J Jornal Eletrônico de Ensino e Pesquisa de Matemática
(1s.) **v. 6** 1 (2022): 1–15. ©Jeepema–ISSN-2594-6323.
www.dma.uem.br/kit/jeepema

Aplicação de Aritmética Modular no Calendário

Laerte Bemm – Email: lbemm2@uem.br
Guilherme Liegel Leopold
Priscila C. F. de Jesus Bemm

Resumo: Neste trabalho deduzimos uma fórmula que permite determinar o dia da semana de qualquer data a partir de 1º de Março de 1600.
Palavras-chave: Congruência, Aritmética Modular, Calendário Gregoriano, Ano Bissexto

1. Introdução

Compreender e aplicar os conceitos matemáticos é de extrema relevância para o sucesso do processo de aprendizagem em matemática. Tal compreensão auxilia na estruturação do raciocínio e contribui para o desenvolvimento de processos que transcendem o âmbito da própria Matemática. Assimilar conceitos de maneira significativa é fator preponderante para conferir ao indivíduo a possibilidade de interpretar situações do cotidiano, fazendo da matemática uma ferramenta de suporte ao pensamento humano.

Uma dessas ferramentas, é a aritmética modular, a qual é aplicada diariamente pelas pessoas sem que elas saibam disso. Por exemplo, horas do dia, dias da semana, meses do ano, etc. Ela está diretamente associada com o cálculo do resto da divisão de números inteiros. A determinação do resto de uma divisão de dois números inteiros, e suas aplicações, vão desde a simples abordagem de conceitos de divisibilidade a aplicações mais elaboradas, empregadas em programas computacionais avançados.

Umas das aplicações é a possibilidade de determinação do dia da semana de qualquer data a partir de 1º de Março de 1600. Há sites que fazem essa determinação, veja [1], por exemplo. As planilhas eletrônicas, tipo Excel, Google Sheets, etc, tem funções que retornam o dia da semana de qualquer data a partir de 1º de janeiro de 1900. Sendo assim, surge a questão: qual é o algoritmo ou a fórmula utilizada para essa determinação? Nosso objetivo é responder essa pergunta. Veremos que o algoritmo (fórmula) é simples. Porém, o processo de dedução não é trivial e nós o apresentaremos mais adiante.

Para tanto, dedicamos a primeira seção a abordagem do conceito de congruência, propriedades e exemplos que servirão de base para, fundamentar a aplicação em cálculos envolvendo o calendário na segunda seção. Nela faremos uma apresentação histórica para compreender não apenas as mudanças de calendários, mas também e, essencialmente, o nosso calendário atual mundialmente utilizado, o calendário gregoriano, desde sua concepção, até os conceitos matemáticos utilizados para determinação dos anos bissextos. Ressalta-se aqui a construção de uma "fórmula matemática" que possibilita fazer estes cálculos de maneira simples e eficiente.

2. Definições e Resultados

Nessa seção, vamos estabelecer alguns conceitos e resultados da aritmética modular que nos serão úteis para o desenvolvimento do trabalho. Em geral não apresentamos as demonstrações destes resultados, mas tomamos o cuidado de sempre indicar uma bibliografia na qual o leitor interessado poderá obtê-las. As notações aqui usadas são as clássicas e encontradas na maioria dos livros relacionados ao tema, tais como (HEFEZ, 2011), (GHIORZI, s.d.) e (ROSEN, 2001).

Vamos denotar por $\mathbb{Z}$ o conjunto dos números inteiros e $\mathbb{Z}_+$ o conjuntos dos números inteiros não negativos.

Definição 2.1 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a divide b se existir $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot k$. Se a divide b, diremos também que a é um divisor ou um fator de b ou, ainda que b é um múltiplo de a.*

Quando a divide b escrevemos $a \mid b$, enquanto a negação desta sentença é representada por $a \nmid b$. Desta forma $a \nmid b$ se, e somente se, $b \neq a \cdot k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

Vamos supor que $a \mid b$ com $a \neq 0$ e seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $b = a \cdot k$. O número inteiro k é único e chamado de *quociente* de b por a e usaremos a notação $k = \dfrac{b}{a}$ para indicar tal inteiro. Em contrapartida, $0 \mid b$ se, e somente se, $b = 0$. Nesse caso, o quociente não é único, pois $0 = 0 \cdot k$, para todo $k \in \mathbb{Z}$. Desta forma, o quociente $\dfrac{0}{0}$ é indeterminado. Por isso, vamos excluir o caso com divisor nulo e adotar esta convenção daqui em diante.

Se a e b são inteiros e b não divide a, é possível empregarmos um método que possibilite executar a "divisão"de a por b, obtendo-se um resto.

Teorema 2.2 *((MILIES, 2001), Teorema 2.1.6)* ***(Algoritmo da Divisão).*** *Se $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$, então existem dois únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$a = b \cdot q + r,$$

com $0 \leq r < |b|$.

Os números q e r são chamados, respectivamente, de *quociente* e *resto* da divisão de a por b. Observemos que o resto da divisão de a por b é zero se, e somente se, $b \mid a$.

Definição 2.3 *Sejam a, b e $m \in \mathbb{Z}$, tal que $m \neq 0$. Dizemos que a é congruente a b módulo m, se a e b tem o mesmo resto quando divididos por m.*

Se a é congruente a b módulo m, escrevemos $a \equiv b \, (mod \, m)$. Se a e b não são congruentes módulo m, diremos que a e b são *incongruentes* módulo m e escrevemos $a \not\equiv b \, (mod \, m)$.

Exemplo 2.4 *Consideremos o mês de Outubro de 2014:*

Domingo	*Segunda*	*Terça*	*Quarta*	*Quinta*	*Sexta*	*Sábado*
			1	*2*	*3*	*4*
5	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*
12	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*
19	*20*	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*
26	*27*	*28*	*29*	*30*	*31*	

Como podemos notar, em cada coluna (dia da semana) encontramos os números congruentes entre si módulo 7. Na coluna do domingo encontramos os números congruentes a 5; na segunda, os congruentes a 6; na terça, a 7; na quarta, a 1; na quinta, a 2; na sexta, a 3 e no sábado, a 4 módulo 7.

Agora, como 31 de outubro de 2014 é sexta-feira, 1º de novembro de 2014 é sábado, dia 2 é domingo, dia 3 é segunda-feira, dia 4 é terça-feira, dia 5 é quinta-feira, dia 6 é sexta-feira e dia 7 é um sábado. Como saber o dia da semana correspondente a 24 de novembro de 2014?

Basta procurarmos um número entre 1 e 7 que seja congruente a 24 módulo 7. Para isto dividimos 24 por 7 e obtemos $24 = 7 \cdot 3 + 3$. Achamos resto igual a 3, isto é, $24 \equiv 3 \, (mod \, 7)$. Como 3 de novembro de 2014 corresponde a segunda-feira, pois dia 1º foi sábado, concluímos que o dia 24 de novembro de 2014 foi uma segunda-feira.

Proposição 2.5 *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, então $a \equiv b \, (mod \, m)$ se, e somente se, $m|(a - b)$, ou seja, existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $a = b + k \cdot m$.*

Observação 2.6 *Pela proposição anterior e pelo fato de que $m \mid (a - b)$ se e somente se $|m| \mid (a - b)$, podemos nos restringir ao estudo de congruências módulo $m > 0$.*

As seguintes propriedades são bem conhecidas e serão utilizadas repetidas vezes no decorrer no texto.

Proposição 2.7 *Sejam $a, b, c, m \in \mathbb{Z}$ tais que $m > 0$. Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(i) *Reflexiva:* $a \equiv a \pmod{m}$;

(ii) *Simétrica: se* $a \equiv b \pmod{m}$, *então* $b \equiv a \pmod{m}$;

(iii) *Transitiva: se* $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $b \equiv c \pmod{m}$, *então* $a \equiv c \pmod{m}$.

Mais ainda, se $a \equiv b \pmod{m}$ *e* $c \equiv d \pmod{m}$, *então*

(iv) $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$;

(v) $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.

3. Calendário

Há indícios de que o homem pré-histórico usou de diversas técnicas para contar o tempo, como pinturas ou ranhuras em cavernas, evoluindo-as até a criação do calendário, que nada mais é do que um sistema para contagem e agrupamento de dias, visando atender as necessidades civis e religiosas de uma cultura.

O primeiro calendário foi inventado pelos Sumérios, na Mesopotâmia, por volta de 2700 a.C. tendo sido posteriormente melhorado pelos Caldeus. Este calendário era constituído de 12 meses lunares com 29 ou 30 dias. Cada mês se iniciava na lua nova, o que totalizava 354 dias no ano, e o tornava mais curto do que o calendário solar, criado pelos egípcios por volta de 2500 a.C. Os Caldeus o corrigiam, acrescentando um mês a cada três anos.

As diversas civilizações ao redor do mundo criaram diferentes calendários, baseados em suas crenças e conhecimentos. Atualmente, o Calendário Gregoriano é utilizado no mundo todo para demarcar o ano civil. Ele foi instituído pelo Papa Gregório XIII em 24 de fevereiro de 1582 e sua composição é resultado de uma reformulação do Calendário Juliano, implantado pelos romanos.

O Calendário Gregoriano é solar, ou seja, baseado no movimento da Terra em torno do Sol, que tem a duração de 365 dias, 5 horas, 48 minutos e 47 segundos, o que equivale $365 + \dfrac{97}{400} = 365,2425$ dias. A contagem do tempo no Calendário Gregoriano é feita em dias, agrupados em 12 meses. Os meses são constituídos por 30 ou 31 dias, com exceção de fevereiro, que é constituído por 28 ou 29 dias.

A ocorrência de 29 dias no mês de fevereiro se dá pois, como instrumento de uso prático, o calendário adota a quantidade exata de 365 dias para o período de um ano, ou seja, período de tempo menor do que a duração de uma volta completa da Terra em torno do Sol. Temos, então, que esta diferença, equivalente a 0,2425 dia, quando multiplicada por 4 resulta em 0,97 dia. Daí, faz-se, a cada 4 anos, o acréscimo de 1 dia no mês de fevereiro, o que corresponde ao chamado ano bissexto com 366 dias. Todavia, essa alteração provoca uma nova discrepância, de +0,03 dia por ano. Para corrigi-la, estabeleceu-se as seguintes regras:

- ano múltiplo de 4 é bissexto;
- ano múltiplo de 100 e não múltiplo de 400, não é bissexto;
- ano múltiplo de 400, é bissexto.

Tais regras se justificam pois,

$$0,2425 = \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400}.$$

Desta forma, os anos 2008, 2012, 2016, 2020, 2024 e 2028 são bissextos, pois são múltiplos de 4 e não são múltiplos de 100. Os anos 1700, 1800 e 1900 não são bissextos, pois são múltiplos de 100 e não são múltiplos de 400. Finalmente, os anos 1600, 2000, 2400 e 2800 são bissextos, pois são múltiplos de 400.

3.1. Calendário e Congruência

Antes de relacionarmos o Calendário com Congruência, vamos estabelecer (de maneira totalmente aleatória) que cada dia da semana corresponde a um determinado número entre 0 e 6, conforme quadro abaixo.

Dia da Semana	Número Associado
Quarta-feira	0
Quinta-feira	1
Sexta-feira	2
Sábado	3
Domingo	4
Segunda-feira	5
Terça-feira	6

(Quadro I)

O que pretendemos nesse artigo é mostrar que sempre é possível descobrir o dia da semana de qualquer data, a partir de 1600, aplicando conceitos de congruência.

Antes disso, faremos alguns ajustes técnicos na ordem nos meses. Ordenaremos os meses do ano da seguinte forma: Março será o $1^{\underline{o}}$ mês, Abril o $2^{\underline{o}}$, Maio o $3^{\underline{o}}$, e assim sucessivamente.

Desta forma, Janeiro e Fevereiro, serão considerados o $11^{\underline{o}}$ e o $12^{\underline{o}}$ meses do ano anterior, respectivamente. Isso se deve ao fato de Fevereiro ter 29 dias nos anos bissextos e nos outros anos apenas 28 dias.

Assim, por exemplo, Fevereiro de 2015 será considerado como $12^{\underline{o}}$ mês de 2014, e Junho de 2015, será considerado $4^{\underline{o}}$ mês de 2015.

Com base nestes ajustes, vamos utilizar $1^{\underline{o}}$ de Março de 1600 como data inicial, ou seja, iremos determinar o dia da semana de qualquer data posterior a $1^{\underline{o}}$ de Março de 1600.

Seja $X_N \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ o número que representa o dia da semana de $1^{\underline{o}}$ de Março no ano N, conforme o Quadro I. Por exemplo, quando $N = 2022$, temos $X_{2022} = 6$, pois $1^{\underline{o}}$ de Março de 2022 foi terça-feira.

Observe que se o ano N não é bissexto, então $1^{\underline{o}}$ de Março do ano $N-1$ e $1^{\underline{o}}$ de Março do ano N tem um deslocamento de 1 dia em relação aos dias da semana. Isso se deve, pois todo ano que não é bissexto, possui 365 dias e $365 \equiv 1\,(mod\,7)$. Concluímos que,

$$X_N \equiv X_{N-1} + 1\,(mod\,7),$$

sempre que N não é bissexto.

Por outro lado, se N é um ano bissexto, então $1^{\underline{o}}$ de Março do ano $N-1$ e $1^{\underline{o}}$ de Março do ano N tem um deslocamento de 2 dias em relação aos dias da semana, pois o ano bissexto possui 366 dias e $366 \equiv 2\,(mod\,7)$. Portanto, $X_N \equiv X_{N-1} + 2\,(mod\,7)$, quando N for ano bissexto.

Vamos iniciar determinando o dia da semana de $1^{\underline{o}}$ de Março de qualquer ano N, com $N \geq 1600$. Para isto, precisamos determinar quantos anos se passaram de 1600 até N e quantos anos bissextos há nesse intervalo.

Seja $A = N - 1600$ a quantidade de anos que se passaram de 1600 até o ano N. Com isso, podemos determinar os deslocamentos nos dias da semana.

Sejam $\left[\dfrac{A}{4}\right]$, $\left[\dfrac{A}{100}\right]$ e $\left[\dfrac{A}{400}\right]$ os quocientes das divisões de A por $4, 100$ e 400, respectivamente. Então,

$$B = \left[\frac{A}{4}\right] - \left[\frac{A}{100}\right] + \left[\frac{A}{400}\right],$$

é a quantidade de anos bissextos entre 1600 e N.

Como cada um dos A anos deslocam $1^{\underline{o}}$ de Março em um dia na semana e cada um dos B anos bissextos deslocam um dia a mais na semana, podemos concluir que

$$X_N \equiv (X_{1600} + A + B)\,(mod\,7). \tag{1}$$

Exemplo 3.1 *Vamos determinar que dia da semana foi 1º de Março de 1600.*

Como 1º de Março de 2022 foi uma terça-feira, temos que $X_{2022} = 6$ *conforme o Quadro I. Além disso,*

$$A = 2022 - 1600 = 422 \text{ e } B = \left[\frac{422}{4}\right] - \left[\frac{422}{100}\right] + \left[\frac{422}{400}\right] = 105 - 4 + 1 = 102.$$

Substituindo em (1) temos

$$6 \equiv (X_{1600} + 422 + 102)\,(mod\,7) \Longleftrightarrow -518 \equiv X_{1600}\,(mod\,7) \Longleftrightarrow 0 \equiv X_{1600}\,(mod\,7).$$

Como $X_{1600} \in \{0, 1, \ldots, 6\}$ *segue que* $X_{1600} = 0$*, ou seja, 1º de Março de 1600 foi uma quarta-feira.*

Observação 3.2 *1. Como* $X_{1600} = 0$*, segue que*

$$X_N \equiv (A + B)\,(mod\,7). \tag{2}$$

2. Embora a numeração do Quadro I possa ser aleatória, nós escolhemos de modo a X_{1600} *ser igual a zero, pois dessa forma simplificamos a equação (1).*

Até este momento, conseguimos determinar o dia da semana de 1º de Março de qualquer ano. Nosso próximo passo é determinar o dia da semana de um dia qualquer de Março de um ano $N \geq 1600$ qualquer.

Seja y o dia de Março do ano N escolhido para determinarmos o correspondente dia da semana e seja $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ o número que representa este dia da semana, conforme o Quadro I. Por exemplo, se $y = 19$ e $N = 2022$, então $X = 3$. Vamos deduzir uma maneira de determinar X.

Afirmação:

$$(X - X_N) \equiv y - 1\,(mod\,7). \tag{3}$$

De fato, note que $y \in \{1, 2, 3, \ldots, 30, 31\}$.

- Se $y = 1, 8, 15, 22$ ou 29, então y de Março do ano N e 1º de Março do ano N correspondem ao mesmo dia da semana. Daí $X - X_N = 0$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1\,(mod\,7)$.

- Se $y = 2, 9, 16, 23$ ou 30, então y de Março do ano N e 1º de Março do ano N diferem de 1 em relação aos dias da semana. Daí, $X - X_N = 1$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \,(mod\, 7)$.
- Se $y = 3, 10, 17, 24$ ou 31, então y de Março do ano N e 1º de Março do ano N diferem de 2 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 2$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \,(mod\, 7)$.
- Se $y = 4, 11, 18$ ou 25, então y de Março do ano N e 1º de Março do ano N diferem de 3 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 3$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \,(mod\, 7)$.
- Se $C = 5, 12, 19$ ou 26, então y de Março do ano N e 1º de Março do ano N diferem de 4 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 4$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \,(mod\, 7)$.
- Se $y = 6, 13, 20$ ou 27, então y de Março do ano N e 1º de Março do ano N diferem de 5 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 5$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \,(mod\, 7)$.
- Se $y = 7, 14, 21$ ou 28, então y de Março do ano N e 1º de Março do ano N diferem de 6 em relação aos dias da semana. Daí $X - X_N = 6$, ou seja, $(X - X_N) \equiv y - 1 \,(mod\, 7)$.

Essa análise mostra que nossa afirmação é verdadeira.

Somando membro a membro as equações (2) e (3), (veja Proposição 2.7 (*iv*)), temos que

$$X \equiv (A + B + y - 1) \,(mod\, 7). \tag{4}$$

Com esta fórmula, podemos determinar o dia da semana de qualquer dia de Março de qualquer ano $N \geq 1600$.

Exemplo 3.3 *Vamos determinar que dia da semana corresponde ao dia 28 de março de 2000.*

Nesse caso, temos:

$$\begin{aligned}
&A = 2000 - 1600 = 400;\\
&B = \left[\frac{400}{4}\right] - \left[\frac{400}{100}\right] + \left[\frac{400}{400}\right] = 100 - 4 + 1 = 97;\\
&y = 28.
\end{aligned}$$

Então, pela equação (4), temos

$$X \equiv (400 + 97 + 27)\, mod\, 7 \Longleftrightarrow X \equiv 524\, mod\, 7 \Longleftrightarrow X \equiv 6\, mod\, 7.$$

Logo, $X = 6$ e o dia 28 de março de 2000 foi terça-feira.

Finalmente, vamos determinar o dia da semana para qualquer data a partir de 1º de Março de 1600.

Se todos os meses do ano tivessem exatamente 28 dias, então todos os meses do ano se iniciariam no mesmo dia da semana, pois 28 é divisível por 7. Ocorre que nos anos não bissextos, há meses com 28, 30 ou 31 dias, o que gera um deslocamento nos dias da semana.

Consideremos um dia y de um mês M do ano N a partir de 1º de Março de 1600. Seja $W \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ o número que representa o dia da semana, conforme Quadro I.

Como antes X, representa o dia da semana de qualquer data de março do ano N.

Sabendo que março, mês anterior a abril, possui 31 dias, e $31 \equiv 3\,(mod\,7)$, segue que estes 3 dias deslocarão os dias da semana de abril em 3 unidades, em relação a março. Logo, para y de **abril** de N, temos

$$W \equiv (X+3)\,(mod\,7).$$

Já que abril possui 30 dias, e $30 \equiv 2\,(mod\,7)$, segue que estes 2 dias, somados com os 3 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de maio em 5 unidades, em relação a março. Logo, para y de **maio** de N, temos

$$W \equiv (X+5)\,(mod\,7).$$

Agora, maio possui 31 dias, e $31 \equiv 3\,(mod\,7)$. Então, estes 3 dias, somados com os 5 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de junho em 8 unidades, em relação a março. Logo, para y de junho, temos $W \equiv (X+8)\,(mod\,7)$. Como $8 \equiv 1\,(mod\,7)$, temos que para y de **junho** de N,

$$W \equiv (X+1)\,(mod\,7).$$

Como junho possui 30 dias, e $30 \equiv 2\,(mod\,7)$, segue que estes 2 dias, somados com 1 dia acumulado no mês anterior, deslocarão os dias da semana de julho em 3 unidades, em relação a março. Logo, para y de **julho** de N,

$$W \equiv (X+3)\,(mod\,7).$$

Sabendo que julho possui 31 dias, e $31 \equiv 3\,(mod\,7)$, segue que estes 3 dias, somados com os 3 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de agosto em 6 unidades, em relação a março. Logo, para y de de **agosto** de N,

$$W \equiv (X+6)\,(mod\,7).$$

Uma vez que agosto possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \, (mod \, 7)$, segue que estes 3 dias, somados com os 6 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de setembro em 9 unidades, em relação a março. Logo, para y de setembro de N, $W \equiv (X + 9) \, (mod \, 7)$. Como $9 \equiv 2 \, (mod \, 7)$, temos que

$$W \equiv (X + 2) \, (mod \, 7).$$

Setembro possui 30 dias, e $30 \equiv 2 \, (mod \, 7)$. Segue que estes 2 dias, somados com os 2 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de outubro em 4 unidades, em relação a março. Logo, para y **outubro** de N,

$$W \equiv (X + 4) \, (mod \, 7).$$

Sabendo que outubro possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \, (mod \, 7)$, segue que estes 3 dias, somados com os 4 dias acumulados no mês anterior, deslocarão os dias da semana de novembro em 7 unidades, em relação a março. Logo, para y de **novembro** de N, $W \equiv (X + 7) \, (mod \, 7)$. Como $7 \equiv 0 \, (mod \, 7)$, temos que

$$W \equiv (X + 0) \, (mod \, 7).$$

Como novembro possui 30 dias, e $30 \equiv 2 \, (mod \, 7)$ e como o mês anterior não produziu deslocamento, segue que estes 2 dias deslocarão os dias da semana de dezembro em 2 unidades, em relação a março. Logo, para y de **dezembro** de N,

$$W \equiv (X + 2) \, (mod \, 7).$$

Vamos relembrar que mudamos a ordem dos meses. Portanto, janeiro é considerado mês após dezembro. Desta forma, sabendo que dezembro possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \, (mod \, 7)$, segue que estes 3 dias, somados com os 2 dias acumulados no mês "anterior", deslocarão os dias da semana de janeiro em 5 unidades, em relação a março do ano anterior. Logo, para y de **janeiro**,

$$W \equiv (X + 5) \, (mod \, 7).$$

Sabendo que janeiro possui 31 dias, e $31 \equiv 3 \, (mod \, 7)$, segue que estes 3 dias, somados com os 5 dias acumulados no mês anterior deslocarão os dias da semana de fevereiro em 8 unidades, em relação a março do ano anterior. Logo, para y de **fevereiro**, $W \equiv (X + 8) \, (mod \, 7)$. Como $8 \equiv 1 \, (mod \, 7)$, temos que

$$W \equiv (X + 1) \, (mod \, 7).$$

E finalmente, sabendo que para anos não bissextos, fevereiro possui 28 dias e $28 \equiv$

$0\,(mod\,7)$, segue que o mês de março vai acumular 1 dia. Entretanto, este acúmulo já é calculado no valor de $A = N - 1600$. Vale observar que para os meses de janeiro e fevereiro do ano N, temos $A = N - 1 - 1600$, pois esses são considerados meses do ano anterior, a saber do ano $N - 1$.

Com base nisso, se denotarmos por D o deslocamento cumulativo dos dias da semana, mês a mês, (em relação a março) obtemos o seguinte quadro:

Mês	D	Mês	D
Março	0	Setembro	2
Abril	3	Outubro	4
Maio	5	Novembro	0
Junho	1	Dezembro	2
Julho	3	Janeiro	5
Agosto	6	Fevereiro	1

(Quadro II)

Desta forma, $W \equiv (X + D)\,(mod\,7)$. Disso e de (4) obtemos

$$W \equiv (A + B + y - 1 + D)\,(mod\,7). \tag{5}$$

Exemplo 3.4 *Vamos determinar o dia da semana que nasceu o matemático Johann Carl Friedrich Gauss: 30 de Abril de 1777.*

Temos:

$$\begin{aligned}
&A = 1777 - 1600 = 177;\\
&B = \left[\frac{177}{4}\right] - \left[\frac{177}{100}\right] + \left[\frac{177}{400}\right] = 44 - 1 + 0 = 43;\\
&y = 30;\\
&D = 3,\ \textit{pois o mês é abril (ver Quadro II).}
\end{aligned}$$

Então,

$$W \equiv (177 + 43 + 29 + 3)\,(mod\,7) \Longleftrightarrow W \equiv 252\,(mod\,7) \Longleftrightarrow W \equiv 0\,(mod\,7).$$

Logo, $W = 0$ e concluímos que o dia 30 de abril de 1777 foi quarta-feira.

Verificando no calendário de 1777 (abaixo), observamos que 30 de Abril de 1777 é, realmente, quarta-feira.

CALENDÁRIO (ABRIL DE 1777)

Domingo	*Segunda*	*Terça*	*Quarta*	*Quinta*	*Sexta*	*Sábado*
		1	*2*	*3*	*4*	*5*
6	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
13	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*
20	*21*	*22*	*23*	*24*	*25*	*26*
27	*28*	*29*	*30*			

Disponível em: http://ghiorzi.org/caleperp.htm. Acessado em 03/03/2022 às 15:30

Exemplo 3.5 *Vamos determinar em que dia da semana foi 15 de Novembro de 1889, data da Proclamação da República Brasileira.*

Temos:

$$A = 1889 - 1600 = 289;$$
$$B = \left[\frac{289}{4}\right] - \left[\frac{289}{100}\right] + \left[\frac{289}{400}\right] = 72 - 2 + 0 = 70;$$
$$y = 15;$$
$$D = 0, \text{ pois o mês é novembro (ver Quadro II).}$$

Então,

$$W \equiv (289 + 70 + 14 + 0)\,(mod\,7) \Longleftrightarrow W \equiv 2\,(mod\,7).$$

Logo, $W = 2$ *e concluímos que a república brasileira foi proclamada numa sexta-feira.*

Verificando no calendário de 1889 (abaixo), observamos que 15 de Novembro de 1889 é, realmente, sexta-feira.

CALENDÁRIO (NOVEMBRO DE 1889)

Domingo	*Segunda*	*Terça*	*Quarta*	*Quinta*	*Sexta*	*Sábado*
					1	*2*
3	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
10	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*
17	*18*	*19*	*20*	*21*	*22*	*23*
24	*25*	*26*	*27*	*28*	*29*	*30*

Disponível em: http://ghiorzi.org/caleperp.htm. Acessado em 03/03/2022 às 15:30

Exemplo 3.6 *Vamos determinar que dia da semana foi 8 de Janeiro de 1942, nascimento de Stephen William Hawking.*

Temos:

$A = 1941 - 1600 = 341,$ *pois janeiro de 1942 consideramos como o 11º mês de 1941*;
$B = \left[\dfrac{341}{4}\right] - \left[\dfrac{341}{100}\right] + \left[\dfrac{341}{400}\right] = 85 - 3 + 0 = 82;$
$y = 8;$
$D = 5,$ *pois o mês é janeiro (ver Quadro II).*

Então,

$$W \equiv (341 + 82 + 7 + 5)\,(mod\,7) \Longleftrightarrow W \equiv 1\,(mod\,7).$$

Logo, $W = 1$ *e com isso concluímos que Stephen Hawking nasceu numa quinta-feira.*

Exemplo 3.7 *Vamos determinar que dia da semana será 28 de Fevereiro de 2100.*

Temos:

$A = 2099 - 1600 = 499,$ *pois fevereiro consideramos como o 12º mês de 2099*;
$B = \left[\dfrac{499}{4}\right] - \left[\dfrac{499}{100}\right] + \left[\dfrac{499}{400}\right] = 124 - 4 + 1 = 121;$
$y = 28;$
$D = 1,$ *pois o mês é fevereiro (ver Quadro II).*

Então,

$$W \equiv (499 + 121 + 27 + 1)\,(mod\,7) \Longleftrightarrow W \equiv 4\,(mod\,7).$$

Logo, $W = 4$ *e o dia 28 de Fevereiro de 2100 será domingo.*

Para finalizar, apresentamos um programa feito em Python que determina o dia da semana de uma data qualquer a partir de 1º de março de 1600. Para que o programa rode, basta que o usuário digite: o ano no campo 'Digite o ano: '; o número do mês no campo 'Digite o mês (Número de 1 a 12): '; o dia no campo 'Digite o dia: '. Por exemplo, para determinar o dia da semana de 24 de março de 1722, este preenchimento fica: 'Digite o ano: 1722'; 'Digite o mês (Número de 1 a 12): 03' e 'Digite o dia: 24'.

```
import math
ano=int(input('Digite o ano: '))
mes=int(input('Digite o mês (Número de 1 a 12): '))
dia=int(input('Digite o dia: '))
```

```
if mes==1 or mes==2:
A=ano-1601
else:
A = ano - 1600
if mes==1 or mes==5:
d=5
if mes==3 or mes==11:
d=0
if mes==6 or mes==2:
d=1
if mes==7 or mes==4:
d=3
if mes==8:
d=6
if mes==12 or mes==9:
d=2
if mes==10:
d=4
B=math.trunc(A/4)-math.trunc(A/100)+math.trunc(A/400)
x=(A+B+dia-1+d)%7
if x==0:
ds='Quarta-feira'
if x==1:
ds='Quinta-feira'
if x==2:
ds='Sexta-feira'
if x==3:
ds='Sábado'
if x==4:
ds='Domingo'
if x==5:
ds='Segunda-feira'
if x==6:
ds='Terça-feira'
print('Esse dia cai numa '.format(ds))
```

Observação 3.8 *Esse trabalho é parte da dissertação de mestrado de Guilherme Liegel Leopold, intitulada "Congruências e Aplicações" e defendida em 2015.*

Referências

1 GHIORZI, T. **Calendários Perpétuos**. [S.l.]. Disponível em: ¡http://ghiorzi.org/caleperp.htm¿.

2 HEFEZ, A. Elementos de Aritmética. **SBM**, Rio de Janeiro/RJ, 2011.

3 MILIES, F. C. P. **Números: Uma Introdução à Matemática**. 3. ed. São Paulo/SP: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.

4 ROSEN, K. H. **Elementary Number Theory and Its Applications**. 3. ed. São Paulo, 2001.