



Breve introdução à modelagem matemática com ênfase na etapa da validação

Pedro Roberto de Lima – Email: pedrorobertodelima@ufrrj.br

Resumo: Fazendo uso das equações diferenciais, este texto apresenta uma breve introdução à modelagem matemática com ênfase na etapa da validação – a qual, ao confrontar previsões teóricas com resultados experimentais, mostra o modelo “em funcionamento” se revelando, desta forma, uma etapa bastante interessante para finalidades didáticas.

Palavras-chave: Modelagem matemática, Validação, Equações diferenciais, Ensino de matemática.

1. Introdução

1.1. Considerações iniciais

Em muitas situações, é necessário responder questões sobre determinados fenômenos do mundo real. Por exemplo: Qual é a distância máxima que um projétil disparado pode atingir? A maneira mais direta de tentar obter uma resposta para essa pergunta é realizando experimentos concretos e observando os seus efeitos. Assim, pode-se realizar disparos em diferentes ângulos e observar a distância atingida (veja a Figura 1).

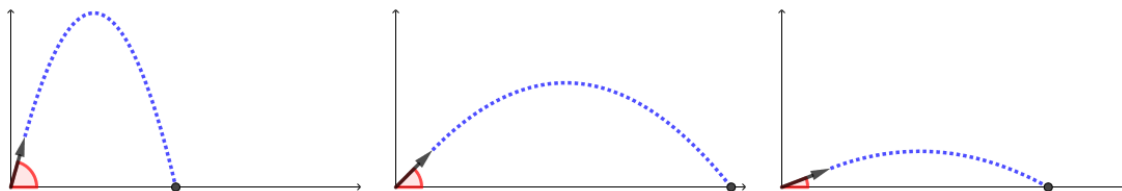


Figura 1: Disparos realizados a partir de ângulos distintos. Fonte: Elaborada pelo autor.

Porém, o interesse pode estar em conclusões gerais que vão além das condições particulares do experimento. Por exemplo, pode haver interesse em determinar a distância máxima seja qual for a velocidade inicial – mas um experimento produzirá conclusões válidas apenas para a velocidade específica utilizada no experimento realizado. Além disso, em certos casos pode não ser possível realizar experimentos. Por exemplo, pode haver interesse em determinar como evolui o número de infecções causadas por um novo vírus que ataca humanos – mas

uma situação assim não pode ser experimentada. Assim, experimentos concretos não são a maneira mais viável de produzir conclusões sobre certos fenômenos do mundo real. O objetivo desta exposição é introduzir uma maneira alternativa, bastante eficiente e muito utilizada: a modelagem matemática.

1.2. O que é modelagem matemática?

Seguindo [Banasiak \(s.d.\)](#), [Banerjee \(2014\)](#), [Bender \(1978\)](#), [Eck, Garcke e Knabner \(2017\)](#), [Fulford, Forrester e Jones \(1997\)](#) e [Giordano, Fox e Horton \(2014\)](#), é possível conceituar a modelagem matemática como segue.

Definição 1.1 *Um **modelo matemático** é uma descrição matemática simplificada de um fenômeno específico do mundo real. A **modelagem matemática** é um processo que compreende a criação e o estudo de um modelo matemático com a finalidade de tirar conclusões sobre algum problema do mundo real.*

A ideia central da modelagem matemática é destacada por [Bassanezi \(2002\)](#) e [Meerschaert \(2013\)](#), conforme segue.

A modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real ([BASSANEZI, 2002](#)).

Mathematical modeling is the link between mathematics and the rest of the world. You ask a question. You think a bit, and then you refine the question, phrasing it in precise mathematical terms. Once the question becomes a mathematics question, you use mathematics to find an answer. Then finally (and this is the part that too many people forget), you have to reverse the process, translating the mathematical solution back into a comprehensible, no-nonsense answer to the original question. Some people are fluent in English, and some people are fluent in calculus. We have plenty of each. We need more people who are fluent in both languages and are willing and able to translate. These are the people who will be influential in solving the problems of the future ([MEERSCHAERT, 2013](#)).

É importante observar que modelagem matemática não é sinônimo de problema contextualizado ([BLISS; FOWLER; GALLUZZO, 2014](#)). Considere, por exemplo, os seguintes problemas:

1. A população de uma cidade é composta por 20.000 pessoas e 35% delas reciclam suas garrafas de plástico. Se cada pessoa usa 2 garrafas por semana, quantas garrafas são recicladas por semana nessa cidade?

2. Quanto plástico é reciclado na sua cidade?

A Tabela 1 traça uma comparação entre os problemas acima, destacando algumas características fundamentais dos problemas de modelagem matemática – geralmente ausentes em problemas contextualizados comuns.

	Problema 1	Problema 2
Enunciado	Fornece todas as informações necessárias.	Aparenta não fornecer informações suficientes.
Resolução	Basta executar os cálculos apropriados para obter “a” resposta correta.	É necessário matemática e criatividade para obter “uma” resposta.
Abordagem	Não convida a examinar se o cenário é realístico. Assume que a informação dada será aceita e os cálculos necessários serão efetuados.	É necessário estudar a situação por conta própria, fazer as próprias hipóteses e traçar a própria estratégia de resolução.
Natureza	Não é um problema de modelagem.	É um problema de modelagem.

Tabela 1: Comparação entre os problemas 1 e 2. Fonte: Elaborada pelo autor com base na discussão de [Bliss, Fowler e Galluzzo \(2014\)](#).

2. Etapas da modelagem matemática

2.1. Descrição

A modelagem matemática é um processo composto de várias etapas, as quais podem diferir de um autor para outro. Entretanto, extraindo as principais etapas de [Bassanezi \(2002\)](#), [Fulford, Forrester e Jones \(1997\)](#), [Giordano, Fox e Horton \(2014\)](#) e [Velten \(2009\)](#), é possível sintetizá-las da seguinte forma:

1. **Análise da literatura:** Fazer uma análise minuciosa da literatura existente para verificar se existem registros de investigações similares das quais se possa tirar proveito.
2. **Elaboração de hipóteses:** Identificar as variáveis mais relevantes para o problema e então fazer hipóteses sobre a maneira como elas se relacionam. Essa etapa:
 - Envolve simplificar o problema original de modo a enfatizar os atributos prováveis de serem os mais importantes.
 - Geralmente é a mais difícil requerendo criatividade e, muitas vezes, a intuição e a experiência de especialistas.

3. **Formulação matemática:** Introduzir símbolos para representar as variáveis e então escrever as hipóteses em forma de expressões matemáticas. (Em muitas situações, essa etapa acaba produzindo equações diferenciais ou equações de diferenças.)
4. **Resolução:** Resolver/estudar as equações e interpretar as respostas obtidas como afirmações sobre o problema original. Essa etapa:
 - Muitas vezes, só pode ser viabilizada por meio de métodos computacionais (os quais geralmente podem fornecer apenas uma solução aproximada).
 - Pode falhar se as equações forem muito complicadas para serem resolvidas. Nesse caso, deve-se retornar à Etapa 2 e tentar simplificar as hipóteses a fim de obter equações mais fáceis de resolver.
 - Pode gerar o desenvolvimento de novas técnicas matemáticas, caso as técnicas conhecidas não sejam suficientes para fornecer soluções.
5. **Validação:** Verificar se os resultados obtidos são razoáveis e, se possível, se eles concordam com dados experimentais. Essa etapa pode mostrar que os resultados produzidos pelo modelo:
 - Se ajustam bem a resultados experimentais reais; nesse caso, o modelo está pronto para uso.
 - Não se ajustam satisfatoriamente a resultados experimentais reais; nesse caso, deve-se retornar à Etapa 2 e tentar tornar as hipóteses mais realísticas.
6. **Uso:** Usar os resultados fornecidos pelo modelo para influenciar o mundo real (fazer previsões, tomar decisões, explicar fenômenos, etc.).
7. **Modificação:** Ajustar o modelo para contemplar possíveis mudanças no problema original e/ou fatores que se tornaram importantes, mas que haviam sido previamente desprezados. Conforme [Bassanezi \(2002\)](#): “Nenhum modelo deve ser considerado definitivo, podendo sempre ser melhorado”.

As etapas da modelagem matemática, e as principais inter-relações entre elas, podem ser representadas esquematicamente como na Figura 2.

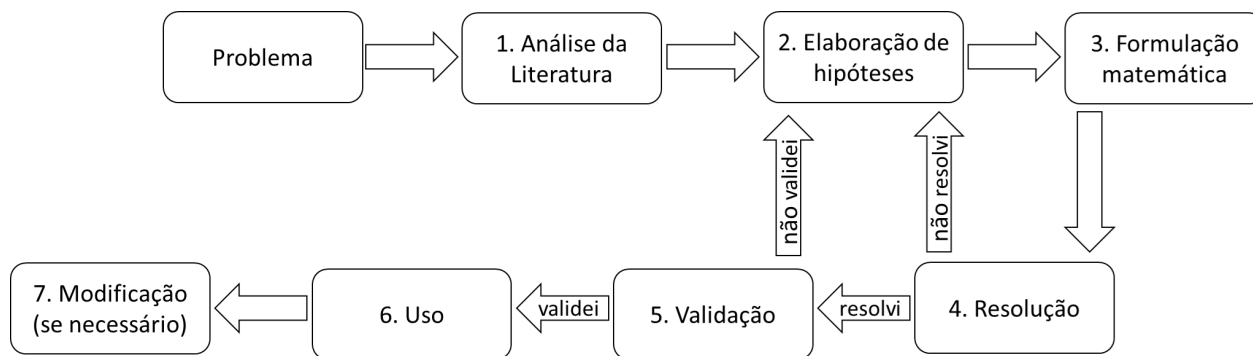


Figura 2: Ciclo da Modelagem Matemática. Fonte: Elaborada pelo autor.

Na prática, o modelo matemático é construído na etapa da formulação matemática. [Velten \(2009\)](#), [Segel e Edelstein-Keshet \(2013\)](#) e [Nachbin e Tabak \(1997\)](#) ajudam na compreensão de quando ele pode ser considerado “bom”, conforme segue.

The best model is the simplest model that still serves its purpose, that is, which is still complex enough to help us understand a system and to solve problems ([VELTEN, 2009](#)).

A model can be regarded as a caricature of a real system. An excellent caricature sums up the physiognomy of an important individual in a few key lines: the essence is captured and detail neglected. Concentration on the essential is a central feature of a good model ([SEGEL; EDELSTEIN-KESHET, 2013](#)).

O “pulo do gato”, que exige experiência, é saber como simplificar um modelo o suficiente para que possamos resolvê-lo com um esforço razoavelmente pequeno, mas ao mesmo tempo deixá-lo “rico” o bastante para que fenômenos de interesse possam ser simulados através do modelo final. Note que um modelo “pobre” é aquele que não serve para simular nada além do trivial. É nesse ponto que se torna importante a colaboração com especialistas de outras áreas (por exemplo, dependendo do problema, um físico ou químico ou biólogo etc ...) para interagir na questão da modelagem e saber o que devemos “buscar” e qual a nossa meta final ([NACHBIN; TABAK, 1997](#)).

2.2. Exemplo

O objetivo desta seção é exemplificar as etapas da modelagem matemática por meio da modelagem do “arremesso de peso” – uma modalidade do atletismo em que os atletas competem para arremessar uma bola de metal o mais longe possível. Nesse sentido, o seguinte problema será considerado: *Como aprimorar os lançamentos no arremesso de peso?*

1. **Análise da literatura.** Uma análise da literatura existente sobre o tema demonstra que o problema ilustrativo acima proposto é conhecido e bem estudado: conforme [Linthorne \(2001\)](#), o ângulo ótimo de lançamento no arremesso de peso oscila em torno de 31° . Assim sendo, a análise da literatura já é capaz de fornecer informações relevantes para a resolução do problema. Por exemplo, pode-se utilizar a informação mencionada sobre o ângulo ótimo para direcionar o treino dos atletas.

Observação 2.1 *Como o objetivo desta seção é ilustrar as etapas da modelagem matemática, em vez de fazer um aprofundamento na análise da literatura existente (como seria feito numa situação prática real), será suposto que o problema é inédito e as demais etapas serão visitadas.*

2. **Elaboração de hipóteses.** O estudo do problema revela que as principais variáveis aparentam ser as seguintes:

- Velocidade inicial da bola.
- Altura inicial da bola.
- Ângulo de lançamento da bola.
- Massa da bola.
- Posição da bola.
- Forças que agem sobre a bola.

Nesse contexto, parece ser razoável fazer as seguintes hipóteses:

- As variáveis se relacionam obedecendo as leis da mecânica newtoniana (pois esta é a teoria mais apropriada para explicar e prever o movimento de corpos macroscópicos com baixas velocidades).
- O movimento é bidimensional: a bola se desloca para frente, para cima e para baixo, mas não para as laterais.
- A única força que age na bola é a gravidade (forças devidas a outros fatores como resistência do ar, possíveis ventos e obstáculos estão sendo desprezadas).

Observação 2.2 *Numa situação prática real, pode ser que nem todas as variáveis e hipóteses relevantes sejam identificadas de imediato. Alternativamente, pode ser que alguma hipótese assumida se revele muito restritiva ou de difícil manipulação do ponto de vista matemático. Nessas situações, o conjunto de variáveis e hipóteses deve ser ajustado posteriormente conforme a necessidade seja percebida durante a execução das demais etapas.*

3. **Formulação matemática.** É conveniente começar estabelecendo notações para as variáveis identificadas:

- v_0 = velocidade inicial.
- h = altura inicial.
- θ = ângulo de lançamento.
- m = massa da bola.
- $P(t)$ = posição no instante t ; $P(t) = (x(t), y(t))$.
- F_R = força resultante; $F_R = (F_x, F_y)$.

Agora, deve-se equacionar as variáveis conforme as hipóteses. Pela 2ª Lei de Newton:

$$F_R = mP'' \quad \Leftrightarrow \quad m(x'', y'') = (F_x, F_y) = (0, -mg) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'' = 0, \\ y'' = -g. \end{cases}$$

Além disso,

$$P(0) = (x(0), y(0)) = (0, h), \quad P'(0) = (x'(0), y'(0)) = (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta).$$

Assim, o modelo matemático é dado pelo seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} x'' = 0, \\ y'' = -g, \\ x(0) = 0, y(0) = h, x'(0) = v_0 \cos(\theta), y'(0) = v_0 \sin(\theta). \end{cases} \quad (1)$$

4. **Resolução.** Integrando duas vezes, conclui-se que a solução geral das equações que compõem o PVI anterior são dadas por

$$x(t) = c_1 t + c_2 \quad \text{e} \quad y(t) = -g \frac{t^2}{2} + k_1 t + k_2.$$

Pelas condições iniciais, obtém-se

$$c_1 = v_0 \cos(\theta), \quad c_2 = 0, \quad k_1 = v_0 \sin(\theta), \quad k_2 = h.$$

Assim, a solução do PVI é dada por

$$\begin{cases} x(t) = t v_0 \cos(\theta), \\ y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + t v_0 \sin(\theta) + h. \end{cases}$$

Note que a bola atinge o chão no instante t_0 se $y(t_0) = 0$, ou seja,

$$t_0 = \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gh}}{g}.$$

Note, também, que a distância d alcançada pela bola é

$$d = x(t_0) = v_0 \cos(\theta) \frac{v_0 \sin(\theta) + \sqrt{v_0^2 \sin^2(\theta) + 2gh}}{g}. \quad (2)$$

Observação 2.3 *Conforme a expressão acima, a distância alcançada é uma função de três variáveis: $d = d(v_0, h, \theta)$. Mas note que h e v_0 dependem da estrutura física do atleta (estatura e força) de modo que não podem ser controladas com muita flexibilidade. Assim sendo, com vistas ao aprimoramento dos lançamentos, resta tentar controlar θ .*

5. **Validação.** A seguir, na Tabela 2, a fim de testar a eficácia do modelo produzido, ele será confrontado com dados experimentais reais extraídos de [Linthorne \(2001\)](#).

Atleta	h (m)	v_0 (m/s)	θ (grau)	Distância real alcançada (m)	Distância prevista pelo modelo (m)	Erro relativo
1	2,11	11,90	34,1	15,90	16,03	0,82%
2	2,06	11,80	31	15,60	15,35	1,60%
3	2,16	11,50	34,9	15,10	15,24	0,93%
4	2,13	11,20	46,4	14,60	14,64	0,27%
5	2,09	11,10	31,6	13,80	13,95	1,09%

Tabela 2: Comparação de resultados experimentais com resultados previstos pelo modelo. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Linthorne \(2001\)](#).

Note que, relativamente aos dados experimentais considerados, as previsões do modelo possuem um erro relativo médio de 0,95%. Sim, há erro! E, no contexto da modelagem matemática, isso não é inesperado. De fato, como disse [Box \(1979\)](#): “All models are wrong but some are useful”. Assim, não é perfeita exatidão que devemos procurar, mas sim utilidade. Dessa forma, a depender da necessidade, a acurácia obtida no exemplo acima pode ser considerada suficiente e o modelo pode ser utilizado.

6. **Uso.** A seguir, o modelo construído será utilizado para procurar o ângulo ótimo de lançamento, ou seja, o ângulo que produz a maior distância possível para cada atleta relacionado na Tabela 2. Em outras palavras, deseja-se achar $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ que maximiza a função d definida em (2) para os valores de h e v_0 dados na Tabela 2. Por exemplo,

para o Atleta 1, deseja-se maximizar

$$d(\theta) = (11,90) \cos(\theta) \frac{(11,90) \sin(\theta) + \sqrt{(11,90)^2 \sin^2(\theta) + 2(9,8)(2,11)}}{9,8}.$$

A Tabela 3 mostra o resultado dos cálculos.

Atleta	h (m)	v ₀ (m/s)	ângulo ótimo previsto (grau)	Distância prevista com ângulo ótimo (m)	Ganho (m)
1	2,11	11,90	41,34	16,43	0,53
2	2,06	11,80	41,36	16,14	0,54
3	2,16	11,50	41,03	15,51	0,41
4	2,13	11,20	40,9	14,78	0,18
5	2,09	11,10	40,9	14,51	0,71

Tabela 3: Ângulo ótimo de lançamento previsto pelo modelo para cada atleta e distância atingida com esse ângulo. Fonte: Elaborada pelo autor.

Em vista dos dados apresentados, o modelo prevê que os atletas poderiam aprimorar o arremesso treinando para obter um ângulo de lançamento próximo de 41° (com ganho médio de 0,47 m no alcance).

Observação 2.4 *O ângulo ótimo e o respectivo valor da distância apresentados na Tabela 3 foram computados por meio do software livre Geogebra com o comando Extremo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>).*

Observação 2.5 *O modelo previu que, fixadas a altura e a velocidade inicial, a distância máxima é atingida quando o ângulo está próximo de 41°. A princípio, essa conclusão poderia ser utilizada para nortear os treinos. Porém, estudos mais aprofundados indicam que a alteração do ângulo de lançamento pode causar uma diminuição da velocidade inicial (o atleta pode perder força). Logo, a distância máxima depende tanto do ângulo de lançamento quanto da quantidade de força que o atleta perde ao alterar o ângulo. Levando isso em conta, conforme Linthorne (2001), estima-se que o ângulo ótimo real oscile em torno de 31°.*

- Modificação.** Uma forma de deixar o modelo mais realístico seria considerando a resistência do ar. Nesse caso, sendo f_1 a força de arrasto na direção horizontal e f_2 a

força de arrasto na direção vertical, o PVI dado em (1) tomaria a forma

$$\begin{cases} x'' = -f_1, \\ y'' = -g - f_2, \\ x(0) = 0, y(0) = h, x'(0) = v_0 \cos(\theta), y'(0) = v_0 \sin(\theta). \end{cases}$$

Aqui, uma análise mais sofisticada seria necessária (tanto do ponto de vista físico quanto do ponto de vista matemático).

3. Modelos populacionais

O objetivo desta seção é apresentar dois modelos básicos para a população de uma localidade isolada em função do tempo. O termo “isolada” significa que não há migração.

3.1. Modelo malthusiano

Seja $P(t)$ a população de uma localidade isolada no instante t . Chamando de N o número de nascimentos e de M o número de mortes, obtém-se

$$\frac{dP}{dt} = N - M. \quad (3)$$

Num primeiro momento, parece razoável supor que se uma população que habita uma região R_1 é o dobro de uma população similar que habita uma região R_2 , então em R_1 haverá duas vezes mais nascimentos e duas vezes mais mortes do que em R_2 . A mesma afirmação parece razoável trocando “dobro” por “metade”, “triplo”, etc. Ou seja, parece razoável supor N e M são proporcionais a P :

$$N = nP \quad \text{e} \quad M = mP, \quad (4)$$

em que n e m são constantes positivas.

Substituindo a hipótese (4) na equação (3), segue que

$$\frac{dP}{dt} = aP,$$

em que $a = n - m$ é uma constante chamada de **taxa de crescimento da população**. Resolvendo essa equação diferencial, obtém-se

$$P(t) = P_0 e^{at}, \quad (5)$$

em que $P_0 = P(0)$ é a população inicial.

O modelo (5) é chamado de **modelo malthusiano** em referência ao economista britânico T. R. Malthus que o aplicou a populações humanas em 1798 (FIGUEIREDO; NEVES, 2010). Note que, numa análise inicial, esse modelo parece fazer sentido:

$$\begin{aligned} \text{Mais nascimentos} &\Rightarrow n > m \Rightarrow a > 0 \Rightarrow \text{População aumenta} \\ \text{Mais mortes} &\Rightarrow n < m \Rightarrow a < 0 \Rightarrow \text{População diminui} \end{aligned}$$

Mas, será que o modelo subsiste quando confrontado com dados experimentais? Em certas situações, sim – como mostrado abaixo.

- Tomando $a = 0,4$, o modelo descreve bem uma população de ratos silvestres (*Microtus arvalis*) com população inicial $P_0 = 2$. Nesse caso, o modelo é dado por $P(t) = 2e^{0,4t}$ com t medido em meses (veja a Tabela 4).



Mês:	0	2	6	10
População prevista pelo modelo:	2	4,5	22	109,2
População observada:	2	5	20	109

Tabela 4: Crescimento populacional da espécie *Microtus arvalis*. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de Braun (1993) e imagem de TD (2005).

- Conforme Braun (1993), no período de 1960–1970 estimou-se que a população humana estava crescendo com uma taxa anual média de 2%. Conforme WORLD... (2024), em 1960 a população humana foi estimada em 3,02 bilhões. Nessa situação, o modelo de crescimento populacional a partir de 1960 toma a forma $P(t) = 3,02e^{0,02t}$ com t medido em anos e descreve bem a evolução da população durante a década (veja a Tabela 5).

Ano:	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prevista:	3,02	3,08	3,14	3,21	3,27	3,34	3,41	3,47	3,54	3,62	3,69
Observada:	3,02	3,07	3,13	3,20	3,27	3,34	3,41	3,48	3,55	3,62	3,70

Tabela 5: População humana entre 1960 e 1970 (em bilhões). O ano t corresponde a t anos a partir de 1960. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de WORLD... (2024).

Embora o modelo se mostre preciso nesses dois exemplos, ele não é infalível. Por exemplo, no contexto do segundo item, a previsão para 2023 seria 10,65 – algo bem distante do valor real de 8,05. Pior do que isso, o modelo prevê um crescimento exponencial ilimitado de modo que, em algum momento, a superfície do planeta estaria repleta (quer seja de pessoas, quer seja de ratos!) – o que não foi e nem será o caso.

Observação 3.1 *No modelo malthusiano, quando os parâmetros P_0 e a não são dados, eles podem ser obtidos dos dados observados via regressão exponencial. Uma forma de se fazer isso é por meio do software livre Geogebra com o comando `RegressãoExponencial(<Lista de Pontos>)`. Por exemplo, `RegressãoExponencial((0,2),(2,5),(6,20),(10,109))` produz $P_0 = 2,08$ e $a = 0,39$ que, após arredondamento, correspondem aos valores utilizados no caso dos ratos.*

3.2. Modelo logístico (ou modelo de Verhulst).

A principal deficiência do modelo malthusiano é a suposição de que a taxa de crescimento a é constante durante todo o tempo. Essa hipótese não é realística, pois o aumento da população obriga os seus membros a competirem entre si por espaço, recursos naturais e comida. E essa competição tem a tendência de retardar o crescimento. Ou seja: o aumento da população gera diminuição da taxa de crescimento. Assim, para melhorar o modelo, deve-se incorporar os efeitos dessa competição. A forma mais simples de se fazer isso é supondo que a decresce linearmente com a população, isto é, tem a forma

$$a = \alpha - \beta P,$$

em que α e β são constantes positivas. Nesse caso, a equação diferencial toma a forma

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta P)P. \quad (6)$$

Esse modelo é chamado de **modelo logístico** ou **modelo de Verhulst**. Ele é dado por uma EDO separável conhecida como **equação logística** ou **equação de Verhulst-Pearl**. Os nomes fazem referência ao matemático belga P. F. Verhulst que usou o modelo para estudar as populações da França e da Bélgica em 1834 e ao biólogo americano R. Pearl que, ao lado do bioestatístico americano L. Reed, aplicou o modelo no estudo da população norte-americana em 1920 ([FIGUEIREDO; NEVES, 2010](#)).

A solução da equação (6) é dada por

$$P(t) = \frac{\alpha P_0}{\beta P_0 + (\alpha - \beta P_0)e^{-\alpha t}} \quad (7)$$

Note que:

$$P \text{ é crescente se } P_0 < \frac{\alpha}{\beta}, \quad P \text{ é decrescente se } P_0 > \frac{\alpha}{\beta}, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} P(t) = \frac{\alpha P_0}{\beta P_0 + 0} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Assim:

- Se P_0 começa abaixo de $\frac{\alpha}{\beta}$, então $P(t)$ cresce tendendo a $\frac{\alpha}{\beta}$.
- Se P_0 começa acima de $\frac{\alpha}{\beta}$, então $P(t)$ decresce tendendo a $\frac{\alpha}{\beta}$.

Em nenhum dos casos $P(t)$ ultrapassa o valor $\frac{\alpha}{\beta}$. Esse valor é chamado de **população limite** ou **capacidade de suporte**. O gráfico de cada situação é ilustrado na Figura 3, onde pode-se observar que esse modelo elimina o problema do crescimento ilimitado da população.

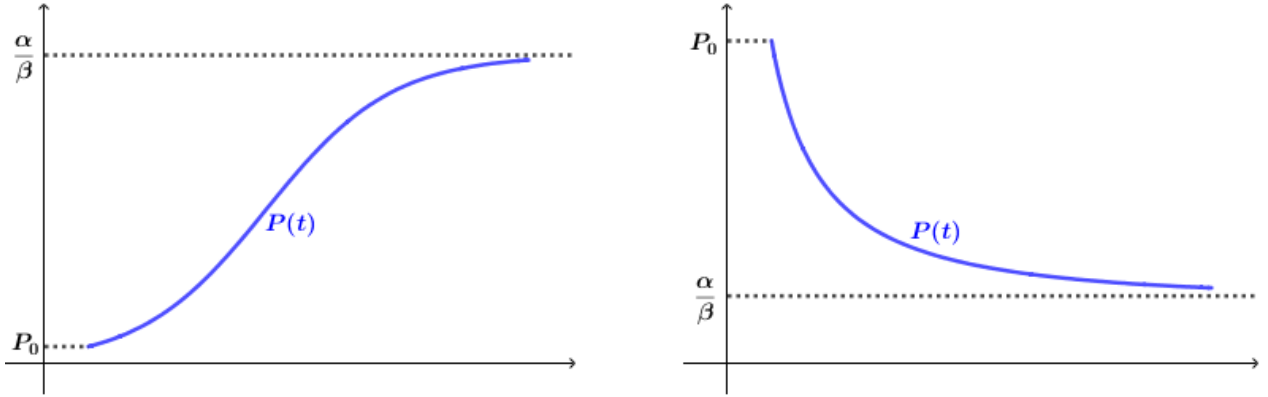


Figura 3: Gráficos das soluções da equação logística com população inicial menor e maior do que a capacidade de suporte, respectivamente. Fonte: Elaborada pelo autor.

Note que a função (7) pode ser expressa por

$$P(t) = \frac{b}{c + e^{-\alpha t}}, \quad (8)$$

em que $b = \frac{\alpha P_0}{\alpha - \beta P_0}$ e $c = \frac{\beta P_0}{\alpha - \beta P_0}$. É possível demonstrar que, a partir de três pontos com abscissas igualmente espaçadas, essas constantes podem ser determinados de modo único. Na modelagem da população dos Estados Unidos apresentada por Pearl e Reed em 1920, elas foram determinadas a partir dos três valores mostrados na Tabela 6.

Ano:	1790	1850	1910
População:	3929000	23192000	91972000

Tabela 6: População dos Estados Unidos. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Pearl e Reed \(1920\)](#).

A função por eles obtida foi a seguinte:

$$P(t) = \frac{2930,3009}{0,014854 + e^{-0,0313395t}}, \quad (9)$$

a qual fornece a população em milhares, t anos a partir de 1780. Como mostrado na Figura 4, essa modelagem se mostrou precisa até 1950, mas perdeu precisão a partir dessa data.

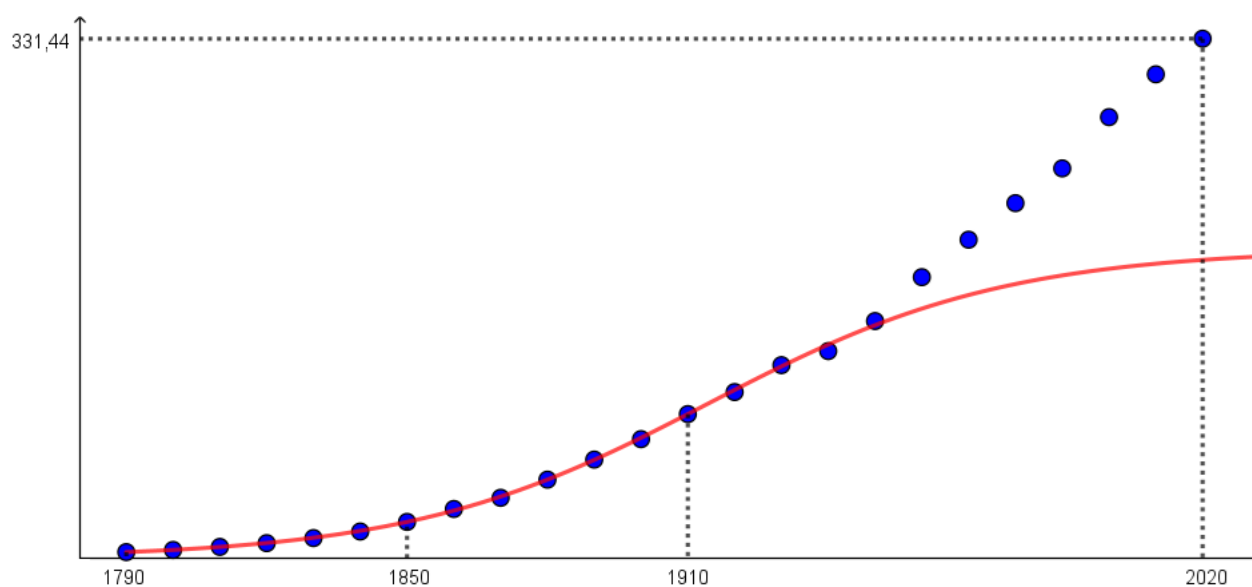


Figura 4: Comparação do modelo de Pearl e Reed (linha) com os dados observados (pontos).
Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Pearl e Reed \(1920\)](#) e [HISTORICAL... \(2021\)](#).

Mas qual será a razão dessa imprecisão? Uma possível explicação, conforme sugerido por [Lipkin e Smith \(2001\)](#), é que a população norte-americana passou pela Guerra Civil Americana entre 1861 e 1865, pela 1ª Guerra Mundial entre 1914 e 1918, pela Grande Depressão entre 1929 e 1939 e pela Segunda Guerra Mundial entre 1939 e 1945. Assim, olhando em retrospecto, pode-se dizer que o modelo foi construído e utilizado num momento de condições desfavoráveis para o crescimento populacional que, ao serem superadas, desencadearam um crescimento mais acelerado.

De modo geral, a ineficiência do modelo logístico para executar previsões de longo prazo de populações humanas pode se dar por muitos outros fatores. Por exemplo: avanços médicos podem reduzir a taxa de mortalidade aumentando, desta forma, a taxa de crescimento; avanços tecnológicos podem melhorar a produção de alimentos e ampliar a área habitável do planeta aumentando, desta forma, a capacidade de suporte; idade e distribuição geográfica dos membros da população não são capturadas pelo modelo ([FULFORD; FORRESTER; JONES, 1997](#); [FIGUEIREDO; NEVES, 2010](#)).

Observação 3.2 *Uma forma de obter os parâmetros α e b do modelo (8) a partir dos dados é por meio do software livre Geogebra com o comando `RegressãoLogística(<Lista de Pontos>)`. Por exemplo, arredondando para 7 casas decimais, o comando `RegressãoLogística((0, 3929),`*

$(60, 23192), (120, 91972))$ produz a função

$$p(t) = \frac{197273,5833631}{1 + 49,2096165e^{-0,0313395t}} = \frac{4008,8421206}{0,0203212 + e^{-0,0313395t}}$$

que fornece a população (em milhares) dos Estados Unidos t anos a partir de 1790. Para obter a população t anos a partir de 1780, como feito em (PEARL; REED, 1920), basta tomar

$$P(t) = p(t - 10) = \frac{4008,8421206}{0,0203212 + e^{-0,0313395t}e^{0,313395}} = \frac{2930,30775}{0,014854 + e^{-0,0313395t}}$$

que, exceto pela precisão do arredondamento, equivale a (9). Para obter a população usando o ano como variável, como feito em (BRAUN, 1993), basta tomar

$$P(t) = p(t - 1790) = \frac{197273,5833631}{1 + e^{3,8960891}e^{-0,0313395(t-1790)}} = \frac{197273,5833631}{1 + e^{-0,0313395(t-1914,3188022)}}.$$

4. Proposta de atividade para sala de aula

Como visto, a modelagem matemática é composta por várias etapas. A etapa da validação parece ser uma etapa bastante interessante para finalidades didáticas, pois realmente mostra o modelo em funcionamento ao confrontar previsões teóricas com dados experimentais. Porém, ministrar atividades de modelagem que incluam a etapa da validação pode ser particularmente desafiador devido, por exemplo, à dificuldade de se obter dados reais apropriados que se encaixem nos modelos escolhidos. Buscando contribuir nesse sentido, a presente seção apresenta uma sugestão de atividade de modelagem que inclui a etapa da validação.

4.1. Problema

No basquete, o **lance livre** é um arremesso concedido a um jogador em razão de certos tipos de faltas. O lance livre não tem marcação da equipe adversária e ocorre de uma posição relativamente próxima da cesta (veja a Figura 5).

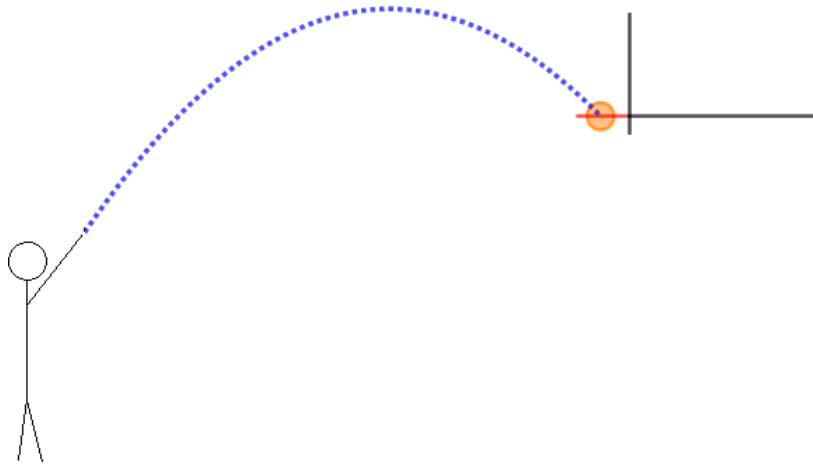


Figura 5: Ilustração do lance livre no basquete. Fonte: Elaborada pelo autor.

- (a) Crie um modelo capaz de determinar se um dado arremesso cai dentro ou fora da cesta podendo, desta forma, fornecer informações úteis para aprimorar treinamentos.
- (b) Implemente a etapa da validação confrontando as previsões do modelo com os dados experimentais apresentados na Tabela 7.

Arremesso	h (m)	v_0 (m/s)	θ (grau)	Resultado experimental
1	2,02	7,49	55,71	Dentro
2	2,02	7,61	56,69	Dentro
3	2,02	7,38	58,29	Fora
4	2,02	7,54	55,68	Dentro
5	2,02	7,65	55,1	Fora
6	2,02	7,41	58,46	Fora
7	2,02	7,55	56,74	Dentro
8	2,02	6,99	54,65	Fora
9	2,02	7,65	57,38	Dentro
10	2,02	7,62	57,09	Dentro
11	2,02	7,46	55,4	Dentro
12	2,02	7,29	56,28	Fora
13	2,02	7,62	56,58	Dentro
14	2,02	7,19	56,24	Fora
15	2,02	7,56	56,1	Dentro
16	2,02	7,54	56,32	Dentro
17	2,02	7,82	56,04	Fora
18	2,02	7,72	54,86	Fora
19	2,02	7,36	56,68	Fora
20	2,02	7,10	53,89	Fora
21	2,02	7,47	54,74	Dentro
22	2,02	7,53	55,79	Dentro
23	2,02	7,15	53,28	Fora
24	2,02	7,12	55,1	Fora
25	2,02	7,60	56,18	Dentro

Tabela 7: Dados experimentais de 25 lances livres de basquete em que h é a altura de lançamento, v_0 é a velocidade inicial da bola, θ é o ângulo de lançamento da bola, a distância entre o atleta e a cesta é $D = 4,60$, o raio da bola é $r = 0,12$, o raio do aro é $R = 0,23$ e a altura da cesta é $H = 3,05$. Fonte: Elaborada pelo autor com dados de [Barzykina \(2017\)](#).

4.2. Abordagem sugerida

Em geral, pode haver mais de um caminho possível para se abordar um problema de modelagem matemática. Nesta seção, buscando contribuir com o leitor interessado, apresentamos uma possível abordagem (trabalhada por alunos do presente autor em sala de aula) que pode produzir boas previsões relativamente aos dados da Tabela 7.

- As principais variáveis do problema são a velocidade inicial da bola v_0 , o ângulo de lançamento da bola θ e as seguintes medidas mostradas na Figura 6: raio da bola r , raio do aro R , altura de lançamento h (altura em que a bola sai da mão do atleta), altura da cesta H , altura máxima atingida pela bola M , distância D entre o atleta

(ponto de partida da bola) e o centro da cesta.

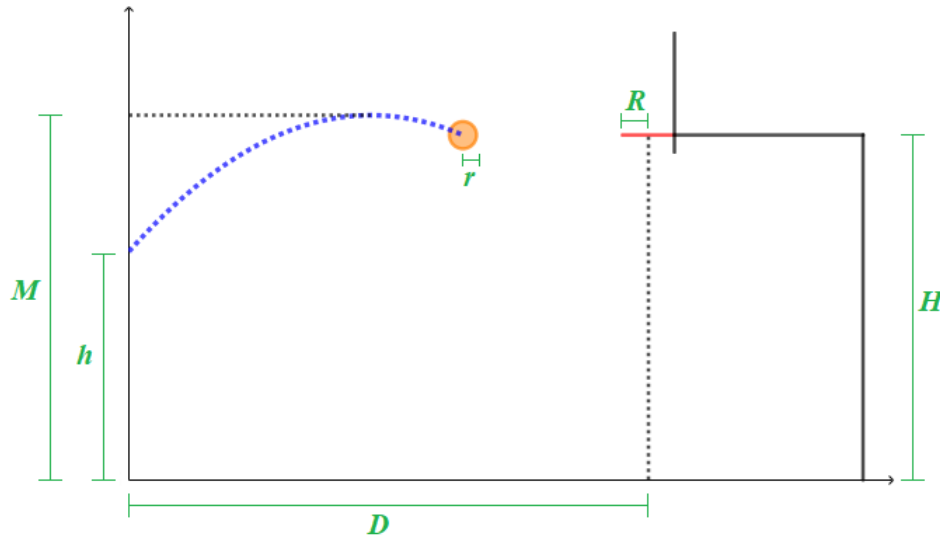


Figura 6: Algumas variáveis relevantes para o problema do lance livre. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Seja $(x(t), y(t))$ a posição do centro da bola no instante t . Obtenha equações para $x(t)$ e $y(t)$. Para isso, pode-se utilizar as mesmas ideias do arremesso de peso exemplificado na Seção 2.2.
- Suponha que um lançamento cai dentro da cesta se existe um momento em que ocorrem três coisas simultaneamente: (i) a bola está caindo, (ii) o centro da bola atinge a altura do aro e (iii) a bola está inteiramente contida no aro como ilustrado na Figura 7.

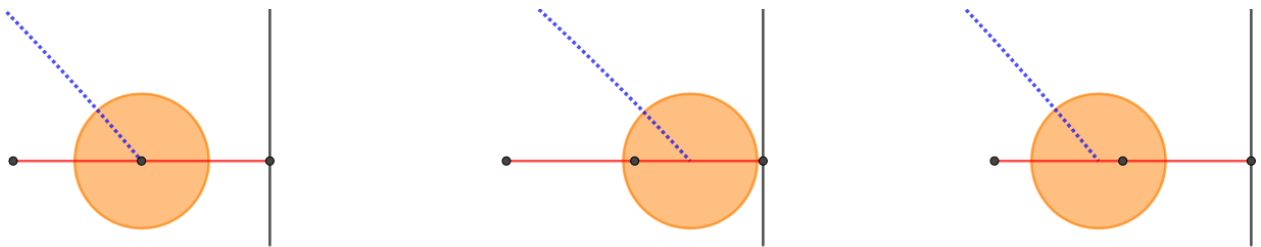


Figura 7: Exemplos de situações que satisfazem a condição de lançamento dentro. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Caso a condição do item anterior não seja satisfeita, para fins de simplificação, suponha que o lançamento cai fora da cesta. Essa situação é ilustrada na Figura 8. Note que as duas primeiras configurações dessa figura representam casos em que a bola se choca com

a tabela ou com o aro, mas são impossíveis de ocorrer na prática exatamente conforme o desenho (pois a bola não atravessa meios materiais). Na prática, um caso em que há choque com o aro ou com a tabela pode produzir um lançamento dentro; porém, dentro da hipótese simplificadora acima sugerida, o modelo não captura esse detalhe (todo choque é considerado lançamento fora).

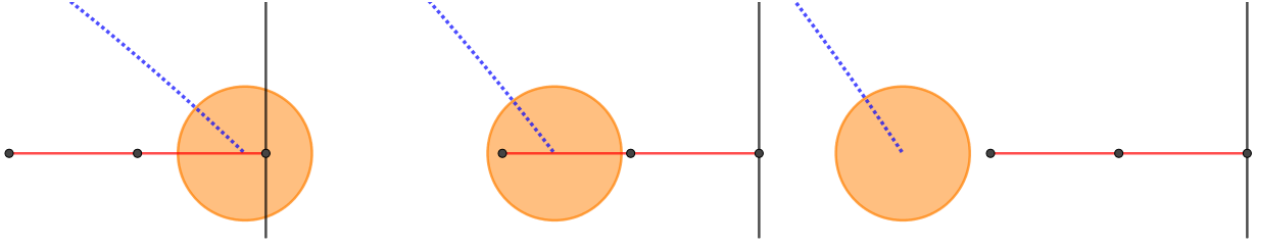


Figura 8: Exemplos de situações que não satisfazem a condição de lançamento dentro. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Se t_H é o instante em que a bola atinge a altura H pela segunda vez (isto é, no momento em que está caindo), então a condição de lançamento dentro definida anteriormente se expressa matematicamente por $D - R + r < x(t_H) < D + R - r$ (veja Figura 9).

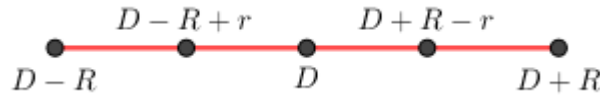


Figura 9: Coordenadas no aro. Fonte: Elaborada pelo autor.

- Treinamentos poderiam ser aprimorados procurando determinar como ajustar v_0 e/ou θ de modo que um lançamento incorreto se transformasse num “lançamento perfeito”, isto é, satisfazendo $(x(t_H), y(t_H)) = (D, H)$.

5. Considerações finais

Neste texto, fizemos uma introdução à modelagem matemática apresentando sua conceitualização, principais etapas e alguns exemplos clássicos que ocorrem no contexto do lançamento de corpos e do crescimento populacional. Nosso intuito foi estudar os modelos tratados em conexão com a etapa da validação, a qual possibilita comparar as previsões teóricas do modelo construído com resultados experimentais concretos fornecendo, desta forma, uma visão prática de como um modelo pode ser utilizado bem como uma ideia geral de seu grau de acurácia – o que é de extrema importância do ponto de vista das aplicações reais. Entendendo

que essas características da etapa da validação tornam sua discussão bastante apropriada ao contexto do ensino da modelagem matemática e que, ao mesmo tempo, sua implementação em sala de aula nem sempre é fácil devido ser necessário dispor de dados experimentais relativos ao fenômeno estudado, encerrarmos a exposição com uma sugestão de atividade que, com base em experiência prévia, é possível de ser trabalhada pelo professor. Com isso, esperamos ter contribuído no contexto do estudo e ensino da modelagem matemática. O desenvolvimento de materiais que permitam uma abordagem incluindo a etapa da validação num nível didático apropriado para modelos diferentes daqueles aqui tratados fica como possibilidade para trabalhos futuros.

6. Agradecimentos

O autor agradece pelas sugestões do parecerista anônimo que ajudaram a melhorar a qualidade do trabalho.

Referências

- 1 BANASIAK, J. **Difference and differential equations in mathematical modelling**. [S.l.]. Disponível em: <https://www.up.ac.za/media/shared/259/Documents/Teaching%20material/book-jb.zp158054.pdf>.
- 2 BANERJEE, S. **Mathematical Modeling. Models, Analysis and Applications**. Boca Raton: CRC Press, 2014.
- 3 BARZYKINA, I. **The physics of an optimal basketball free throw**. 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1702.07234>.
- 4 BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. Campinas: Editora Contexto, 2002.
- 5 BENDER, E. A. **An Introduction to Mathematical Modeling**. New York: Wiley, 1978.
- 6 BLISS, K. M.; FOWLER, K. R.; GALLUZZO, B. J. **Math Modeling. Getting started & getting solutions**. Philadelphia: SIAM, 2014.
- 7 BOX, G. E. P. Robustness in the Strategy of Scientific Model Building. In: LAUNER, R. L.; WILKINSON, G. N. (Org.). **Robustness in Statistics**. New York: Academic Press, 1979. P. 201–236.
- 8 BRAUN, M. **Differential equations and their applications: An introduction to applied mathematics**. 4. ed. New York: Springer, 1993.
- 9 ECK, C.; GARCKE, H.; KNABNER, P. **Mathematical Modeling**. [S.l.]: Springer, 2017.
- 10 FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F. **Equações Diferenciais Aplicadas**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

- 11 FULFORD, G.; FORRESTER, P.; JONES, A. **Modelling with Differential and Difference Equations**. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- 12 GIORDANO, F. R.; FOX, W. P.; HORTON, S. B. **A First Course in Mathematical Modeling**. 5. ed. Boston: Brooks/Cole, 2014.
- 13 HISTORICAL Population Change Data (1910-2020). United States Census Bureau. 2021. Disponível em: <https://www.census.gov/data/tables/time-series/dec/popchange-data-text.html>.
- 14 LINTHORNE, Nicholas P. Optimum release angle in the shot put. **Journal of Sports**, v. 19, n. 5, p. 359–372, 2001.
- 15 LIPKIN, L.; SMITH, D. Logistic Growth Model. **JOMA**, v. 1, n. 3, 2001. Disponível em: <https://maa.org/press/periodicals/loci/joma/logistic-growth-model-introduction>.
- 16 MEERSCHAERT, M. M. **Mathematical Modeling**. 4. ed. Waltham: Academic Press, 2013.
- 17 NACHBIN, A.; TABAK, E. **Equações Diferenciais em Modelagem Matemática Computacional**. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. Disponível em: https://impa.br/wp-content/uploads/2017/04/21_CBM_97_01.pdf.
- 18 PEARL, R.; REED, L. J. On the rate of growth of the population of the United States since 1790 and its mathematical representation. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, v. 6, n. 6, p. 275–288, 1920.
- 19 SEGEL, L. A.; EDELSTEIN-KESHET, L. **A Primer on Mathematical Models in Biology**. Philadelphia: SIAM, 2013.
- 20 TD, Dieter. **Feldmaus *Microtus arvalis*.jpg**. Licensed under the [CC BY-SA 3.0](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/) license, via Wikimedia Commons. 2005. Disponível em: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Feldmaus_Microtus_arvalis.jpg.
- 21 VELTEN, K. **Mathematical Modeling and Simulation**. Weinheim: Wiley-VCH, 2009.
- 22 WORLD Population by Year. Worldometer. 2024. Disponível em: <https://www.worldometers.info/world-population/world-population-by-year/>.