J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 9** 1 (2025): 1–16. ©Jeepema– ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

A construção do conjunto dos números inteiros e do conjunto dos números racionais

Sandro Marcos Guzzo – Email: smguzzo@gmail.com

Resumo: A construção dos conjuntos numéricos é um assunto clássico na matemática, bem como o estudo das propriedades das operações definidas sobre estes conjuntos. Em geral, em um primeiro curso de álgebra ou de análise real, comumente oferecido aos alunos dos cursos de graduação em matemática, os estudantes se familiarizam com a construção dos conjuntos dos números inteiros, dos números racionais e dos números reais. Neste trabalho usaremos o conjunto dos números naturais para construir o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números racionais. Também, definiremos a adição e a multiplicação nestes conjuntos e provaremos as propriedades que tornam o conjunto dos números inteiros um anel de integridade e o conjunto dos números racionais um corpo.
Palavras-chave: Números inteiros; Números racionais; Classes de equivalência.

1. Introdução

A construção dos conjuntos numéricos $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ é parte da ementa das disciplinas de álgebra e/ou análise real de muitos cursos de graduação em matemática. Assumindo a existência do conjunto dos números naturais, pode-se construir o conjunto dos números inteiros, e verificar que este novo conjunto é um anel de integridade sob as operações de adição e multiplicação nele definidas. De posse do conjunto dos números inteiros pode-se construir o conjunto dos números racionais, e verificar que este novo conjunto é um corpo sob as operações de adição e multiplicação.

A abordagem clássica para estas duas construções é o uso de relações de equivalência e classes de equivalência. Ao leitor com pouca familiaridade com estes dois conceitos recomendamos (DOMINGUES HYGINO H. & IEZZI, 1982).

Neste texto temos o objetivo de construir os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais, a partir do conjunto dos números racionais. Esta construção segue as ideias mencionadas em (SAH, 1967).

Vamos considerar conhecido o conjunto dos números naturais. O conjunto dos números naturais, neste texto, será considerado

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

e dotado de duas operações $+$ e $\cdot$, chamadas respectivamente de adição e de multiplicação, sobre as quais incidem as seguintes propriedades para quaisquer $m, n, r \in \mathbb{N}$:

i) (Comutatividade de $+$) $m + n = n + m$,

ii) (Associatividade de $+$) $(m + n) + r = m + (n + r)$,

iii) (Existência de elemento neutro para $+$) $m + 0 = 0 + m = m$,

iv) (Lei do cancelamente para $+$) Se $a + m = a + n$ então $m = n$,

v) (Comutatividade de $\cdot$) $m \cdot n = n \cdot m$,

vi) (Associatividade de $\cdot$) $(m \cdot n) \cdot r = m \cdot (n \cdot r)$,

vii) (Existência de elemento neutro para $\cdot$) $m \cdot 1 = 1 \cdot m = m$,

viii) (Distributividade de $\cdot$ em relação a $+$) $m \cdot (n + r) = m \cdot n + m \cdot r$,

ix) $m \cdot n = 0$ se e somente se $m = 0$ ou $n = 0$,

x) (Lei do cancelamento para $\cdot$) Se $a \cdot m = a \cdot n$ e $a \neq 0$ então $m = n$.

O conjunto dos números naturais é também dotado de uma relação de ordem total. A notação $m < n$ significa que m precede n, ou que n sucede m, pela relação de ordem. Escrevemos $m \leq n$ para dizer que $m < n$ ou $m = n$. Mais precisamente, a relação é dada por

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a + k = b, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N},$$

e

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad a + k = b, \quad \text{para algum} \quad k \in \mathbb{N} - \{0\}.$$

Neste texto (e comumente na matemática) usaremos a notação de multiplicação subentendida. Escreveremos simplesmente mn para representar $m \cdot n$. Escreveremos também $\mathbb{N}^*$ para representar $\mathbb{N} - \{0\}$.

2. Construção do conjunto dos números inteiros

A ideia da construção do conjunto dos números inteiros é definir um número inteiro como sendo a diferença entre dois números naturais. Assim, se $z \in \mathbb{Z}$ então $z = a - b$ para $a, b \in \mathbb{N}$. Dois problemas aqui ocorrem. Primeiro a diferença não é uma operação sobre o conjunto dos números naturais, e então para contornar isto, o número inteiro z será associado a um par (a, b) com $a, b \in \mathbb{N}$. A ideia é que este par represente o número $a - b$. O segundo problema é que, desta forma, um número inteiro z pode ser escrito de muitas maneiras como diferença de dois números naturais, e então temos que trabalhar com classes de equivalência.

Vamos aos detalhes técnicos desta construção. Considerando o conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definimos a relação $\approx$ dada por

$$(a, b) \approx (x, y) \qquad \text{se, e somente se,} \qquad a + y = x + b.$$

Aqui, $+$ é a operação de adição de números naturais, sobre a qual incidem as propriedades citadas anteriormente. Vamos mostrar que $\approx$ é uma relação de equivalência. Dado qualquer $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, temos claramente que $a + b = a + b$, donde $(a, b) \approx (a, b)$. A relação é então reflexiva. Sejam agora $(a, b), (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, tais que $(a, b) \approx (x, y)$. Da definição da relação temos que $a + y = x + b$ e claramente isto significa também que $x + b = a + y$ donde $(x, y) \approx (a, b)$. A relação é também simétrica. Agora, sejam $(a, b), (x, y), (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tais que $(a, b) \approx (x, y)$ e $(x, y) \approx (m, n)$, isto é $a + y = x + b$ e $x + n = m + y$. Das propriedades da adição de números naturais, podemos deduzir que $a + y + n = (a + y) + n = (x + b) + n = (x + n) + b = (m + y) + b = m + y + b$. Pela lei do cancelamento de números naturais pela operação de adição, temos que $a + n = b + m$, donde $(a, b) \approx (m, n)$ e a relação é transitiva. Segue que $\approx$ e uma relação de equivalência sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Consideremos o conjunto quociente de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pela relação $\approx$, isto é, o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas pela relação $\approx$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Seja então

$$\mathbb{Z} = \frac{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}{\approx} = \left\{ \overline{(a, b)}; \quad (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \right\}.$$

O conjunto $\mathbb{Z}$ será, deste ponto em diante, chamado de conjunto dos números inteiros, e um elemento deste conjunto é um número inteiro, ou simplesmente um inteiro. Lembremos ainda que $\overline{(a, b)} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}; \quad (x, y) \approx (a, b)\}$, e como já sabemos,

$$\overline{(a, b)} = \overline{(x, y)} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \in \overline{(x, y)} \quad \Leftrightarrow \quad (a, b) \approx (x, y) \quad \Leftrightarrow \quad a + y = x + b.$$

Definiremos em $\mathbb{Z}$ duas operações chamadas de adição (ou soma) e multiplicacão (ou produto) representadas respectivamente por $+$ e $\cdot$, e dadas por

$$\overline{(a,b)} + \overline{(x,y)} = \overline{(a+x, b+y)},$$

e

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(ax+by, ay+bx)}.$$

Aqui, estamos usando no segundo membro destas definições, a notação $+$ para designar a adição de números naturais, e a notação ax para designar a multiplicação $a \cdot x$ de números naturais.

Em primeiro lugar temos que verificar que a adição e a multiplicação de números inteiros estão bem definidas. Isto porque no primeiro membro da definição, temos uma classe $\overline{(a,b)}$ que é na verdade um conjunto de vários elementos relacionados entre si por $\approx$, enquanto no segundo membro temos os elementos a e b. Isto significa que usamos o par (a,b) como representante da classe $\overline{(a,b)}$, e precisamos ter certeza que esta escolha não afeta as operações.

Proposição 2.1. *As operações $+$ e $\cdot$ definidas no conjunto dos números inteiros, não dependem da escolha do representante das classes.*

Demonstração: Sejam $(a,b),(c,d),(x,y),(z,w) \in \mathbb{Z}$, de forma que $(a,b) \approx (c,d)$ e $(x,y) \approx (z,w)$. Da definição da relação temos que $a+d = b+c$ e também $x+w = y+z$. Segue que

$$(a+x)+(d+w) = (a+d)+(x+w) = (c+b)+(y+z) = (c+z)+(b+y),$$

donde $(a+x, b+y) \approx (c+z, d+w)$, ou ainda, $\overline{(a+x,b+y)} = \overline{(c+z,d+w)}$. Então

$$\overline{(a,b)} + \overline{(x,y)} = \overline{(a+x,b+y)} = \overline{(c+z,d+w)} = \overline{(c,d)} + \overline{(z,w)},$$

e a adição está bem definida. Também, temos que

$$(a+d)x + (c+b)y + c(x+w) + d(y+z) = (c+b)x + (a+d)y + c(y+z) + d(x+w),$$

ou

$$ax + dx + cy + by + cx + cw + dy + dz = cx + bx + ay + dy + cy + cz + dx + dw.$$

Da lei do cancelamento para a adição de números naturais, resta que

$$ax + by + cw + dz = bx + ay + cz + dw,$$

ou ainda,

$$(ax + by) + (cw + dz) = (cz + dw) + (ay + bx),$$

e da definição da relação temos que,

$$\overline{(ax + by, ay + bx)} = \overline{(cz + dw, cw + dz)},$$

donde segue que,

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)} = \overline{(ax + by, ay + bx)} = \overline{(cz + dw, cw + dz)} = \overline{(c, d)} \cdot \overline{(z, w)},$$

e a multiplicação também está bem definida.

$\blacksquare$

Vamos agora mostrar propriedades importantes sobre as operações $+$ e $\cdot$ no conjunto $\mathbb{Z}$. Propriedades estas que fazem deste conjunto um anel de integridade.

Proposição 2.2. *A adição de números inteiros é associativa e comutativa.*

Demonstração: Dados então $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)}, \overline{(m, n)} \in \mathbb{Z}$ arbitrários, temos que

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \left(\overline{(x, y)} + \overline{(m, n)}\right) &= \overline{(a, b)} + \overline{(x + m, y + n)} \\ &= \overline{(a + (x + m), b + (y + n))} = \overline{((a + x) + m, (b + y) + n)} \\ &= \overline{(a + x, b + y)} + \overline{(m, n)} = \left(\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)}\right) + \overline{(m, n)},\end{aligned}$$

que mostra que a adição é associativa. Também

$$\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(a + x, b + y)} = \overline{(x + a, y + b)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)},$$

mostrando que a adição é comutativa.

$\blacksquare$

Proposição 2.3. *A adição admite um elemento neutro em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: Queremos encontrar um elemento $0_{\mathbb{Z}} = \overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ que deve satisfazer a igualdade $\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a, b)}$ para todos $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$. Como a adição é comutativa, vamos nos preocupar apenas com uma das igualdades. A outra será consequência direta da comutatividade.

A classe $\overline{(x, y)}$ procurada deve satisfazer então $\overline{(a + x, b + y)} = \overline{(a, b)}$. Da definição de classe de equivalência, temos $(a + x, b + y) \approx (a, b)$ e da definição da relação, segue que x e y devem satisfazer $a + x + b = b + y + a$. Da lei do cancelamento da adição de números naturais, temos que $x = y$. Ou seja, $0_{\mathbb{Z}} = \overline{(x, y)}$ é uma classe de equivalência, onde os representantes são pares ordenados com coordenadas iguais. De fato, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$, e qualquer $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$, temos que $(a + n) + b = a + (b + n)$, donde $\overline{(a + n, b + n)} = \overline{(a, b)}$, e disto, temos

$$\overline{(n, n)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a + n, b + n)} = \overline{(a, b)}.$$

Segue portanto que $0_{\mathbb{Z}} = \overline{(n, n)}$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$.

■

O elemento $0_{\mathbb{Z}}$ da Proposição anterior, será representado apenas por 0 e chamado de zero.

Teorema 2.4. *Todo número inteiro admite simétrico para a operação de adição.*

Demonstração: Dado $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ queremos mostrar que existe $\overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ que satisfaz $\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = 0 = \overline{(n, n)}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Vamos mostrar apenas a última igualdade e a comutatividade da adição garantirá a primeira igualdade.

Queremos então que $\overline{(x, y)} \in \mathbb{Z}$ satisfaça $\overline{(x + a, y + b)} = \overline{(n, n)}$, que pela igualdade de classes de equivalência significa que $x + a + n = y + b + n$. Da definição da relação, esta última igualdade significa que $(x, y) \approx (b, a)$ e então $\overline{(x, y)} = \overline{(b, a)}$. Assim,

$$\overline{(x, y)} + \overline{(a, b)} = \overline{(b, a)} + \overline{(a, b)} = \overline{(a + b, b + a)} = 0.$$

Segue que todo elemento $\overline{(a, b)} \in \mathbb{Z}$ possui simétrico para a operação de adição e este elemento simétrico é precisamente o elemento $\overline{(b, a)}$.

■

O elemento simétrico $\overline{(b, a)}$, simétrico de $\overline{(a, b)}$ é chamado também de oposto de $\overline{(a, b)}$ e representado por $-\overline{(a, b)}$.

Proposição 2.5. *A multiplicação de números inteiros é associativa, comutativa e distributiva em relação à adição.*

Demonstração: Suponha então $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)}, \overline{(m, n)} \in \mathbb{Z}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned}
\overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(x, y)} \cdot \overline{(m, n)}\right) &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(xm + yn, xn + ym)} \\
&= \overline{(a(xm + yn) + b(xn + ym), a(xn + ym) + b(xm + yn))} \\
&= \overline{(axm + ayn + bxn + bym, axn + aym + bxm + byn)} \\
&= \overline{((ax + by)m + (ay + bx)n, (ax + by)n + (ay + bx)m)} \\
&= \overline{(ax + by, ay + bx)} \cdot \overline{(m, n)} = \left(\overline{(a, b)} \cdot \overline{(x, y)}\right) \cdot \overline{(m, n)},
\end{aligned}$$

mostrando a associatividade da multiplicação.

Para a comutatividade, também temos que

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(ax+by, ay+bx)} = \overline{(xa+yb, ya+xb)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(a,b)},$$

que prova a comutatividade da multiplicação.

Para a distributividade, temos que

$$\begin{aligned}\overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(x,y)} + \overline{(m,n)}\right) &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(x+m, y+n)} \\ &= \overline{(a(x+m)+b(y+n), a(y+n)+b(x+m))} \\ &= \overline{(ax+am+by+bn, ay+an+bx+bm)} \\ &= \overline{(ax+by, ay+bx)} + \overline{(am+bn, an+bm)} \\ &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} + \overline{(a,b)} \cdot \overline{(m,n)}.\end{aligned}$$

A distributividade da multiplicação pela adição pela direita segue diretamente da comutatividade da multiplicação.

■

Proposição 2.6. *A multiplicação admite elemento neutro em $\mathbb{Z}$.*

Demonstração: Queremos encontrar um elemento $1_{\mathbb{Z}} = \overline{(x,y)} \in \mathbb{Z}$ de forma que $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}$, para qualquer $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Z}$. Da igualdade desejada, $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(a,b)}$, temos que, $\overline{(xa+yb, xb+ya)} = \overline{(a,b)}$. Da definição de classe de equivalência, $(xa+yb, xb+ya) \approx (a,b)$ e da definição da relação segue que x e y devem satisfazer $ax+by+b = a+bx+ay$, ou ainda, $ax+b(y+1) = a(y+1)+bx$.

Esta última igualdade fica cumprida colocando $x = y+1$ para quaisquer que sejam $a, b \in \mathbb{N}$. Desta forma, temos que $1_{\mathbb{Z}} = \overline{(x,y)} = \overline{(n+1,n)}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, como $an+a+bn+b = bn+b+an+a$ da definição da relação temos que $\overline{(an+a+bn, bn+b+an)} = \overline{(a,b)}$, donde

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(n+1,n)} = \overline{(an+a+bn, bn+b+an)} = \overline{(a,b)},$$

provando que $\overline{(n+1,n)}$ é o elemento neutro pela direita para a multiplicação. Da comutatividade da multiplicação, segue que este elemento é também elemento neutro pela esquerda.

■

Claro que o representante mais simples da classe $\overline{(n+1,n)}$ é o elemento $\overline{(1,0)}$ e deste ponto em diante, o elemento $1_{\mathbb{Z}} = \overline{(n+1,n)} = \overline{(1,0)}$ será representado simplesmente por 1 e chamado de unidade de $\mathbb{Z}$.

Proposição 2.7. *O conjunto $\mathbb{Z}$ não possui divisores próprios de* 0*, isto é, se* $\overline{(a,b)}\cdot\overline{(x,y)} = 0$ *então* $\overline{(a,b)} = 0$ *ou* $\overline{(x,y)} = 0$.

Demonstração: Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)} \in \mathbb{Z}$, tais que $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = 0 = \overline{(n,n)}$, e suponha que $\overline{(a,b)} \neq \overline{(n,n)}$. Consequentemente $a + n \neq b + n$, isto é, $a \neq b$. Temos então que $\overline{(ax+by, bx+ay)} = \overline{(n,n)}$, e então $(ax+by, bx+ay) \approx (n,n)$. Da definição da relação, segue que $ax+by+n = bx+ay+n$, ou ainda, $ax+by = bx+ay$. Como $a \neq b$, restam ainda dois casos exclusivos.

Caso 1: $a < b$. Existe então $k \in \mathbb{N}^*$, tal que $a + k = b$, e usando este fato temos que $ax + (a+k)y = (a+k)x + ay$, e pela lei do cancelamento de números naturais para a adição, vem $ky = kx$. Esta por sua vez, pela lei do cancelamento de números naturais não nulos para a multiplicação nos leva a $y = x$, isto é, $\overline{(x,y)} = \overline{(y,y)} = 0$.

Caso 2: $b < a$. Neste caso $a = b+k$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Substituindo em $ax+by = bx+ay$, chegamos a $(b+k)x + by = bx + (b+k)y$ e pelas mesmas leis de cancelamento citadas no caso 1, temos também que $x = y$. Segue aqui também que $\overline{(x,y)} = \overline{(y,y)} = 0$.

■

Esta última Proposição garante que o conjunto $\mathbb{Z}$ é um anel de integridade, dito anel de integridade dos números inteiros. O conjunto dos números inteiros não é um corpo, e portanto este é o ponto máximo que podemos chegar no sentido da estrutura algébrica deste conjunto. Contudo ainda mostraremos a lei do cancelamento de elementos não nulos para a multiplicação.

Proposição 2.8. *Se* $\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)}, \overline{(z,w)} \in \mathbb{Z}$ *tais que* $\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(z,w)}$ *e* $\overline{(a,b)} \neq 0$ *então* $\overline{(x,y)} = \overline{(z,w)}$.

Demonstração: Suponha então $\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)}, \overline{(z,w)} \in \mathbb{Z}$ satisfazendo $\overline{(a,b)} \neq 0 = \overline{(n,n)}$, e portanto $a+n \neq b+n$, ou ainda $a \neq b$, e também

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(z,w)}.$$

Segue desta última igualdade que

$$\overline{(ax+by, ay+bx)} = \overline{(az+bw, aw+bz)},$$

ou ainda

$$ax + by + aw + bz = ay + bx + az + bw. \tag{1}$$

Como $a \neq b$ vamos ainda considerar dois casos exclusivos.

Caso 1: $(a < b)$. Neste caso $a + k = b$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Logo, de (1) temos que

$$ax + ay + ky + aw + az + kz = ay + ax + kx + az + aw + kw,$$

e da lei do cancelamento para a soma de números naturais, temos $k(y + z) = k(x + w)$ e usando a lei do cancelamento para o produto de números naturais não nulos, segue que $y + z = x + w$ ou ainda $(x, y) \approx (z, w)$ e isto significa que $\overline{(x, y)} = \overline{(z, w)}$.
Caso 2: $(a > b)$. Agora $b+k = a$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$, e com isto em (1) obtemos a igualdade

$$bx + kx + by + bw + kw + bz = by + ky + bx + bz + kz + bw,$$

e das leis do cancelamento segue (como no caso 1) que $y+z = x+w$ e portanto $\overline{(x, y)} = \overline{(z, w)}$.
■

3. Construção do conjunto dos números racionais

Nesta seção construiremos o corpo dos números racionais a partir do anel de integridade dos números inteiros. A ideia da construção do conjunto dos números racionais é definir um número racional como sendo o quociente entre dois números inteiros. Assim, se $q \in \mathbb{Q}$ então $q = \frac{m}{n}$ para $m, n \in \mathbb{Z}$ com $n \neq 0$. Dois problemas aqui ocorrem. Primeiro a divisão não é uma operação sobre o conjunto dos números inteiros, e então para contornar isto, o número racional q será associado a um par (m, n) com $m, n \in \mathbb{Z}$ e $n \neq 0$. A ideia é que este par represente o número $\frac{m}{n}$. O segundo problema é que, desta forma, um número raciona q pode ser escrito de muitas maneiras como quociente de dois números inteiros, e então temos que trabalhar com classes de equivalência.

Vamos aos detalhes técnicos da construção. Considerando o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, definimos a relação $\approx$ dada por

$$(a, b) \simeq (x, y) \qquad \text{se, e somente se,} \qquad ay = xb.$$

Notemos que:

i) para qualquer $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, como a multiplicação em $\mathbb{Z}$ é comutativa, $ab = ba$ e da definição da relação, segue que $(a, b) \simeq (a, b)$, para todo $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$, mostrando que $\simeq$ é reflexiva.

ii) Dados (a, b) e (c, d) em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ com $(a, b) \simeq (c, d)$, temos da definição que $ad = bc$ e como $\mathbb{Z}$ é comutativo, temos que $cb = da$, o que significa que $(c, d) \simeq (a, b)$, mostrando que $\simeq$ é simétrica.

iii) Se $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ satisfazem $(a,b)\simeq(c,d)$ e $(c,d)\simeq(e,f)$, então $ad=bd$ e $cf=de$. Assim,

$$afd = adf = bcf = bde = bed,$$

e como $d\neq 0$ então $af=be$ e da definição da relação, tem-se que $(a,b)\simeq(e,f)$, mostrando que $\simeq$ é transitiva.

Dos fatos (i), (ii) e (iii) temos que $\simeq$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, e portanto estabelece uma forma de estimar quando dois elementos deste conjunto são equivalentes.

Desta forma, $\overline{(a,b)}$ representa a classe de equivalência do elemento $(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$. Isto é, $\overline{(a,b)} = \{(x,y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*;\quad (x,y)\simeq(a,b)\}$. Note que a expressão $\overline{(a,b)}$ denota um conjunto, e não um só elemento. $\overline{(a,b)}$ é o conjunto de todos os elementos que são equivalentes ao par (a,b), pela relação de equivalência $\simeq$.

Consideremos $\frac{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*}{\simeq}$, o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas por $\simeq$, e denotemos este conjunto por $\mathbb{Q}$. Então

$$\mathbb{Q} = \left\{\overline{(a,b)};\quad a\in\mathbb{Z},\quad b\in\mathbb{Z}^*\right\}.$$

Vamos agora dotar este conjunto de duas operações e mostrar que com estas operações este conjunto tem estrutura de corpo. Observe que estas operações serão definidas exatamente como as operações usuais de soma e produto de frações no conjunto dos números reais.

Definimos em $\mathbb{Q}$ as operações $+$ e $\cdot$, chamadas respectivamente de adição e multiplicação, dadas por

$$\overline{(a,b)}+\overline{(x,y)} = \overline{(ay+bx,by)} \qquad \text{e} \qquad \overline{(a,b)}\cdot\overline{(x,y)} = \overline{(ax,by)},$$

para quaisquer $\overline{(a,b)},\overline{(x,y)}\in\mathbb{Q}$. Observe que as operações envolvidas no segundo membro de cada igualdade, são as operações definidas no conjunto $\mathbb{Z}$ e portanto satisfazem as propriedades já provadas em $\mathbb{Z}$.

Nosso primeiro trabalho é verificar que estas operações em $\mathbb{Q}$ estão bem definidas. Como estamos fazendo operações com classes de equivalência, poderíamos perguntar se ao operarmos um elemento $\overline{(a,b)}$ podemos escolher qualquer um dos representantes desta classe, isto é, se $(a,b)\simeq(x,y)$ então $\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)} = \overline{(x,y)}+\overline{(c,d)}$, qualquer que seja $\overline{(c,d)}\in\mathbb{Q}$. Vamos provar que se se $(a,b)\simeq(x,y)$ então é irrelevante usar $\overline{(a,b)}$ ou $\overline{(x,y)}$ na adição e na multiplicação.

Proposição 3.1. *As operações $+$ e $\cdot$ definidas como acima, não dependem da escolha do representante das classes.*

Demonstração: Sejam $\overline{(a,b)},\overline{(c,d)},\overline{(x,y)},\overline{(z,w)}\in\mathbb{Q}$, tais que $(a,b)\simeq(x,y)$ e $(c,d)\simeq$

(z, w). Então, da definição de $\simeq$ temos $ay = bx$ e $cw = dz$. Assim, temos

$$\begin{aligned}(ad + bc)(yw) &= (adyw) + (bcyw) = (aydw) + (bycw)\\ &= (bxdw) + (bydz) = (xwbd) + (yzbd) = (xw + yz)(bd)\end{aligned}$$

e portanto, da definição da relação, $(ad + bc, bd) \simeq (xw + yz, yw)$, isto é, $\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(x, y)} + \overline{(z, w)}$.

Para a multiplicação, temos então,

$$acyw = aycw = bxdz = bdxz,$$

donde segue da definição da relação, que $(ac, bd) \simeq (xz, yw)$, e então, $\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(x, y)} \cdot \overline{(z, w)}$. Portanto as operações $+$ e $\cdot$ não dependem do representante escolhido para cada uma das classes envolvidas.

■

Proposição 3.2. *A adição em $\mathbb{Q}$ é associativa e comutativa.*

Demonstração: Vamos mostrar que os axiomas da definição de corpo são todos satisfeitos. Dados quaisquer $\overline{(a, b)}, \overline{(x, y)}, \overline{(m, n)} \in \mathbb{Q}$, temos

$$\begin{aligned}\left(\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)}\right) + \overline{(m, n)} &= \overline{(ay + bx, by)} + \overline{(m, n)}\\ &= \overline{((ay + bx)n + bym, byn)}\\ &= \overline{(ayn + bxn + bym, byn)}\\ &= \overline{(ayn + b(xn + ym), byn)}\\ &= \overline{(a, b)} \cdot \overline{(xn + ym, yn)} = \overline{(a, b)} \cdot \left(\overline{(x, y)} \cdot \overline{(m, n)}\right),\end{aligned}$$

e também,

$$\begin{aligned}\overline{(a, b)} + \overline{(x, y)} &= \overline{(ay + bx, by)}\\ &= \overline{(xb + ya, yb)} = \overline{(x, y)} + \overline{(a, b)},\end{aligned}$$

o que mostra que $+$ é associativa e comutativa.

■

Proposição 3.3. *A adição em $\mathbb{Q}$ admite elemento neutro.*

Demonstração: Queremos agora obter $0_{\mathbb{Q}} = \overline{(x,y)}$, tal que

$$\overline{(a,b)} + \overline{(x,y)} = \overline{(x,y)} + \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)},$$

para todos $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$. Nestes termos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem satisfazer

$$\overline{(ay+bx, by)} = \overline{(a,b)},$$

ou equivalentemente

$$(ay+bx, by) \simeq (a,b).$$

Da definição da relação deve então ocorrer que

$$(ay+bx)b = bya,$$

e assim,

$$ayb + bxb = bya,$$

donde $bxb = 0$.

Mas como $b \neq 0$, então segue que $x = 0$. Deta forma, o elemento $\overline{(x,y)}$ procurado é precisamente $\overline{(x,y)} = \overline{(0,y)}$. A escolha de $y \in \mathbb{Z}^*$ é irrelevante, já que dados $y_1, y_2 \in \mathbb{Z}^*$, temos que $(0,y_1) \simeq (0,y_2)$ e portanto $\overline{(0,y_1)} = \overline{(0,y_2)}$.

Notemos então que dado qualquer $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ e $y \in \mathbb{Z}^*$, temos que

$$\overline{(a,b)} + \overline{(0,y)} = \overline{(ay + b \cdot 0, by)} = \overline{(ay,by)} = \overline{(a,b)},$$

já que $(ay,by) \simeq (a,b)$. Sendo a adição comutativa, vale também que $\overline{(a,b)} + \overline{(0,y)} = \overline{(0,y)} + \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}$. Segue portanto que $0_{\mathbb{Q}} = \overline{(0,y)}$ é o elemento neutro para a adição em $\mathbb{Q}$, qualquer que seja $y \in \mathbb{Z}^*$. Observe ainda que

$$\overline{(x,y)} = 0_{\mathbb{Q}} \qquad \text{se e somente se} \qquad x = 0.$$

■

Deste ponto em diante usaremos apenas o símbolo 0 para designar o elemento neutro $0_{\mathbb{Q}}$ e chamaremos este elemento de zero.

Proposição 3.4. *Todo elemento de $\mathbb{Q}$ admite simétrico para a operação de adição.*

Demonstração: Dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ arbitrário, queremos agora obter $-\overline{(a,b)} = \overline{(x,y)} \in \mathbb{Q}$, de forma que

$$\overline{(a,b)} + \overline{(x,y)} = \overline{(x,y)} + \overline{(a,b)} = 0 = \overline{(0,n)},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}^*$. Os elementos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem então satisfazer

$$\overline{(ay + bx, by)} = \overline{(0,n)},$$

ou ainda,

$$(ay + bx, by) \simeq (0,n),$$

e da definição da relação,

$$(ay + bx)n = by \cdot 0 = 0.$$

Como $n \neq 0$ então temos que $ay + bx = 0$ ou ainda $xb = bx = -(ay) = (-a)y$, e da definição da relação $(x,y) \simeq (-a,b)$ e portanto $\overline{(x,y)} = \overline{(-a,b)} \in \mathbb{Q}$. O elemento $\overline{(-a,b)}$ cumpre portanto a igualdade

$$\overline{(a,b)} + \overline{(-a,b)} = \overline{(-a,b)} + \overline{(a,b)} = \overline{(0,bb)} = 0,$$

donde todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ é simetrizável sendo o seu simétrico o elemento $-\overline{(a,b)} = \overline{(-a,b)}$. Podemos ver também que $\overline{(-a,b)} = \overline{(a,-b)}$, já que $(-a,b) \simeq (a,-b)$ e portanto

$$-\overline{(a,b)} = \overline{(-a,b)} = \overline{(a,-b)},$$

qualquer que seja $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$.

■

Proposição 3.5. *A multiplicação em $\mathbb{Q}$ é associativa, comutativa e distributiva em relação à adição.*

Demonstração: Sejam $\overline{(a,b)}, \overline{(x,y)}, \overline{(m,n)} \in \mathbb{Q}$ arbitrários. Então

$$\begin{aligned}\left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)}\right) \cdot \overline{(m,n)} &= \overline{(ax,by)} \cdot \overline{(m,n)} \\ &= \overline{((ax)m,(by)n)} \\ &= \overline{(a(xm),b(yn))} \\ &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(xm,yn)} = \overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(x,y)} \cdot \overline{(m,n)}\right),\end{aligned}$$

e também,

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(ax,by)} = \overline{(xa,yb)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(a,b)},$$

mostrando que $\cdot$ é também associativa e comutativa. Para a distributividade, temos que

$$\begin{aligned}
\overline{(a,b)} \cdot \left(\overline{(x,y)} + \overline{(m,n)}\right) &= \overline{(a,b)} \cdot \overline{(xn+ym,yn)} \\
&= \overline{(a(xn+ym),b(yn))} \\
&= \overline{(axn+aym,byn)} \\
&= \overline{(b(axn+aym),bbyn)} \\
&= \overline{(axbn+byam,(by)(bn))} \\
&= \overline{(ax,by)} + \overline{(am,bn)} \\
&= \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)}\right) + \left(\overline{(a,b)} \cdot \overline{(m,n)}\right),
\end{aligned}$$

donde a multiplicação é distributiva em relação à adição pela esquerda. Também vale a distributividade pela direita em virtude da comutatividade da multiplicação. Segue que $\cdot$ é distributiva em relação a $+$.

■

Proposição 3.6. *A multiplicação admite elemento neutro em $\mathbb{Q}$.*

Demonstração: Para mostrar que $\mathbb{Q}$ possui elemento neutro para a multiplicação, queremos obter $1_{\mathbb{Q}} = \overline{(x,y)} \in \mathbb{Q}$ de forma que

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)},$$

para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$. Os elementos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem então satisfzer

$$\overline{(ax,by)} = \overline{(a,b)},$$

e portanto

$$(ax,by) \simeq (a,b),$$

e da definição da relação segue que $axb = bya$. Como $b \neq 0$ segue que $ax = ya$, e novamente da definição da relação $(x,y) \simeq (a,a)$ donde $\overline{(x,y)} = \overline{(a,a)}$. Evidentemente esta escolha para $\overline{(x,y)}$ só pode ser feita quando $a \neq 0$.

O caso em que $a = 0$ não afeta a procura por $\overline{(x,y)}$ já que no caso em que $a = 0$, então $\overline{(0,by)} = \overline{(0,y)}$, já que $(0,by) \simeq (0,y)$, e desta forma é imediato que

$$\overline{(0,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(0 \cdot x,by)} = \overline{(0,by)} = \overline{(0,y)},$$

para qualquer escolha de $\overline{(x,y)}$.

Desta forma, para qualquer $n \in \mathbb{Z}^*$ podemos verificar que $\overline{(n,n)} \in \mathbb{Q}$ cumpre

$$(an, bn) \simeq (a, b),$$

e portanto

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(n,n)} = \overline{(an,bn)} = \overline{(a,b)},$$

para todo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$. Da comutatividade da multiplicação, segue também que $\overline{(n,n)} \cdot \overline{(a,b)} = \overline{(a,b)}$. Portanto o elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{Q}$ é o elemento $1_{\mathbb{Q}} = \overline{(n,n)}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}^*$.

■

O elemento neutro para a multiplicação em $\mathbb{Q}$, representado por $1_{\mathbb{Q}}$, será representado apenas por 1 e chamado de unidade de $\mathbb{Q}$.

Proposição 3.7. *Todo elemento não nulo de $\mathbb{Q}$ admite simétrico para a multiplicação.*

Demonstração: Consideremos $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ com $\overline{(a,b)} \neq 0$ e portanto $a \neq 0$. Queremos obter $\overline{(a,b)}^{-1} = \overline{(x,y)} \in \mathbb{Q}$ de forma que

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(x,y)} = \overline{(x,y)} \cdot \overline{(a,b)} = 1 = \overline{(n,n)},$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}^*$. Os elementos $x, y \in \mathbb{Z}$ devem então satisfazer

$$\overline{(ax,by)} = \overline{(n,n)},$$

ou ainda

$$(ax, by) \simeq (n, n),$$

e da definição da relação temos que $axn = byn$. Como $n \neq 0$ então segue que $ax = by$, e da definição da relação $(x,y) \simeq (b,a)$. Desta forma,

$$\overline{(x,y)} = \overline{(b,a)},$$

e como $a \neq 0$, então $\overline{(b,a)} \in \mathbb{Q}$. Podemos então ver que dado $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ com $a \neq 0$, então $\overline{(b,a)} \in \mathbb{Q}$ cumpre

$$\overline{(a,b)} \cdot \overline{(b,a)} = \overline{(ab,ba)} = 1.$$

Da comutatividade da operação $\cdot$ temos também que $\overline{(b,a)} \cdot \overline{(a,b)} = 1$. Segue que todo elemento não nulo $\overline{(a,b)} \in \mathbb{Q}$ admite simétrico para a operação de multiplicação, sendo $\overline{(b,a)} \in \mathbb{Q}$ o inverso, isto é, $\overline{(a,b)}^{-1} = \overline{(b,a)}$.

■

O elemento $\overline{(a,b)}^{-1} = \overline{(b,a)}$, será chamado de inverso do elemento não nulo $\overline{(a,b)} \neq 0$.

Decorre portanto, que $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ tem estrutura de corpo. O corpo $\mathbb{Q}$ é então chamado de corpo dos números racionais.

Conclusões

Como prentendido, construímos o conjunto dos números inteiros mostrando que é um anel de integridade e o conjunto dos números racionais mostrando que é um corpo.

Embora tenhamos considerado o conjunto dos números naturais, cabe ressaltar que é possível construir este conjunto também a partir dos chamados Axiomas de Peano. O leitor interessado nesta construção pode consultar (SAH, 1967). Outras construções sobre os conjuntos dos números inteiros e dos números racionais podem ainda ser feitas, como por exemplo, a construção de uma relação de ordem nestes conjuntos. O passo seguinte deste processo é a construção do corpo dos número reais, que pode ser construido de várias maneiras. Para a construção do conjunto dos números reais pelo método das sequências de Cauchy recomendamos (MONTEIRO, 1978), pelo método dos Cortes de Dedekind recomendamos (GUIDORIZZI, 2001) e pelo método dos Quase-Homomorfismos recomendamos (STREET, 1985). Pode-se ainda avançar com a construção do corpo dos números complexos e depois do conjunto dos quatérnios. Sobre o conjunto dos quatérnios recomendamos (GUZZO SANDRO M. & TOSTI, 2017).

Referências

1 DOMINGUES HYGINO H. & IEZZI, Gelson. **Álgebra Moderna**. 2. ed. São Paulo: Editora Atual, 1982. P. 283.

2 GUIDORIZZI, Hamilton L. **Um curso de cálculo. Volume 1.** 5. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2001. P. 635.

3 GUZZO SANDRO M. & TOSTI, Naísa C. G. Funções elementares no conjunto dos quatérnios: Abordagem por série de potências. **Jeepema - Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática**, v. 1, n. 1, p. 44–98, 2017.

4 MONTEIRO, L. H. Jacy. **Elementos de Álgebra**. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1978. P. 552.

5 SAH, Chih-Han. **Abstract algebra**. 1. ed. New York: Academic Press, 1967. P. 342.

6 STREET, Ross. An efficient construction of the real numbers. **Gazette of the Australian Mathematical Society**, v. 12, n. 12, p. 57–58, 1985.