} = \alpha.\vec{s}$), temos que r e s não são paralelas.

Novamente, vamos verificar se r e s são concorrentes ou reversas. Para isso considere $A = (-3, 2, 1) \in r$ e $B = (0, 2, 2) \in s$. Sendo o vetor

$$\overrightarrow{AB} = (0, 2, 2) - (-3, 2, 1) = (3, 0, 1),$$

temos que

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -6 + 1 - (2 + 9) = -5 - 11 = -16 \neq 0.$$

Logo $\{\overrightarrow{AB}, \vec{r}, \vec{s}\}$ é LI, implicando que as retas r e s são reversas.

Exercício 2.2. *Para quais valores de M, as retas*

$$r : (0, 1, 0) + \lambda(M - 1, M, 0),$$

$$s : (1, 1, M) + \lambda'(M - 1, M + 1, 0),$$

com $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$, são reversas, concorrentes e paralelas? Neste último caso, para cada valor de M encontrado, diga se as retas são coincidentes ou distintas. No caso de serem concorrentes, para cada M, determine o ponto de interseção.

Solução: Os vetores diretores das retas r e s são $\vec{r} = (M-1, M, 0)$ e $\vec{s} = (M-1, M+1, 0)$, respectivamente. Temos que r e s são paralelas se, e somente se, existir $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r} = \alpha.\vec{s}$. Neste caso,

$$(M - 1, M, 0) = \alpha(M - 1, M + 1, 0) \Leftrightarrow \begin{cases} M - 1 = \alpha(M - 1) \\ M = \alpha(M + 1) \end{cases} .$$

Como temos duas divisões dentro do sistema, vamos analisar os casos em que $M \neq \pm 1$, $M = 1$ e $M = -1$.

- Para $M \neq \pm 1$, temos:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{M - 1}{M - 1} = 1 \\ \alpha = \dfrac{M}{M + 1} \end{cases} .$$

Logo,

$$\frac{M}{M + 1} = 1,$$

o que não ocorre para $M \in \mathbb{R}$. Logo, para $M \neq \pm 1$ as retas r e s não são paralelas. Neste caso, elas são concorrentes ou reversas.

Para descobrir se r e s são concorrentes ou reversas, vamos primeiramente verificar se elas têm ou não um ponto de interseção. Igualando as equações de r e s, obtemos:

$$(\lambda(M - 1), 1 + \lambda M, 0) = (1 + \lambda'(M - 1), 1 + \lambda'(M + 1), M),$$

donde segue que

$$\begin{cases} \lambda(M - 1) = 1 + \lambda'(M - 1) \\ 1 + \lambda M = 1 + \lambda'(M + 1) \\ 0 = M \end{cases} .$$

Como $M = 0$, concluímos que $-\lambda = 1 - \lambda'$ e $\lambda' = 0$. Logo, $\lambda = -1$. Substituindo $M = 0$ e $\lambda = -1$ na equação da reta r, obtemos

$$P = (0, 1, 0) + (-1)(-1, 0, 0) = (0, 1, 0) + (1, 0, 0) = (1, 1, 0),$$

que é o ponto de interseção de r e s. Então as retas r e s são concorrentes no ponto $P = (1, 1, 0)$ se $M = 0$. Se $M \neq \pm 1$ e $M \neq 0$, r e s são retas reversas.

• Para $M = 1$, os vetores diretores das retas r e s são $\vec{r} = (0, 1, 0)$ e $\vec{s} = (0, 2, 0)$. Como $\vec{s} = 2\vec{r}$, concluímos que $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LD. Logo, para $M = 1$, as retas r e s são paralelas. Considere $A = (0, 1, 0) \in r$. Vamos verificar se A pertence à reta s quando $M = 1$. Veja que $A \in s$ se, e somente se, existe $\lambda' \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1, 1, M) + \lambda'(M - 1, M + 1, 0) = (1, 1, 1) + \lambda'(0, 2, 0) = (0, 1, 0).$$

Neste caso,

$$(1, 1 + 2\lambda', 1) = (0, 1, 0),$$

donde segue que $1 = 0$ e $1 + 2\lambda' = 1$. Como $1 \neq 0$, o ponto A não pertence a s. Assim, para $M = 1$, as retas r e s são paralelas distintas.

• Para $M = -1$, temos que os vetores diretores das retas r e s são $\vec{r} = (-2, -1, 0)$ e $\vec{s} = (-2, 0, 0)$. Claramente, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são LI, pois não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r} = \alpha\vec{s}$. Assim, para $M = -1$, r e s são reversas ou concorrentes. Vamos verificar se existe um ponto de interseção dessas duas retas para este caso. Igualando as equações das retas r e s para $M = -1$, temos

$$(0, 1, 0) + \lambda(-2, -1, 0) = (1, 1, -1) + \lambda'(-2, 0, 0),$$

o que ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} -2\lambda = 1 - 2\lambda' \\ 1 - 2\lambda = 1 \\ 0 = -1 \end{cases}.$$

Como $0 \neq -1$, não existe ponto de interseção de r e s. Logo, para $M = -1$, as retas r e s são reversas.

2.2 Equações do plano.

Exercício 2.3. *Estude a posição relativa dos planos* π_1 *e* π_2 *dados nos itens abaixo. Classifique-os como paralelos (coincidentes ou não) ou transversais. Se eles forem transversais, apresente a equação paramétrica da reta que é a interseção entre eles.*

a) $\pi_1 : 2x - y + z - 1 = 0$ *e* $\pi_2 : 4x - 2y + 2z - 9 = 0$;

b) $\pi_1 : x + 10y - z - 4 = 0$ *e* $\pi_2 : 4x + 40y - 4z - 16 = 0$;

c) $\pi_1 : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(-1, 0, 3)$ *e* $\pi_2 : X = (1, 0, 1) + \lambda'(1, 1, 1) + \mu'(0, 1, 0)$.

Solução: a) Os coeficientes da equação geral do plano π_1 são: $a_1 = 2, b_1 = -1, c_1 = 1$ e $d_1 = -1$. Os coeficientes do plano π_2 são: $a_2 = 4, b_2 = -2, c_2 = 2$ e $d_2 = -9$. Note que (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) são proporcionais, pois

$$(a_2, b_2, c_2) = 2(a_1, b_1, c_1).$$

Logo, π_1 e π_2 são paralelos. Claramente, d_1 e d_2 não seguem a mesma proporção que os demais coeficientes, pois $d_2 = 9d_1$. Logo, π_1 e π_2 são planos paralelos distintos.

b) De modo análogo, os coeficientes da equação geral do plano π_1 são: $a_1 = 1$, $b_1 = 10$, $c_1 = -1$ e $d_1 = -4$. Os coeficientes do plano π_2 são: $a_2 = 4$, $b_2 = 40$, $c_2 = -4$ e $d_2 = -16$. Note que (a_1, b_1, c_1, d_1) e (a_2, b_2, c_2, d_2) são proporcionais, pois

$$(a_2, b_2, c_2, d_2) = 4(a_1, b_1, c_1, d_1).$$

Logo, π_1 e π_2 são coincidentes (paralelos e iguais).

c) Neste caso, vamos obter primeiramente as equações dos planos π_1 e π_2 na forma geral. No caso de π_1, ele passa pelo ponto $(0, 0, 0)$ e tem $(1, 0, 1)$ e $(-1, 0, 3)$ como vetores diretores. Logo

$$\begin{vmatrix} x - 0 & y - 0 & z - 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

o que nos dá $-y - 3y = 0$. Portanto, a equação geral de π_1 é $y = 0$. No caso do plano π_2, temos $(1, 0, 1) \in \pi_2$ e os vetores diretores são $(1, 1, 1)$ e $(0, 1, 0)$. Logo,

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 0 & z - 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

o que nos dá

$$z - 1 - (x - 1) = 0.$$

Portanto, a equação geral de π_2 é $x - z = 0$. Em símbolos,

$$\pi_1 : y = 0 \quad e \quad \pi_2 : x - z = 0.$$

Assim os coeficientes do plano π_1 são $a_1 = c_1 = d_1 = 0$, $b_1 = 1$, e do plano π_2 são $a_2 = 1, b_2 = d_2 = 0$ e $c_2 = -1$. Como $(a_1, b_1, c_1) = (0, 1, 0)$ e $(a_2, b_2, c_2) = (1, 0, -1)$ não são proporcionais, os planos π_1 e π_2 são transversais. Vamos determinar qual a reta de interseção entre π_1 e π_2. Seja $(x, y, z) \in \pi_1 \cap \pi_2$. Então $y = 0$ e $z = x$, donde obtemos

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}, \tag{2.1}$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$, com a equação vetorial da reta de interseção dado por $r : (0, 0, 0) + \lambda(1, 0, 1)$. Logo, os planos π_1 e π_2 são transversais e a interseção deles é determinada pela reta com equação paramétrica dada em (2.1).

2.3 Posições relativas entre retas e planos.

Exercício 2.4. *Estude a posição relativa da reta r e do plano π dados nos itens abaixo. Determine se r está contida em π ou se r e π são transversais. Quando este for o caso, determine em qual ponto r e π se interceptam.*

a) $r : \dfrac{x-1}{2} = y = z$ *e* $\pi : X = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0)$;

b) $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ *e* $\pi : x + y - z + 2 = 0$;

c) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1)$ *e* $\pi : x + y - 2 = 0$.

Solução: $a)$ O vetor diretor da reta r é dado por $\vec{r} = (2, 1, 1)$ e os vetores diretores do plano π são $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (2, 2, 0)$. Vamos verificar se os vetores $\vec{r}, \vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente dependentes ou não. Para isso, vamos resolver o determinante abaixo:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Como tal determinante é nulo, temos que $\{\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, ou seja, a reta r é paralela ao plano π. Considere o ponto $A = (3, 1, 1)$ pertencente à reta r. Vamos verificar se esse ponto também pertence ao plano π. Veja que

$$(3, 1, 1) = (3, 0, 1) + \lambda(1, 0, 1) + \mu(2, 2, 0),$$

se, e somente se,

$$\begin{cases} 3 = 3 + \lambda + 2\mu \\ 1 = 2\mu \\ 1 = 1 + \lambda \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2\mu + \lambda = 0 \\ \mu = 1/2 \\ \lambda = 0 \end{cases}.$$

Para $\lambda = 0$ e $\mu = 1/2$, temos que $2\mu + \lambda = 1 + 0 = 1 \neq 0$. Portanto, o sistema anterior não admite solução, implicando que o ponto A não pertence a π. Conclui-se assim que a reta r é paralela ao plano π, mas não está contida em π.

b) O vetor diretor da reta r é dado por $\vec{r} = (1, -1, 1)$ e os coeficientes da equação geral do plano π são: $a = 1$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = 2$. Logo, $\vec{n} = (1, 1, -1)$ é um vetor normal a π. Calculando o produto escalar entre $\vec{n}$ e $\vec{r}$, obtemos

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 1 = -1.$$

Como $\vec{n} \cdot \vec{r} \neq 0$, a reta r é transversal ao plano π. Vamos agora determinar o ponto de interseção entre r e π. Veja que $(x, y, z) \in r \cap \pi$ se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$(1 + \lambda) + (1 - \lambda) - \lambda + 2 = 0,$$

ou seja, $-\lambda + 4 = 0$. Logo $\lambda = 4$, o qual nos fornece o ponto

$$\begin{cases} x = 1 + 4 = 5 \\ y = 1 - 4 = -3 \\ z = 4 \end{cases}.$$

Concluímos que o ponto de interseção entre r e π é $P = (5, -3, 4)$.

c) O vetor diretor da reta r é dado por $\vec{r} = (1, -1, 1)$ e os coeficientes da equação geral do plano π são: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ e $d = -2$. Logo, $\vec{n} = (1, 1, 0)$ é o vetor normal a π. Como

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 = 0,$$

a reta r é paralela a π. Vamos verificar se r está ou não contida em π.

Tomando o ponto $A = (1, 1, 0)$, que pertence a r, vamos verificar se esse ponto também pertence ao plano π. Substituindo A na equação de π, obtemos

$$x + y - 2 = 1 + 1 - 2 = 0.$$

Logo, A pertence ao plano π, implicando que a reta r está contida no plano π.

Exercício 2.5. *Determine M para que a reta r seja paralela ao plano π, onde*

$$r : X = (1,1,1) + \lambda(2,M,1) \quad e \quad \pi : X = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1).$$

Solução: Sendo $\vec{r} = (2, M, 1)$ um vetor diretor da reta r, e sendo $\vec{u} = (1, 2, 0)$ e $\vec{v} = (1, 0, 1)$ vetores diretores do plano π, temos que r é paralela a π se $\{\vec{r}, \vec{u}, \vec{v}\}$ é LD, ou seja, se o determinante

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ M & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 - (2 + M)$$

é nulo. Veja que $4 - (2 + M) = 0$ se, e somente se, $M = 2$. Logo, se $M = 2$, então r é paralela a π.

Para verificar se r está contida em π, basta verificar se $A = (1, 1, 1)$ pertence a π. De fato, suponha que existam μ e λ tais que

$$(1,1,1) = (0,0,0) + \lambda(1,2,0) + \mu(1,0,1).$$

A igualdade acima equivale ao sistema

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 1 = 2\lambda \\ 1 = \mu \end{cases},$$

o qual não admite solução, pois para $\lambda = \frac{1}{2}$ e $\mu = 1$, temos

$$\lambda + \mu = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} \neq 1.$$

Logo, o ponto A não pertence ao plano π. Assim, para $M = 2$, a reta r é paralela ao plano π, mas não está contida em π.

Exercício 2.6. *Calcule M e N para que a reta r esteja contida no plano π, onde*

$$r : X = (N,2,0) + \lambda(2,M,M) \quad e \quad \pi : x - 3y + z = 1.$$

Solução: Temos $\vec{r} = (2, M, M)$ como um vetor diretor da reta r e os coeficientes do plano π iguais a $a = 1$, $b = -3$, $c = 1$ e $d = -1$. Para a reta r estar contida no plano π devemos ter $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$, onde $\vec{n} = (1, -3, 1)$ é o vetor normal a π. Além disso, o ponto $A = (N, 2, 0) \in r$ deve pertencer também ao plano π. Veja que

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = 1 \cdot 2 + (-3) \cdot M + 1 \cdot M = 2 - 2M.$$

Portanto, $\vec{n} \cdot \vec{r} = 0$ se, e somente se, $2 - 2M = 0$, o que ocorre para $M = 1$. Também precisamos que o ponto A pertença ao plano π, portanto vamos substituir o ponto A na equação do plano:

$$N - 3 \cdot 2 + 0 = 1 \Rightarrow N - 6 = 1 \Rightarrow N = 7.$$

Logo, para a reta r estar contida no plano π, devemos ter $M = 1$ e $N = 7$.

2.4 Ângulo entre duas retas, entre reta e plano e dois planos.

Exercício 2.7. *Calcule a medida angular θ entre as retas $r : X = (1,1,9) + \lambda(0,-1,1)$ e $s : x - y + 3 = z = 4$.*

Solução: Temos $\vec{r} = (0,-1,1)$ como um vetor diretor da reta r. Reescrevendo a equação da reta s na forma paramétrica, temos:

$$s : \begin{cases} x - y = 4 - 3 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = 4 \end{cases},$$

para $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo $\vec{s} = (1,1,0)$ é um vetor diretor da reta s. A medida angular θ entre r e s é tal que

$$\cos\theta = \frac{|\vec{r} \cdot \vec{s}|}{||\vec{r}||||\vec{s}||}.$$

Portanto,

$$\cos\theta = \frac{|(0,-1,1) \cdot (1,1,0)|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2},$$

o que nos dá

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} rad.$$

Então, a medida angular entre as retas r e s é igual a $\theta = \dfrac{\pi}{3} rad.$

Exercício 2.8. *Obtenha a medida angular entre a reta r e o plano π dados por*

$$r : X = (0,0,1) + \lambda(-1,1,0) \quad e \quad \pi : 3x + 4y = 0.$$

Solução: Um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (-1,1,0)$ e o vetor normal ao plano π é $\vec{n} = (3,4,0)$, onde as coordenadas desse vetor são os coeficientes da equação geral de π.

A medida angular θ entre r e π é tal que

$$\text{sen } \theta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{r}|}{||\vec{n}||||\vec{r}||},$$

ou seja,

$$\text{sen } \theta = \frac{|(3,4,0) \cdot (-1,1,0)|}{\sqrt{3^2+4^2}\sqrt{(-1)^2+1^2}} = \frac{|-3+4|}{5\sqrt{2}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}.$$

Com isso, temos que

$$\theta = \text{arcsen}\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \approx 0,045\pi rad.$$

Obtemos assim a medida angular entre a reta r e o plano π de $\theta \approx 0,045\pi rad$.

Exercício 2.9. *Calcule a medida angular ente os planos π_1 e π_2 dados por*

$$\pi_1 : X = (1,0,0) + \lambda(1,0,1) + \mu(-1,0,0) \quad e \quad \pi_2 : x + y + z = 0.$$

Solução: Temos que $\vec{u} = (1,0,1)$ e $\vec{v} = (-1,0,0)$ são vetores diretores do plano π_1. O vetor normal ao plano π_1 é o resultado do produto vetorial entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então:

$$\vec{n}_1 = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{j}.$$

Logo, $\vec{n}_1 = (0,-1,0)$. Temos que o vetor normal ao plano π_2 é $\vec{n}_2 = (1,1,1)$, sendo o cosseno do ângulo θ entre π_1 e π_2 dado por:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{||\vec{n}_1||||\vec{n}_2||}.$$

Substituindo temos:

$$\cos\theta = \frac{|(0,-1,0)\cdot(1,1,1)|}{\sqrt{(-1)^2}\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|-1|}{1\cdot\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Logo,

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \Rightarrow \theta \approx 0,3\pi rad.$$

Então, obtemos que a medida angular entre os planos π_1 e π_2 é de aproximadamente $\theta = 0,3\pi rad$.

2.5 Distância entre ponto e reta, entre retas, entre reta e plano e entre planos.

Exercício 2.10. *Calcule a distância do ponto* $P = (1, -1, 4)$ *à reta*

$$r : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{1-z}{2}.$$

Solução: Podemos escrever a equação da reta r como

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-1}{-2}.$$

Sendo assim, um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (4, -3, -2)$. A distância de P a r é dada pela igualdade

$$d(P, r) = \frac{||\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r}||}{||\vec{r}||}, \tag{2.2}$$

onde A é um ponto qualquer de r. Tendo o ponto $A = (2, 0, 1) \in r$, então

$$\overrightarrow{AP} = (1, -1, 4) - (2, 0, 1) = (-1, -1, 3).$$

Calculando o produto vetorial

$$\overrightarrow{AP} \wedge \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 3 \\ 4 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 12\vec{j} + 3\vec{k} - (-4\vec{k} + 2\vec{j} - 9\vec{i}) = 11\vec{i} + 10\vec{j} + 7\vec{k},$$

temos por (2.2) que

$$d(P, r) = \frac{||(11, 10, 7)||}{||(4, -3, -2)||} = \frac{\sqrt{11^2 + 10^2 + 7^2}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{270}{29}}.$$

Portanto, a distância entre o ponto P e a reta r é de aproximadamente $3,05$ unidades de medida.

Exercício 2.11. *Calcule a distância entre as retas* r *e* s*, em que:*

a) $r : X = (2, 1, 0) + \lambda(1, -1, 1), \quad s : x + y + z = 2x - y - 1 = 0;$

b) $r : y = 3z - 2 = 3x + 1, \quad s : 3x - 2z + 3 = 0 = y - z - 2$

Solução: $a)$ Veja que $\vec{r} = (1, -1, 1)$ é um vetor diretor da reta r. Reescrevendo a reta s na forma paramétrica, temos:

$$s : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = -x - y \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -x - (2x - 1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1 \\ z = -3x + 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2\lambda - 1 \\ z = -3\lambda + 1 \end{cases}.$$

Assim, um vetor diretor da reta s é $\vec{s} = (1, 2, -3)$. Então, a distância entre as retas r e s é dada pela igualdade

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s}|}{||\vec{r} \wedge \vec{s}||}, \tag{2.3}$$

onde A é um ponto qualquer de r e B é um ponto qualquer de s. Calculando o produto vetorial $\vec{r} \wedge \vec{s}$, temos:

$$\vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} - (-\vec{k} + 2\vec{i} - 3\vec{j}) = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k} = (1, 4, 3) \neq \vec{0}.$$

Além disso, considerando o ponto $A = (2, 1, 0) \in r$ e o ponto $B = (0, -1, 1) \in s$, também temos

$$\overrightarrow{AB} = (0, -1, 1) - (2, 1, 0) = (-2, -2, 1).$$

Logo,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s} = (-2, -2, 1) \cdot (1, 4, 3) = -2 - 8 + 3 = -7.$$

Substituindo na equação (2.3),

$$d(r, s) = \frac{|-7|}{\sqrt{1^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{26}} = \frac{7\sqrt{26}}{26}.$$

Portanto, a distância entre r e s é de aproximadamente $1,37$ unidades de medida.

b) Reescrevendo a equação da reta r na forma paramétrica, temos:

$$r : \begin{cases} 3x + 1 = y \\ 3z - 2 = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -1 + y \\ 3z = 2 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} + \frac{\lambda}{3} \\ y = \lambda \\ z = \frac{2}{3} + \frac{\lambda}{3} \end{cases},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (\frac{1}{3}, 1, \frac{1}{3})$. De modo análogo, reescrevendo a equação da reta s na forma paramétrica, temos:

$$s : \begin{cases} 3x - 2z + 3 = 0 \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = -3 + 2z \\ y = 2 + z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 + \frac{2\lambda}{3} \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Logo, um vetor diretor da reta s é $\vec{s} = (\frac{2}{3}, 1, 1)$. Note que

$$\vec{r} \wedge \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 2/3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \frac{2}{9}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k} - \left(\frac{2}{3}\vec{k} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{i}\right) = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{9}\vec{j} - \frac{1}{3}\vec{k}.$$

Logo, $\vec{r} \wedge \vec{s} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}\right) \neq \vec{0}$. Podemos assim aplicar a fórmula da distância entre as duas retas dada em (2.3). Considerando o ponto $A = \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) \in r$ e o ponto $B = (-1, 2, 0) \in s$, obtemos

$$\overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0) - \left(-\frac{1}{3}, 0, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, 2, -\frac{2}{3}\right).$$

Então,

$$\overrightarrow{AB} \cdot \vec{r} \wedge \vec{s} = \left(-\frac{2}{3}, 2, -\frac{2}{3}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{9} - \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = -\frac{4}{9}.$$

Substituindo na equação (2.3):

$$d(r, s) = \frac{\left|-\frac{4}{9}\right|}{\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{9}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{4}{9}}{\sqrt{\frac{46}{81}}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{9}{\sqrt{46}} = \frac{4}{\sqrt{46}}.$$

Portanto, a distância entre a reta r e a reta s é de aproximadamente $0,59$ unidades de medida.

Exercício 2.12. *Calcule a distância entre a reta r e o plano π dados abaixo:*

a) $r : X = (1, 9, 4) + \lambda(3, 3, 3), \qquad \pi : X = (5, 7, 9) + \lambda(1, 0, 0) + \mu(0, 1, 0)$;

b) $r : x - y + z = 0 = 2x + y - z - 3, \qquad \pi : y - z = 4.$

Solução: $a)$ Um vetor diretor da reta r é dado por $\vec{r} = (3, 3, 3)$. O vetor normal $\vec{n}$ ao plano π é o resultado do produto vetorial entre os seus vetores diretores $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1, 0)$. Assim,

$$\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k} = (0, 0, 1).$$

Calculando o produto interno $\vec{r} \cdot \vec{n}$, obtemos

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (3, 3, 3) \cdot (0, 0, 1) = 3 \neq 0.$$

Logo, a reta r é transversal ao plano π e, portanto, $d(r, \pi) = 0$.

b) Escrevendo a reta r na forma paramétrica, temos:

$$r : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y - z - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ 2(y - z) + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ 3y - 3z = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = y - z \\ y - z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases},$$

com $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, o vetor $\vec{r} = (0, 1, 1)$ é um vetor diretor da reta r e $\vec{n} = (0, 1, -1)$ é o vetor normal ao plano π. Calculando o produto interno entre esses vetores, temos

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = (0, 1, 1) \cdot (0, 1, -1) = 0 + 1 - 1 = 0.$$

Logo, a reta r é paralela ao plano π. Vamos verificar se r está contida ou não em π. Para isso, tome $A = (1, 1, 0) \in r$ e o substitua na equação do plano $y - z = 4$:

$$1 - 0 = 1 \neq 4.$$

Logo, r não está contida em π. Nesse caso, $d(r, \pi) = d(P, \pi)$, onde P é um ponto qualquer de r, pois todos os pontos de r estão a uma igual distância de π. Usaremos a equação

$$d(P, \pi) = \frac{|a \cdot x_0 + b \cdot y_0 + c \cdot z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

onde $P = (x_0, y_0, z_0)$ e a, b, c, d são os coeficientes do plano π. Considere o ponto $A = (1, 1, 0) \in r$ e os coeficientes do plano π sendo $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$ e $d = -4$. Substituindo na equação dada acima, temos

$$d(r, \pi) = d(A, r) = \frac{|0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-4)|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|1 - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}.$$

Logo,

$$d(r, \pi) = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Capítulo 3

Cônicas

3.1 Elipse e circunferência.

Exercício 3.1. *Determine o raio, o centro, a equação reduzida e esboce o gráfico das seguintes circunferências:*

a) $x^2 + y^2 + 8y + 6 = 0$;

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 51 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 6x + 10y - 15 = 0$.

Solução: a) Podemos reescrever a equação $x^2 + y^2 + 8y + 6 = 0$ como $x^2 + (y^2 + 8y) = -6$. Utilizando o método de completamento de quadrados, temos

$$(x - 0)^2 + (y^2 + 8y + 16) = -6 + 16 \quad \Rightarrow \quad (x - 0)^2 + (y + 4)^2 = 10.$$

Logo, a equação reduzida é dada por $x^2 + (y + 4)^2 = 10$, sendo o raio desta circunferência igual a $\sqrt{10}$ e o centro dado pelo ponto $C = (0, -4)$.

b) Podemos reescrever a equação deste item como $(x^2 - 4x) + (y^2 - 6y) = 51$. Usando o mesmo método do item anterior, temos

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 51 + 4 + 9 \quad \Rightarrow \quad (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 64.$$

Encontramos assim a equação reduzida $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 64$ cujo raio é dado por $\sqrt{64} = 8$ e o centro é dado pelo ponto $C = (2, 3)$.

c) De modo análogo, reescreva a equação como $(x^2 + 6x) + (y^2 + 10y) = 15$. Então.

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 + 10y + 25) = 15 + 9 + 25 \;\Rightarrow\; (x + 3)^2 + (y + 5)^2 = 49.$$

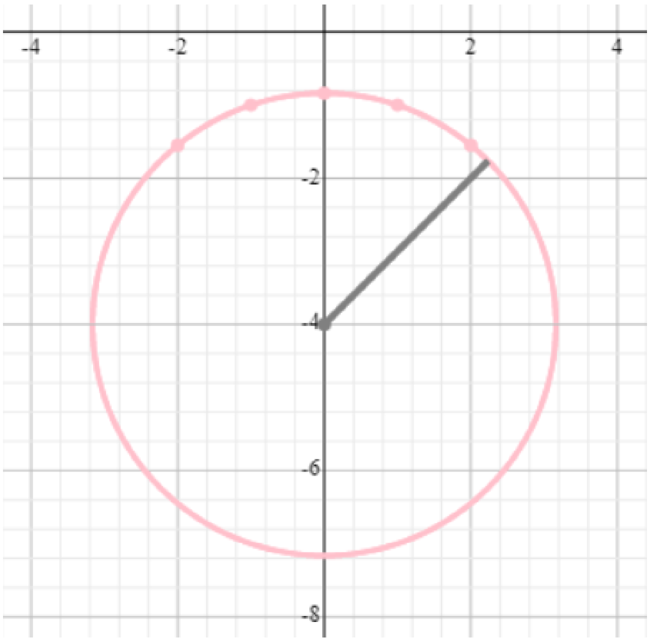

Figura 3.1: Circunferência de raio $\sqrt{10}$ e centro $C = (0, -4)$.

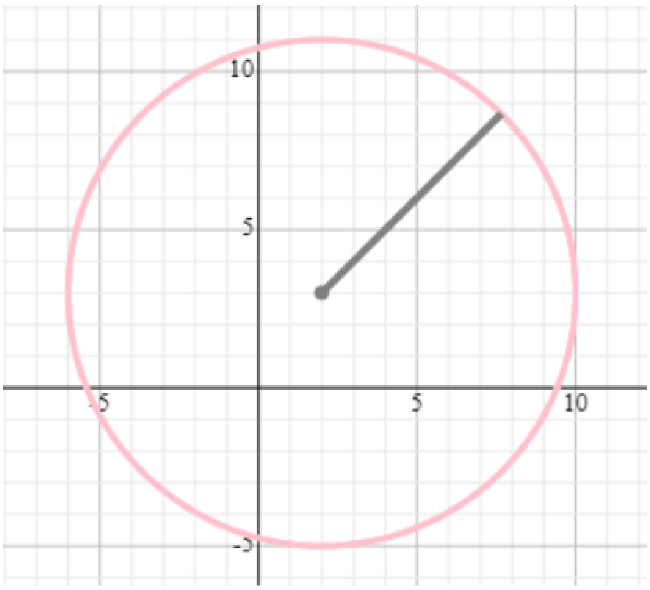

Figura 3.2: Circunferência de raio 8 e centro $C = (2, 3)$.

Pela equação reduzida encontrada, temos o raio da circunferência igual a $\sqrt{49} = 7$ e seu centro dado pelo ponto $C = (-3, -5)$.

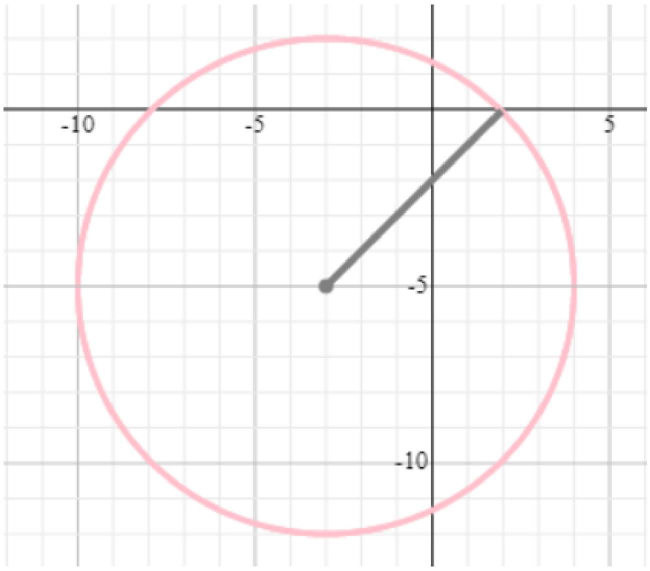

Figura 3.3: Circunferência de raio 7 e centro $C = (-3, -5)$.

Exercício 3.2. *Em cada caso, determine os vértices, os focos, a distância focal, as medidas dos eixos maior e menor e esboce o gráfico das seguintes elipses:*

a) $E : 16x^2 + 25y^2 = 400$;

b) $E : x^2 + 9y^2 = 9$;

c) $E : 50 - y^2 - 2x^2 = 0$.

Solução: a) Dividindo a igualdade $16x^2 + 25y^2 = 400$ por 400, obtemos a equação equivalente

$$\frac{16x^2}{400} + \frac{25y^2}{400} = 1,$$

que pode ser escrita sob a forma reduzida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1,$$

com $p = 25$ e $q = 16$. Como $p > q$, trata-se de uma elipse com focos no eixo Ox. Além disso, a equação reduzida mostra que a elipse tem centro $(0, 0)$. Como $a^2 = 25$ e $b^2 = 16$, temos $a = 5$ e $b = 4$. Logo, o eixo maior mede $2a = 10$ e o eixo menor mede $2b = 8$. Assim, os vértices são dados pelos pontos $A_1 = (-5, 0)$, $A_2 = (5, 0)$, $B_1 = (0, -4)$ e $B_2 = (0, 4)$.

A distância focal é dada por $2c$, onde c satisfaz a equação $c^2 = a^2 - b^2 = 9$. Assim, o valor de c é 3 e a distância focal é $2c = 6$. Dessa forma, os pontos focais são $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$.

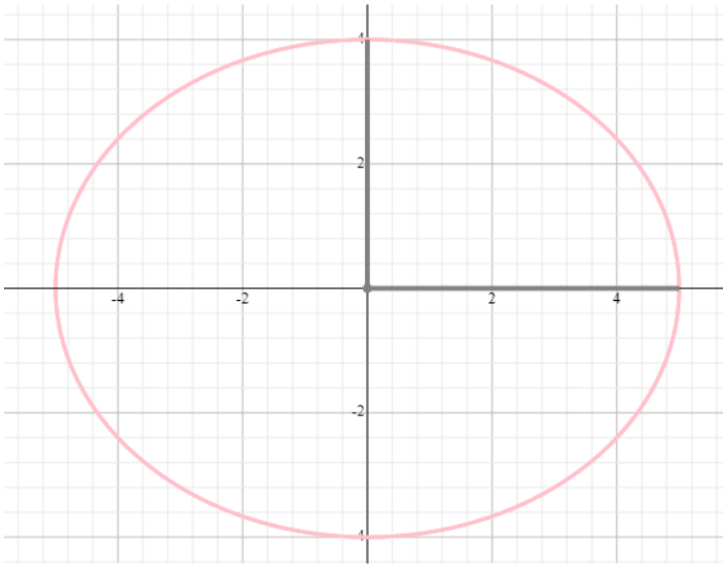

Figura 3.4: Elipse de centro na origem e focos $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$.

b) Dividindo a equação $x^2 + 9y^2 = 9$ por 9, obtemos a equação equivalente $\frac{x^2}{9} + \frac{9y^2}{9} = 1$, que pode ser escrita sob a forma reduzida

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1,$$

com $p = 9$ e $q = 1$. Como $p > q$, trata-se de uma elipse com focos em Ox, sendo seu centro na origem $(0, 0)$.

Além disso, $a^2 = 9$ e $b^2 = 1$, donde temos $a = 3$ e $b = 1$. Logo, o eixo maior mede $2a = 6$ e o eixo menor mede $2b = 2$. Como $c^2 = a^2 - b^2 = 8$, o valor de c é $\sqrt{8}$ e a distância focal é $2c = 2\sqrt{8}$. Os vértices são os pontos $A_1 = (-3, 0)$, $A_2 = (3, 0)$, $B_1 = (0, -1)$ e $B_2 = (0, 1)$, e os focos, $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$.

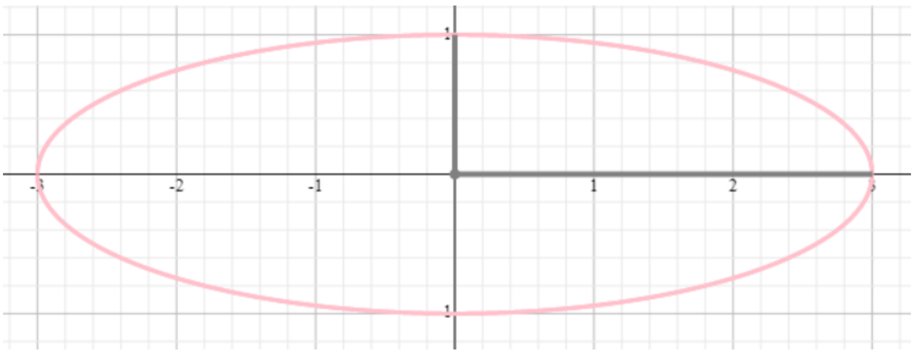

Figura 3.5: Elipse de centro na origem e focos $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$.

c) Dividindo a equação $2x^2 + y^2 = 50$ por 50, obtemos a equação equivalente

$$\frac{2x^2}{50} + \frac{y^2}{50} = 1,$$

que pode ser escrita sob a forma reduzida

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{50} = 1,$$

com $p = 25$ e $q = 50$. Como $p < q$, trata-se de uma elipse com focos no eixo Oy. Veja também que seu centro está na origem.

Além disso, como $a^2 = 50$ e $b^2 = 25$, temos $a = 5\sqrt{2}$ e $b = 5$. Logo, o eixo maior mede $2a = 10\sqrt{2}$ e o eixo menor mede $2b = 10$. Assim, os vértices são os pontos $A_1 = (0, -5\sqrt{2})$, $A_2 = (0, 5\sqrt{2})$, $B_1 = (-5, 0)$ e $B_2 = (5, 0)$. Como $c^2 = a^2 - b^2 = 25$, temos $c = 5$. Então a distância focal é $2c = 10$. Logo, os focos são $F_1 = (0, -5)$ e $F_2 = (0, 5)$.

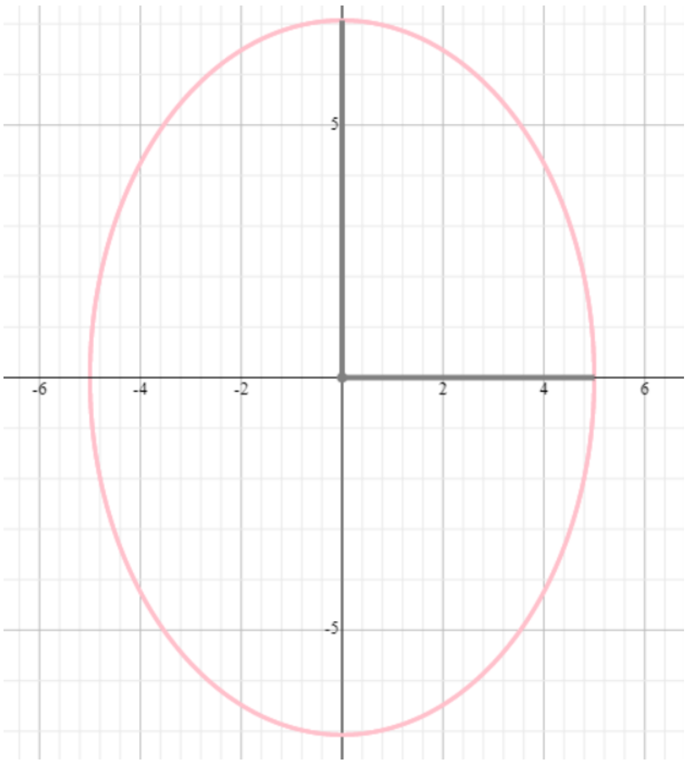

Figura 3.6: Elipse de centro na origem e focos $F_1 = (0, -5)$ e $F_2 = (0, 5)$.

Exercício 3.3. *Em cada caso, obtenha a equação reduzida da elipse E.*

a) E tem centro na origem e os focos no eixo Ox; o eixo maior mede 10 e a distância focal é 6;

b) Os focos de E são $F_1 = (-4, 0)$ *e* $F_2 = (4, 0)$*, e o eixo maior tem medida 10;*

c) Os focos de E são $F_1 = (0, -2)$ *e* $F_2 = (0, 2)$*, e o eixo menor tem medida* 4.

Solução: a) Como temos o centro na origem e os focos em Ox, a equação reduzida tem a forma

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.1}$$

onde $2a$ é a medida do eixo maior e $2b$ é a medida do eixo menor. Foi dado que $2a = 10$ e $2c = 6$. Logo, $a = 5$ e $c = 3$. Portanto $b^2 = a^2 - c^2 = 16$. Logo, $b = 4$ e concluímos que a equação reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

b) Por hipótese $2a = 10$ e

$$2c = d(F_1, F_2) = \sqrt{(-4-4)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{64} = 8,$$

logo $a = 5$, $c = 4$ e $b^2 = a^2 - c^2 = 9$. Como o centro é $(0, 0)$, pois é o ponto médio do segmento F_1F_2, e os focos pertencem ao eixo Ox, usamos a forma da equação reduzida dada em (3.1). Substituindo $a = 5$ e $b = 3$, obtemos a equação

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

c) Por hipótese $2b = 4$ e, portanto, $b = 2$. Como

$$2c = d(F_1, F_2) = \sqrt{(0-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{16} = 4,$$

concluímos que $c = 2$. Então, $a^2 = b^2 + c^2 = 4 + 4 = 8$. Como a elipse tem o seu centro na origem e os focos no eixo Oy, usamos a forma reduzida

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Portanto, os pontos da elipse satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1.$$

3.2 Hipérbole.

Exercício 3.4. *Determine, em cada caso, os vértices, os focos, as extremidades do eixo conjugado e as equações das assíntotas das seguintes hipérboles:*

a) $25x^2 - 144y^2 = 3600$;

b) $y^2 - x^2 = 16$.

Solução: a) Dividindo a equação dada por 3600, temos

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1,$$

que está na forma reduzida. Logo, temos uma hipérbole de centro na origem e os focos em Ox, pois o sinal de menos acompanha a variável y. Além disso, $a^2 = 144$ e $b^2 = 25$ e, portanto, $a = 12$ e $b = 5$. Logo, o eixo transverso mede $2a = 24$ e o eixo conjugado mede $2b = 10$. Além disso, os vértices são $A_1 = (-12, 0)$ e $A_2 = (12, 0)$, e as extremidades do eixo conjugado são dadas pelos pontos $B_1 = (0, -5)$ e $B_2 = (0, 5)$.

Como $c^2 = a^2 + b^2 = 144 + 25 = 169$, temos $c = 13$. Então, os focos são dados pelos pontos $F_1 = (13, 0)$ e $F_2 = (-13, 0)$.

b) Dividindo a equação da hipérbole por 16, teremos a equação equivalente

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{16} = 1,$$

que está na forma reduzida. Logo, temos o centro sendo a origem e os focos em Oy, pois o sinal de menos acompanha a variável x. Além disso, $a^2 = b^2 = 16$, portanto $a = b = 4$. Assim, os vértices são $A_1 = (0, -4)$ e $A_2 = (0, 4)$, e as extremidades do eixo conjugado são dadas pelos pontos $B_1 = (-4, 0)$ e $B_2 = (4, 0)$. O eixo transverso mede $2a = 8$ e o eixo conjugado mede $2b = 8$.

Como $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 16 = 32$, obtemos $c = 4\sqrt{2}$. Então, os focos são determinados pelos pontos $F_1 = (0, -4\sqrt{2})$ e $F_2 = (0, 4\sqrt{2})$.

Exercício 3.5. *Determine uma hipérbole de excentricidade 2 e focos coincidentes com os focos da elipse* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

Solução: Considerando a elipse dada, observamos que seu centro está na origem e seus focos estão sobre o eixo Ox, pois sendo $p = 25$ e $q = 9$ temos $p > q$. Assim, $a = \sqrt{25} = 5$ e $b = \sqrt{9} = 3$, onde a e b denotam os parâmetros geométricos da elipse. Neste caso, temos $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$. Logo, $c = 4$ e os focos da elipse, que são iguais ao da hipérbole, são os pontos $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$.

A partir de agora, a e b denotam os parâmetros geométricos da hipérbole. Dado que a excentricidade da hipérbole é igual a 2, temos

$$\frac{c}{a} = 2 \Rightarrow a = 2.$$

Logo $b^2 = c^2 - a^2 = 16 - 4 = 12$. Com isso, temos a equação da hipérbole sendo da forma

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1,$$

pois seu foco encontra-se no eixo Ox.

3.3 Parábola.

Exercício 3.6. *Esboce cada uma das parábolas abaixo e encontre seu foco. Determine também uma equação da reta diretriz e uma equação do eixo de simetria.*

a) $x^2 = -4y$;

b) $2y^2 - 9x = 0$.

Solução: a) A equação dada já está em uma das formas reduzidas. A variável elevada ao quadrado é x, logo a parábola tem como eixo de simetria o eixo Oy. Sendo o termo não quadrático negativo, então a concavidade da parábola é para baixo.

Como $4p = 4$, temos assim $p = 1$ e o foco no ponto $F = (0, -1)$. Logo, a equação para a reta diretriz é $y - 1 = 0$.

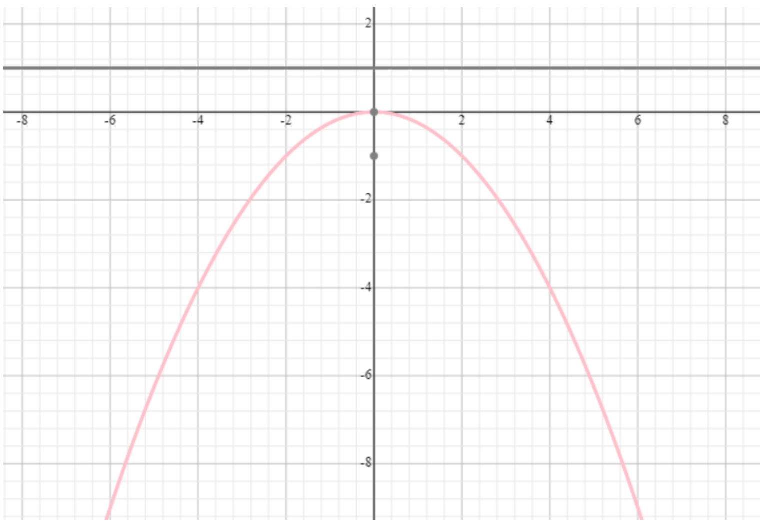

Figura 3.7: Parábola com foco no ponto $F = (0, -1)$ e reta diretriz $y = 1$.

b) A equação $2y^2 - 9x = 0$ é equivalente a

$$y^2 = \frac{9}{2}x.$$

A variável ao quadrado é y, assim a parábola tem como eixo de simetria o eixo Ox. Sendo o termo não quadrático positivo, temos a concavidade voltada para direita.

Como $4p = 9/2$, temos $p = 9/8$, e o foco dado por $F = (\frac{9}{8}, 0)$ a equação para a reta diretriz é $x + \frac{9}{8} = 0$.

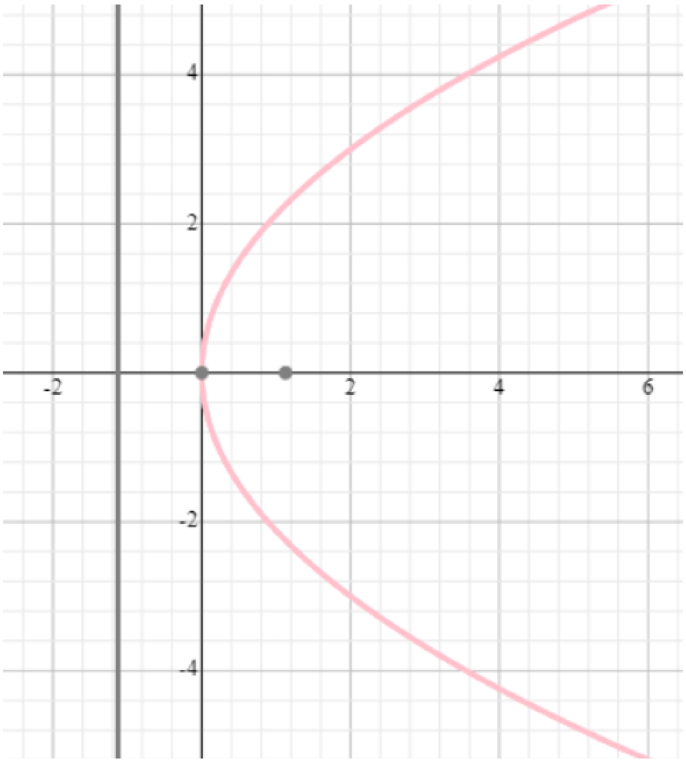

Figura 3.8: Parábola com foco no ponto $F = (\frac{9}{8}, 0)$ e reta diretriz $x = -\frac{9}{8}$.

Exercício 3.7. *Em cada item, obtenha uma equação da parábola que satisfaça as condições dadas:*

a) Vértice $V = (0, 0)$*; reta diretriz* $r : y = -2$*;*

b) Foco $F = (2, 0)$*; reta diretriz* $r : x + 2 = 0$*.*

Solução: a) Como o eixo Ox é paralelo à reta diretriz dada e o vértice está na origem, temos que a parábola é da forma

$$x^2 = \pm(4p)y.$$

Sendo a reta diretriz de equação $y + 2 = 0$, então $p = 2$ e a concavidade está voltada para cima. Logo, a parábola tem equação reduzida da forma

$$x^2 = 8y.$$

b) Observamos que o eixo Oy é paralelo à reta diretriz dada e o foco está sobre o eixo Ox. Logo, a parábola é da forma

$$x^2 = \pm(4p)y.$$

Sendo o foco $F = (2, 0)$, temos que $p = 2$ e a concavidade está voltada para a direita. Logo, a equação reduzida da parábola é

$$y^2 = 8x.$$

Capítulo 4

Quádricas

Exercício 4.1. *Reduzir cada uma das equações à forma canônica e identificar a superfície dada:*

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$*;*

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$*;*

c) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 - 144 = 0$*;*

d) $4x^2 - y^2 + 4z^2 - 4 = 0$*;*

e) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 - 4 = 0$.

Solução: a) Esta equação tem a forma canônica

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{25} = 1.$$

Como todos os termos quadráticos desta equação são positivos e sendo $a = b = c = \sqrt{25} = 5$, esta superfície é uma esfera de centro $(0, 0, 0)$ e raio igual á 5.

b) A equação dada é equivalente a

$$\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

Temos então a equação de uma elipsóide, pois todos os termos quadráticos são positivos e distintos, com centro na origem.

c) A equação dada é equivalente a

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1.$$

Como apenas um termo quadrático é negativo, esta é uma equação de um hiperbolóide de uma folha. Neste caso, o eixo distinguido é o eixo Oz.

As interseções deste hiperbolóide com os planos $z = k$ são elipses no plano Oxy. Uma interseção especial é com o plano $z = 0$, o que resulta na elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

d) Reescrevendo a equação dada na forma canônica, temos

$$x^2 - y^2 + z^2 = 1.$$

Esta equação representa um hiperbolóide de uma folha com eixo distinguido Oy.

As interseções deste hiperbolóide com os planos $y = k$ são circunferências no plano Oxz. Em especial, a interseção com o plano $y = 0$ é a circunfêrencia $x^2 + z^2 = 1$.

e) Reescrevendo a equação dada na forma canônica, temos

$$\frac{z^2}{4} - x^2 - y^2 = 1.$$

Como dois dos três termos quadráticos são negativos, esta equação representa um hiperbolóide de duas folhas com eixo distinguido Oz.