



Cálculo Diferencial e Integral: um kit de sobrevivência "SageMath"

Ivo Eduardo Zanin.
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

Construção de Matrizes Aleatórias

Veremos como construir matrizes aleatórias no software SageMath.

Definição de Matriz Aleatória: Uma matriz aleatória é uma variável aleatória com valor de matriz. Isto é, uma matriz na qual alguns ou todos os elementos são dados aleatoriamente.

Comando no Sage: $A = \text{random_matrix}(\mathbb{R}, n, m, \text{algorithm}, \text{implementation}, \text{args}, \text{kws})$, onde \mathbb{R} é o anel básico para as entradas da matriz, n e m são, respectivamente, os números de linhas e colunas da matriz, algorithm denota quais propriedades a matriz terá, implementation representa possíveis implementações para a matriz, e, finalmente, args e kws são argumentos e palavras chaves para descrever propriedades adicionais.

Exemplos de Algoritmos:

* *randomize*

Uma matriz de elementos aleatórios, controlando a densidade de entradas diferentes de zero.

* *echelon_form*

Uma matriz de forma escalonada.

* *echelonizable*

Uma matriz que tem uma forma escalonada previsível.

* *subspaces*

Uma matriz cujos quatro subespaços, têm entradas de tamanho razoável e valor inteiro.

* *unimodular*

Uma matriz com determinante igual a 1.

* *diagonalizable*

Uma matriz diagonalizável cujos autovetores, terão apenas entradas inteiras.

Aviso: As matrizes geradas não são distribuídas uniformemente. Para matrizes unimodulares sobre campo finito, esta função nem mesmo gera todas elas. É feita para fins de ensino.

Por exemplo: `Matrix_random(GF(3), 2, algorithm='unimodular')` nunca gera $[[2,0],[0,2]]$.

Nota: Ao construir matrizes com entradas aleatórias e sem propriedades adicionais (ou seja, quando a opção `algorithm = 'randomize'`), a maior parte da aleatoriedade é controlada através do método `random_element`. Portanto, a documentação desse método pode ser relevante.

Exemplos:

- Matriz racional aleatória simples. Sem argumentos, todas as entradas estão entre -2 e 2.

```
1 A = random_matrix(QQ, 5)
2 show(A)
3
```

Evaluate Language: Sage Share

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz aleatória em forma escalonada. O comando `algorithm='echelon_form'`, junto de um número solicitado de linhas diferentes de zero (`num_pivots`), retornará uma matriz aleatória em formato escalonado. As entradas geralmente estão entre -4 e 4.

```
1 B = random_matrix(QQ, 5, algorithm='echelon_form', num_pivots=3)
2 show(B)
```

Evaluate Language: Sage Share

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Matriz aleatória com forma escalonada previsível. O comando `algorithm='echelonizable'`, junto de uma classificação solicitada (`rank`) e controle de tamanho opcional (`upper_bound`) retornará uma matriz aleatória escalonável. As entradas geralmente estão entre -60 e 60.

```
1 C = random_matrix(QQ, 5, algorithm='echelonizable', rank=3, upper_bound=60)
2 show(C)
```

Evaluate

Language: Sage

Share

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 5 & 11 & -15 & -38 \\ -1 & -5 & -10 & 14 & 35 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & 7 & 12 & -17 & -43 \end{pmatrix}$$

- Matriz diagonalizável aleatória. A palavra-chave `algorithm='diagonalizable'`, junto de um tamanho de matriz solicitado (`size`), das listas opcionais de valores próprios (`eigenvalues`) e das dimensões de espaço próprio correspondentes (`dimensions`), retornarão uma matriz diagonalizável aleatória. Quando os autovalores e as dimensões não são especificados, o resultado terá valores aleatórios para ambos que se encaixam no tamanho designado.

```
1 D = random_matrix(QQ, 5, algorithm='diagonalizable',
2 eigenvalues=[2,3,-1], dimensions=[1,2,2]);
3 show(D)
```

Evaluate

Language: Sage

Share

$$\begin{pmatrix} 33 & 12 & 16 & 78 & 152 \\ -18 & -5 & 0 & -46 & -72 \\ 2 & 0 & 7 & 6 & 16 \\ -9 & -4 & 0 & -20 & -36 \\ -1 & 0 & -4 & -3 & -9 \end{pmatrix}$$

- Matriz aleatória com subespaços previsíveis. O comando `algorithm='subspaces'`, junto de uma classificação opcional (`rank`) retornará uma matriz cujos vetores de base natural para seus quatro subespaços fundamentais, se calculados conforme descrito na documentação do `random_subspaces_matrix()` contêm apenas entradas inteiras.

```

1 E = random_matrix(QQ, 5, 6, algorithm='subspaces', rank=3)
2 show(E)

```

Evaluate Language: Sage Share

$$\begin{pmatrix} -25 & 4 & 22 & -83 & -87 & 83 \\ -86 & 15 & 80 & -296 & -311 & 296 \\ -30 & 5 & 27 & -101 & -106 & 101 \\ -22 & 4 & 21 & -77 & -81 & 77 \\ 17 & -3 & -16 & 59 & 62 & -59 \end{pmatrix}$$

- Matriz unimodular aleatória. A palavra-chave `algorithm='unimodular'`, juntamente com um controle de tamanho de entrada opcional (`upper_bound`) retornará uma matriz de determinante 1. Quando o anel base for \mathbb{ZZ} ou \mathbb{QQ} , o resultado terá entradas inteiras, cujas magnitudes podem ser limitadas pelo valor de `upper_bound`.

```

1 F = random_matrix(QQ, 5, algorithm='unimodular', upper_bound=70)
2 show(F)
3 show("Det(F)=", det(F))

```

Evaluate Language: Sage Share

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 5 & -28 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & -5 \\ 1 & 4 & -1 & 11 & -65 \\ 4 & 4 & 3 & 6 & -26 \end{pmatrix}$$

Det(F)=1

Referências

- [1] Sage, Sage v9.4 Reference Manual. Acesso em: 28 de abril de 2022.
Disponível em: [<doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices>](http://doc.sagemath.org/html/en/reference/matrices)