J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 6** 1 (2022): 16–22. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

# A quadratura do círculo e o volume da esfera

**Greyce Contini Pilati**
União Brasileira de Faculdades e Colégio Estadual Marechal Costa e Silva - EFMP,
Pr - Brasil, greycepilati@hotmail.com

Resumo: Dentre os problemas que mais fascinaram os matemáticos ao longo da história está a quadratura do círculo. O número irracional $\pi$ tem relação direta com esse problema e foi peça fundamental na conjectura de sua impossibilidade de solução utilizando apenas régua não graduada e compasso com uma quantidade finita de etapas, como foi proposto por Euclides. A quadratura do círculo é possível sem essas regras e, ainda mais, com ela é possível realizar a transformação da esfera em um prisma de base quadrada.
**Palavras-chave:** Esfera, volume, quadratura, prisma.

## 1. Introdução.

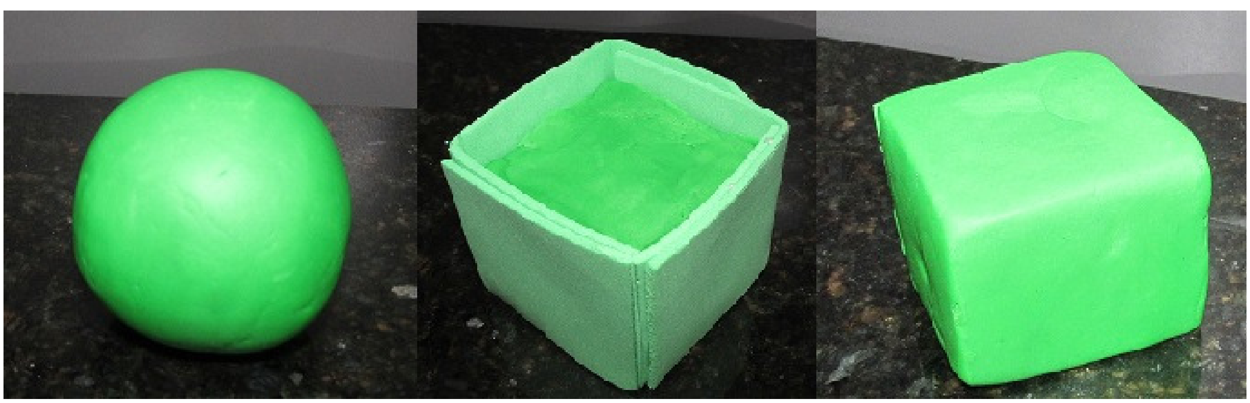


Figura 1: Esfera e cubo com volumes iguais.
**Fonte:** A autora.

Um dos sólidos que mais atrai a atenção das pessoas por sua beleza, sem dúvida, é a esfera. Seja em brincadeiras com bolhas de sabão, na natureza, na arquitetura ou na prática de esportes sua representação está presente, encantando e instigando a curiosidade a seu respeito. Esse fascínio envolveu há muitos anos Arquimedes, que segundo (ÁVILA, 2010), conseguiu calcular o volume da esfera comparando-a com um cilindro e um cone, utilizando-se de forma mecânica o equilíbrio de pesos e alavancas e que posteriormente ele mesmo, no livro: "Sobre a Esfera e o Cilindro, parte II"teria demonstrado com todo o rigor necessário pelo método da exaustão e dupla redução ao absurdo a obtenção do mesmo volume.

Minha intenção aqui é mostrar como obter o volume da esfera com um prisma de base quadrada, utilizando a quadratura do círculo máximo da esfera, já que o prisma é um poliedro mais comum e tem o cálculo do volume mais simplificado, ou seja, como produto da área da base pela sua altura.

Para isso, faz-se necessário primeiro estudarmos um problema clássico da Matemática conhecido como a quadratura do círculo, que consiste em construir um quadrado de mesma área de um círculo dado, utilizando apenas régua e compasso. Este problema mobilizou matemáticos durante séculos, principalmente os gregos, por seu desafio intelectual.

Desde o século XIX sabemos que a quadratura do círculo não possui solução apenas com uso de régua não graduada e compasso com um número determinado de etapas, pois $\pi$ é um número transcendente, o que foi demonstrado por Ferdinand Von Lindemann em 1882, ou seja, $\pi$ não é solução de nenhuma equação algébrica com coeficientes racionais, logo não é possível construir, utilizando o método citado acima, um quadrado de lado $\sqrt{\pi}$. Isso não significa que esse quadrado não exista, pois ao retirarmos essa condição a quadratura possui várias soluções, das quais apresentaremos uma delas.

## 2. História

O problema da quadratura do círculo, pelo método de passos finitos e uso de régua não graduada e compasso está diretamente ligado a algumas características da constante $\pi$ que são sua irracionalidade e transcendência. Este problema junto de outros dois: a duplicação do cubo e a trissecção de um ângulo se tornou muito famoso e motivou durante séculos vários matemáticos na busca por uma solução (OLIVEIRA, F. L. S., 2015; OLIVEIRA, J. M. de, 2010).

O $\pi$ é um número irracional, ou seja, não pode ser escrito na forma $\frac{a}{b}$ com a, b inteiros, com $b \neq 0$. Arquimedes em seus estudos conseguiu uma aproximação para o $\pi$ considerando o perímetro de um polígono de n lados inscrito em um círculo, com n suficientemente grande obtendo que $3{,}14084 < \pi < 3{,}142858$.

Entretanto a irracionalidade de $\pi$ só foi provada em 1761, por J. H. Lambert, que utilizou um método com frações contínuas. Cabe aqui destacar ainda que a simbologia de $\pi$ só foi adotada por Leonhard Euler, em 1737, tornando-se sua representação padrão.

Falaremos agora da transcendência de $\pi$. Um número transcendente é aquele que não é algébrico, ou seja, nunca será solução de uma equação de coeficientes de números racionais. De acordo com (SANTOS, 2013), Joseph Liouville foi o primeiro a provar a existência de números transcendentes e que estes são em quantidade infinita. Cantor, por sua vez, demonstrou que existem mais números transcendentes do que algébricos. Porém, foi a partir da demonstração de que o número $e$ era transcendente, realizada por Hermite, em 1873, que foi possível a demonstração da transcendência de $\pi$, por extensão, quando em 1882, Ferdinand Von Lindemann demonstrou que o número $\pi$ é um número transcendente. Consequentemente $\sqrt{\pi}$ também é transcendente. Com isso, não há a possibilidade da quadratura do círculo ser realizada pelo método euclidiano proposto na antiguidade.

O que faremos a seguir é uma demonstração da quadratura do círculo, sem seguir os critérios do uso de régua não graduada e compasso e número finito de passos, com o objetivo de transformar a esfera em um prisma de base quadrada.

## 3. A quadratura do círculo

Seja $\Gamma$ uma circunferência dada de raio r. Considere um triângulo retângulo ABC de ângulo reto em C, com altura r e base $\overline{AB} = 2\pi r$, que obtemos ao rolar a circunferência $\Gamma$ sobre uma reta suporte.

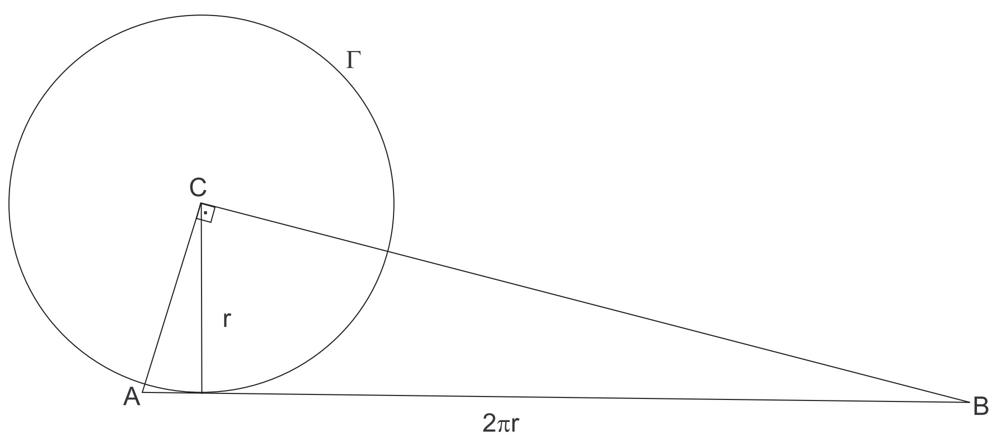



Figura 2: Círculo $\Gamma$ e triângulo ABC.

A área $A_t$ do triângulo ABC é a mesma área $A_\Gamma$ do círculo limitado pela circunferência $\Gamma$, ou seja: $A_t = \pi r^2$.

Podemos encontrar um paralelogramo ABDE (figura 3) de base AB e altura $\frac{r}{2}$ cuja área é igual a área do triângulo ABC, da figura 2.

Esse paralelogramo por sua vez, pode ser transformado em um retângulo ABFG de base AB e altura $\frac{r}{2}$ e mesma área, conforme ilustrado na figura 4.

Considere a soma dos segmentos de medida $\overline{AB} + \overline{BF}$ como o diâmetro de uma semicircunferência $\Omega$. Tome um segmento perpendicular a $\overline{AB} + \overline{BF}$, passando pelo ponto B, que

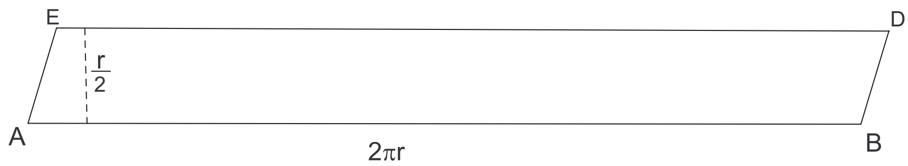



Figura 3: Paralelogramo ABDE.

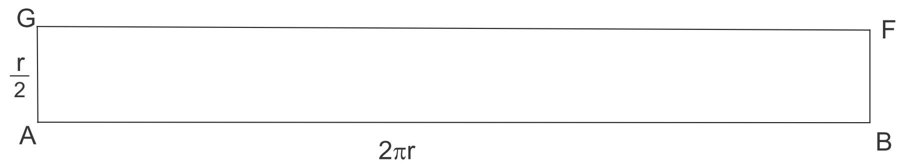



Figura 4: Retângulo ABFG.

intercepte a semicircinferência $\Omega$ em um ponto H. Construímos um triângulo retângulo AFH de base AF, ângulo reto em H e altura $\overline{BH}$.

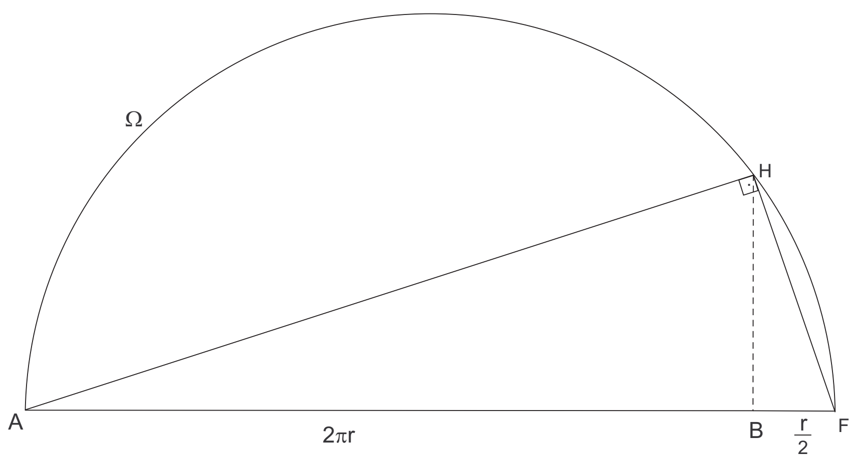



Figura 5: Semicircunferência $\Omega$ e triângulo retângulo AFH.

Pelas relações métricas no triângulo retângulo, temos que o quadrado da altura de um triângulo retângulo, com relação à hipotenusa, é igual ao produto das projeções dos catetos sobre a hipotenusa, ou seja:

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}.\overline{BF}$$

E como a área do círculo $\Gamma$ é igual à área do retângulo ABFG que é dada por $\overline{AB}.\overline{BF}$, temos que:

$$A_\Gamma = \overline{BH}^2,$$

completando assim a quadratura do círculo.

Portanto, podemos construir o quadrado BHIJ (figura 6), de lado com medida $\overline{BH}$ que tem mesma área do círculo limitado pela circunferência $\Gamma$.

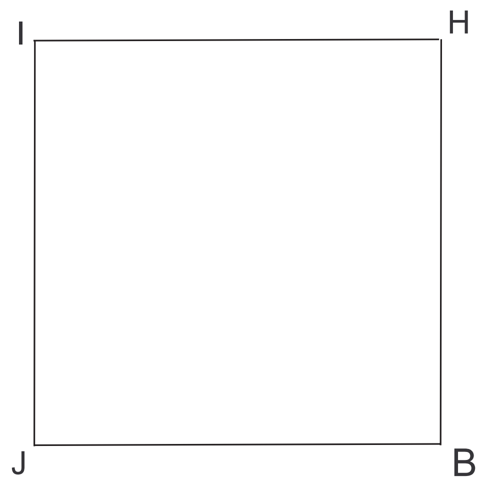



Figura 6: Quadrado BIHJ.

## 4. O volume da esfera

A partir da demonstração da quadratura do círculo iniciamos a transformação da esfera em um prisma de base quadrada.

Considere uma esfera S de raio r e volume $V_e$.

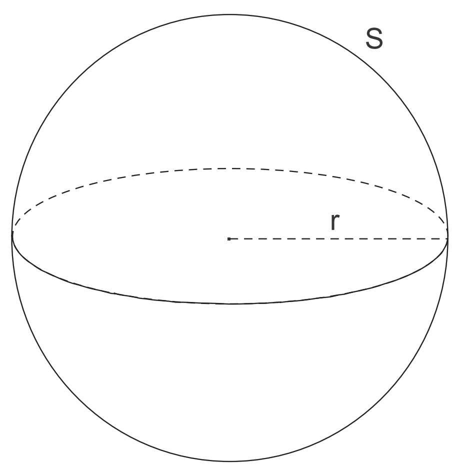



Figura 7: Esfera de raio $r$ e volume $V_e$.

O círculo máximo de S tem área $\pi r^2$. Considere esse círculo máximo de S como base de um cone de altura igual a $4r$ e mesmo volume de S.

O volume do cone é dado por: $V_c = \frac{1}{3}.\pi r^2.4r = \frac{4}{3}\pi r^3 = V_e$.

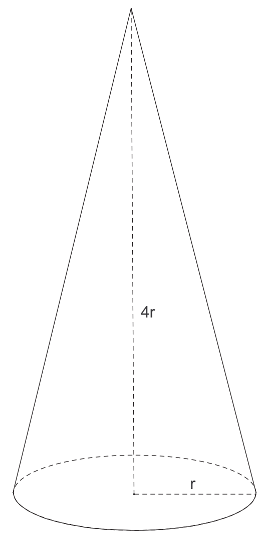



Figura 8: Cone com área da base igual a $\pi r^2$ e altura $4r$.

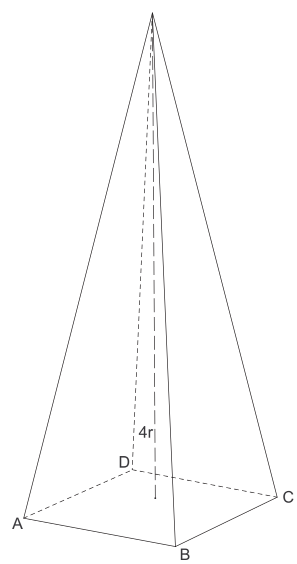
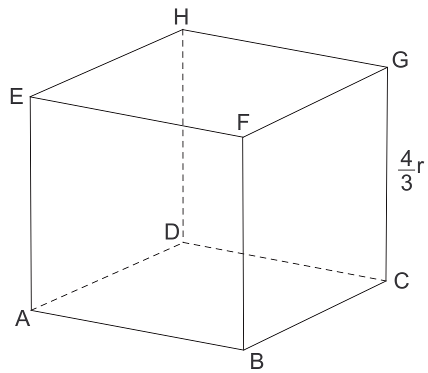



Figura 9: Pirâmide com área da base igual a $\pi r^2$ e altura $4r$.

Na base do cone, que representa o círculo máximo da esfera S, podemos realizar uma quadratura, mantendo sua área. Na sequência, construímos uma pirâmide com o quadrado obtido a partir dessa quadratura, com a mesma altura do cone.

Assim, podemos comparar o volume do cone com o volume da pirâmide de base quadrada ABCD e altura 4r, pois ambos volumes são dados por $\frac{1}{3}.\pi r^2.4r$.

E como o volume da pirâmide é dado por $\frac{1}{3}$ do volume do prisma de mesma base, podemos construir um prisma ABCDEFGH com base ABCD igual à da pirâmide e altura correspondente a $\frac{1}{3}$ de $4r$.




Portanto, encontramos um prisma de base quadrada cujo volume é o mesmo da esfera S, ou seja, $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Como já observado, sem a exigência do uso de régua e compasso é possível encontrar formas variadas de resolver o problema. Assim com o propósito de pensar mais sobre o assunto propomos ao leitor encontrar uma quadratura do círculo diferente da que aqui foi apresentada ou a transformação da esfera em um cubo de mesmo volume e obter sua representação geométrica.

## Referências

1 ÁVILA, Geraldo. **Arquimedes, a esfera e o cilindro.** RPM 10. Campinas, SP, 2010. p. 01–08. Disponível em: ¡https://www.ime.usp.br/~pleite/pub/artigos/avila/rpm10.pdf¿. Acesso em: 5 mai. 2022.

2 OLIVEIRA, Francisco Lucas Santos. **Histórico, cálculo e irracionalidade de pi-grego / Francisco Lucas Santos Oliveira.** Brasil, 2015. Disponível em: ¡https://repositorio.ufc.br/bitstream/riufc/13171/1/2015_dis_flsoliveira.pdf¿. Acesso em: 5 mai. 2022.

3 OLIVEIRA, João Milton de. **A irracionalidade e a transcendência do número $\pi$.** RPM 10. Rio Claro, SP, 2010. p. 01–08. Disponível em: ¡http://www1.rc.unesp.br/igce/pos/profmat/arquivo/dissertacoes/A%20Irracionalidade%20e%20Transcend%C3%AAncia%20do%20N%C3%BAmero%20Pi.pdf¿. Acesso em: 14 mai. 2022.

4 SANTOS, Gilvaneide Lucena dos. **Número *pi*: sua irracionalidade e transcendência.** RPM 10. Brasil, 2013. p. 01–08. Disponível em: ¡https://repositorio.ucb.br:9443/jspui/bitstream/10869/1877/1/Gilvaneide%20Lucena%20dos%20Santos.pdf¿. Acesso em: 14 mai. 2022.