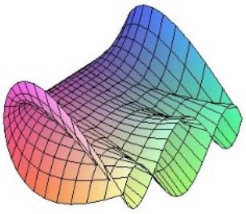


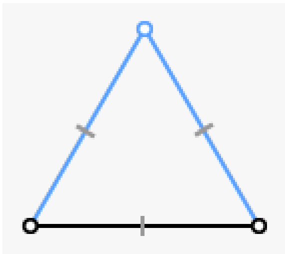
Cálculo Diferencial e Integral:
um kit de sobrevivência
"SageMath"

Ester Heloisa Bento
Ivo Eduardo Zanin
Mariana Maronezzi Brezovsky
Vitória Vendramini Gongora
Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Martins.

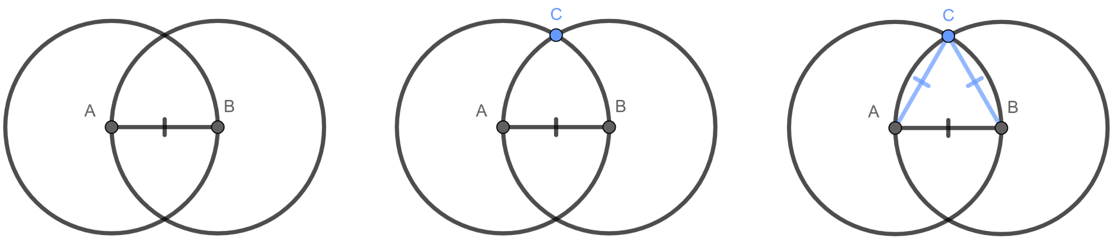
Soluções do Euclidea

1 Fase Alpha α

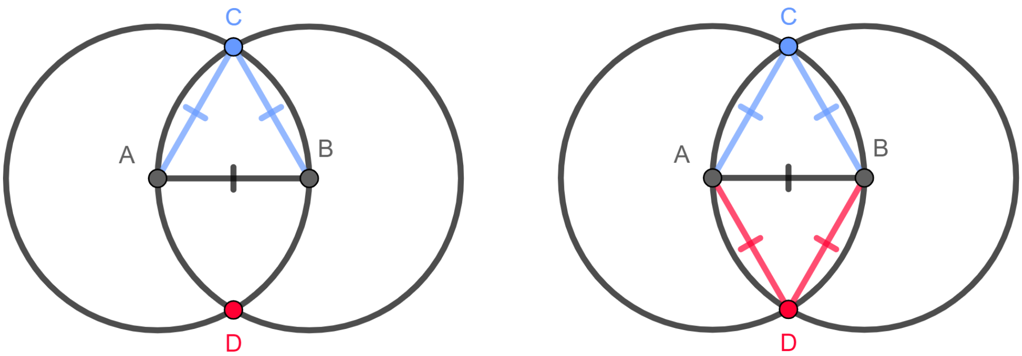
Fase Tutorial 1: Triangulo Equilátero
Objetivo: Construa um triangulo equilátero com o lado dado.



Construção estrelas 4L e 4E: Dado um segmento AB, construa as circunferências c_1, centrada em A, com raio AB, e c_2, centrada em B, com raio AB. Depois, marque um ponto C, de interseção entre c_1 e c_2. Por fim, trace os segmentos AC, BC.



Construção estrela 2V: Marque o outro ponto de interseção entre as circunferências, denomine-o D e trace as retas AD e BD.



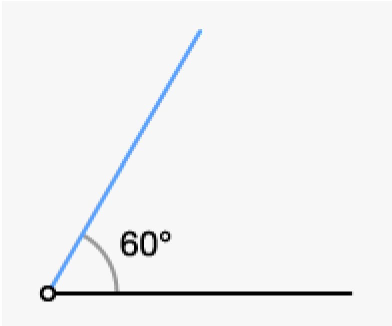
Demonstração: Tomando a circunferência c_1 centrada em A e com raio AB e c_2 a circunferência centrada em B com raio AB. Como os pontos $C, D \in c_1$ e $C, D \in c_2$ temos:

$$AC \equiv AD \equiv AB \equiv BA \equiv BC \equiv BD$$

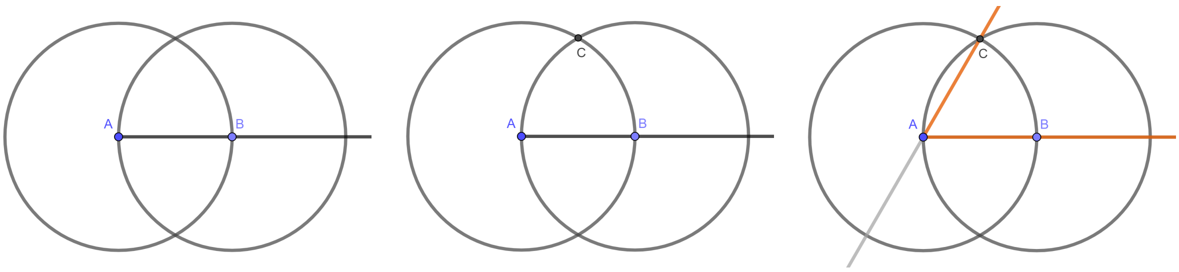
Formando dessa forma os triângulos ACB e ADB, que são equilátero.

1.1 Ângulo de 60 Graus

Objetivo: Construa um ângulo de 60° com o lado dado.



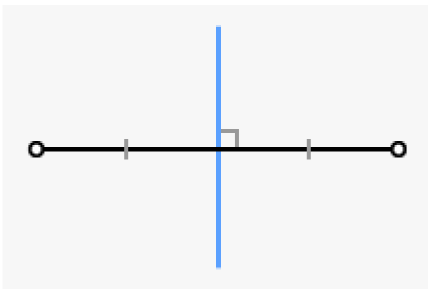
Construção estrelas 3L e 3E: Dado um segmento AB, construa as circunferências c_1, centrada em A, com raio AB, e c_2, centrada em B, com raio AB. Depois, marque um ponto C, de interseção entre c_1 e c_2. Construa a reta que passa por AC.



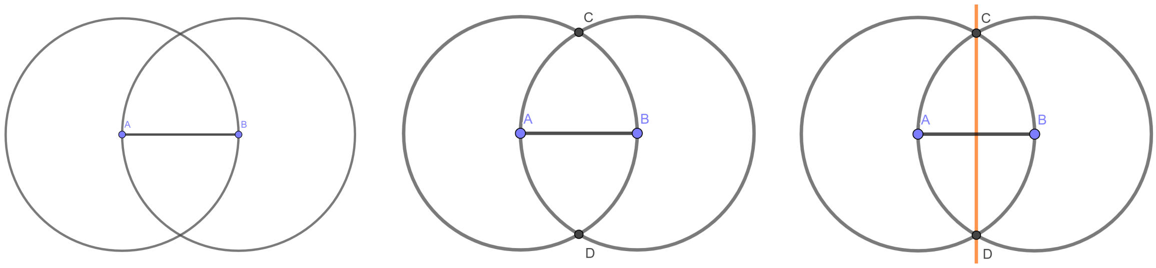
Demonstração: Considerando a demonstração da Fase Tutorial 1, e sabendo que os ângulos internos de um triangulo equilátero medem 60 graus, temos que o ângulo $B\hat{A}C$ mede 60 graus, conforme pedido pelo exercício.

1.2 Mediatriz

Objetivo: Construir a mediatriz do segmento.



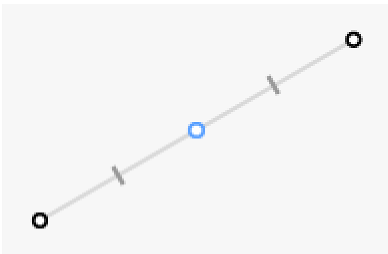
Construção estrelas 3L e 3E: Dado um segmento AB, construa as circunferências c_1, centrada em A, com raio AB, e c_2, centrada em B, com raio AB. Depois, marque os ponto C e D, de interseção entre c_1 e c_2. Por fim, construa a reta que passa por C e D.



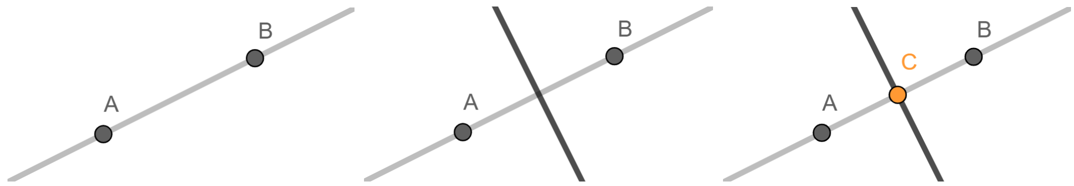
Demonstração: A mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta que contem todos os pontos que equidistam das extremidades A e B. Como os pontos C e D equidistam de A e B, então a mediatriz de $\overline{AB}$ é a reta que atravessa C e D.

1.3 Ponto Médio

Objetivo: Construa o ponto médio do segmento definido por dois pontos.



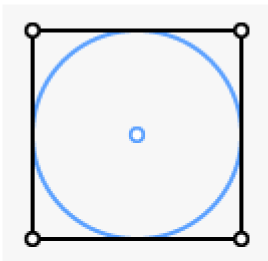
Construção estrelas 3L e 3E: Dado dois pontos, A e B, trace uma reta entre ambos, e então a mediatriz entre ambos. Finalmente, marque a intersecção entre as duas retas.



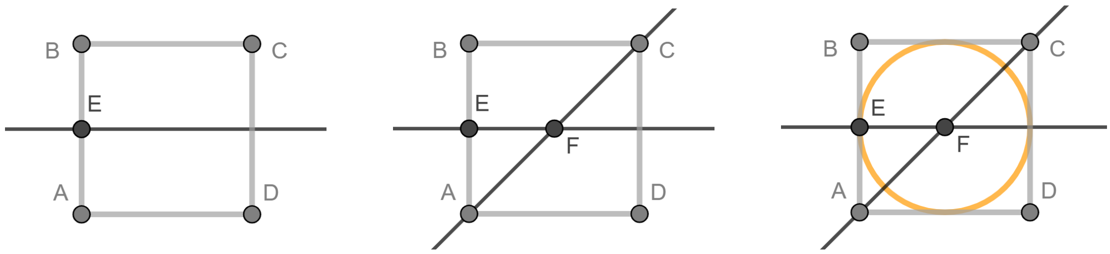
Demonstração: Sabendo que quaisquer pontos contidos na reta mediatriz entre A e B equidistam dos pontos A e B, temos que o ponto de intersecção entre a reta AB e a mediatriz também equidista de A e B. Portanto, ele é o ponto médio desse segmento.

1.4 Círculo no Quadrado

Objetivo: Inscreva um círculo no quadrado.



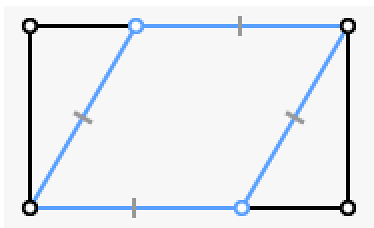
Construção estrelas 3L e 5E: Dado um quadrado ABCD, trace a mediatriz entre os pontos A e B, e marque o ponto E, de intersecção dela com $\overline{AB}$. Trace a reta diagonal do quadrado que atravessa A e C, e marque o ponto F, de intersecção dela com a mediatriz. Agora, utilizando a ferramenta compasso, construa a circunferência de centro F e raio EF.



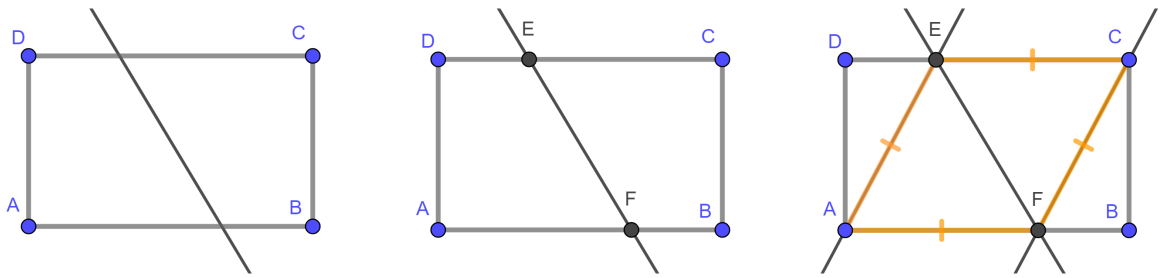
Demonstração: Sabendo que um quadrado tem todos as dimensões iguais, e que o ponto F é o ponto central dessa figura geométrica, ao construir a circunferência c_1 centrada em F e com raio EF, sabemos que as "beiradas"dessa circunferência tocam os pontos médios de cada segmento de lado do quadrado.

1.5 Losango em um Retângulo

Objetivo: Inscreva um losango no retângulo para que compartilhem uma diagonal.



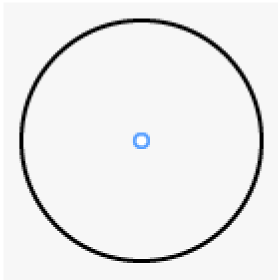
Construção estrelas 3L e 5E: Dado um retângulo ABCD, trace a mediatriz entre os pontos A e C (a diagonal do retângulo), e marque os pontos E e F, de intersecção dela com o retângulo. Trace as retas AE e FC.



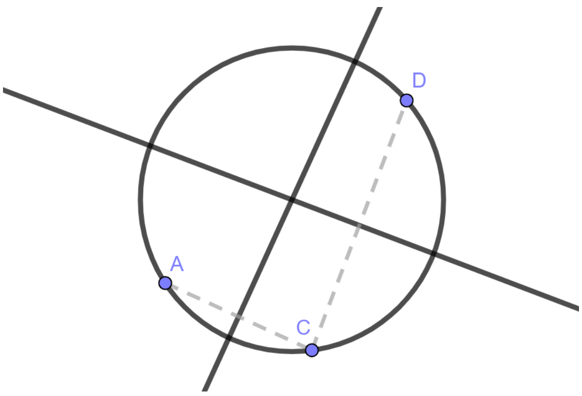
Demonstração: Sabendo que a reta diagonal separa o retângulo em dois triangulos congruentes, e que a mediatriz possibilita a criação dos triangulos $\triangle AEO$ e $\triangle CFO$ (que também são congruentes entre si), basta traçar as retas AE e FC para obter um losango.

1.6 Centro do círculo

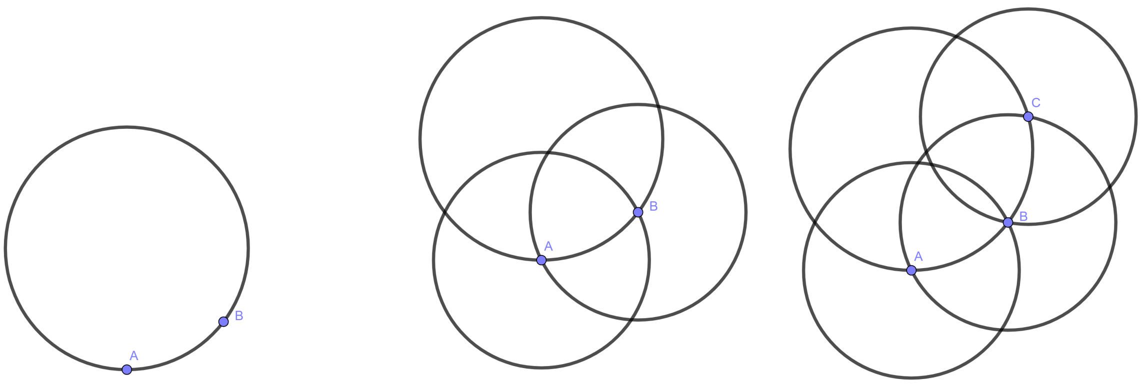
Objetivo: Construa o centro do círculo.

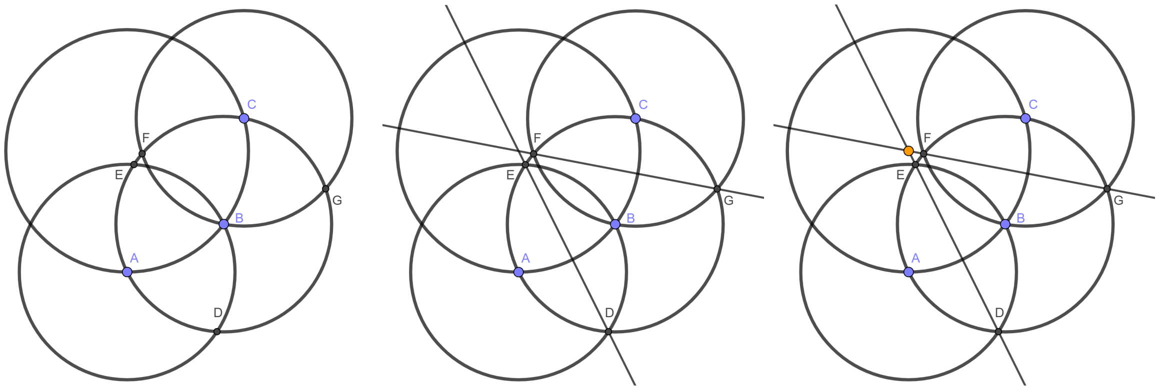


Construção estrela 2L: Dado um círculo, trace duas mediatrizes entre quaisquer dois pontos distintos da circunferência. Marque o ponto de intersecção entre elas.



Construção estrela 5E: Dado um círculo, marque dois pontos A e B quaisquer da circunferência (que chamaremos de c_0). Agora, construa as circunferências c_1, centrada em A, com raio AB, e c_2, centrada em B, com raio AB. Depois, marque o ponto C de intersecção entre c_2 e c_0. Agora, construa outra circunferência c_3, centrada em C, com raio BC. Marque então os pontos D e E, de intersecção entre c_1 e c_2, e os pontos D e E, de intersecção entre c_2 e c_3. Finalmente, trace a reta que corta E e D, e outra que corta F e G. O ponto de intersecção entre ambas as retas será o centro do círculo dado.

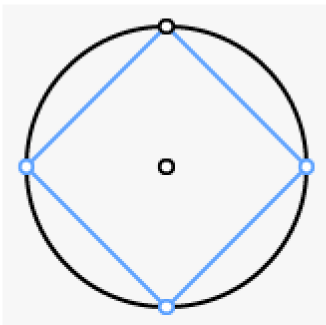




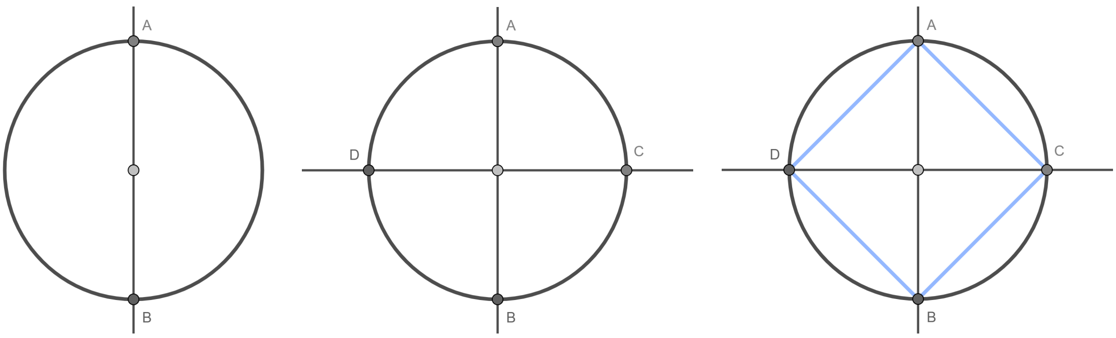
Demonstração: Sabendo que a mediatriz entre quaisquer dois pontos de uma circunferência sempre atravessa o centro, para descobrir o ponto exato do centro basta marcar a intersecção de duas mediatrizes entre pontos distintos da tal circunferência.

1.7 Quadrado Inscrito

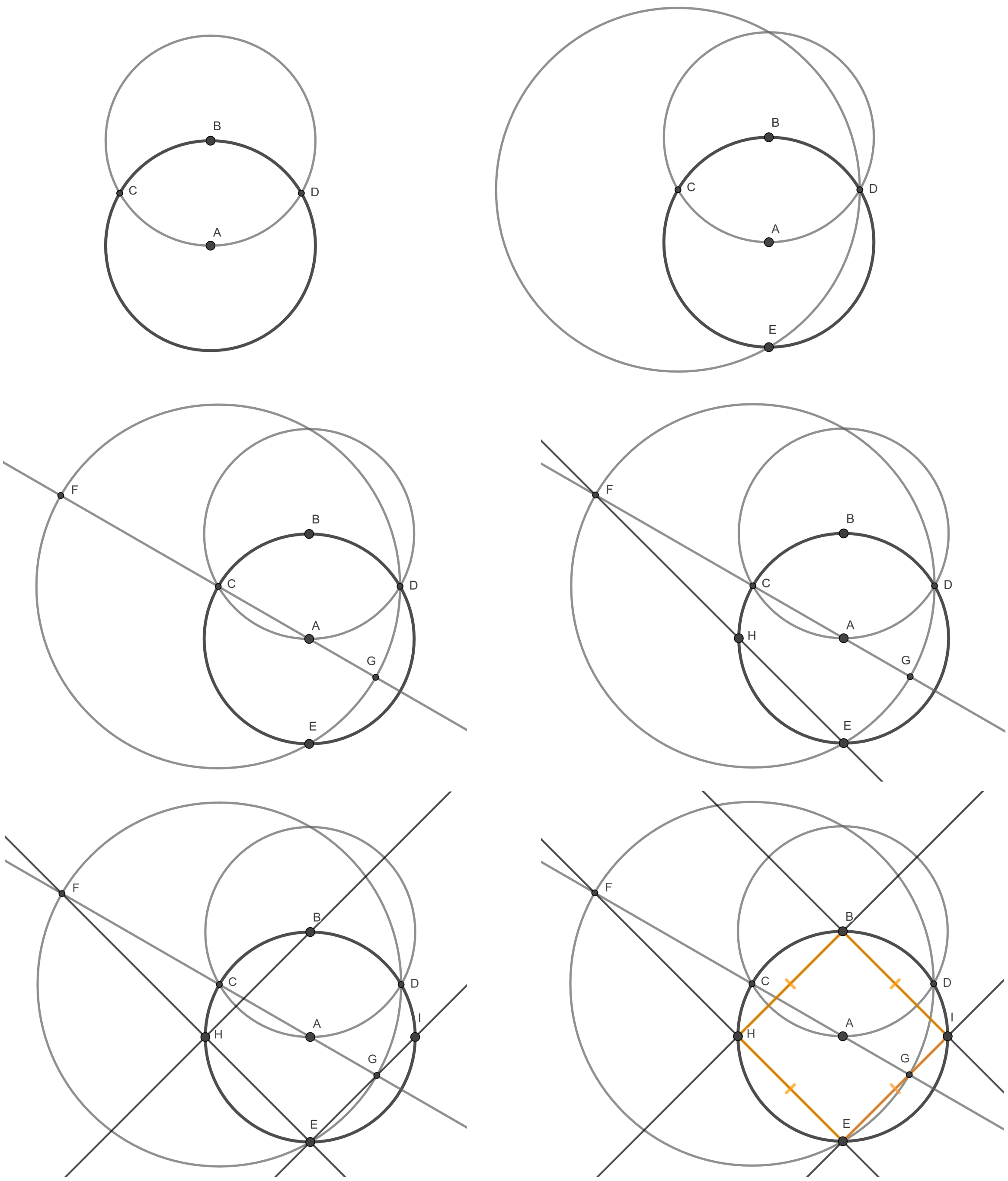
Objetivo: Inscreva um quadrado no círculo. Um vértice do quadrado é dado.



Construção estrela 6L: Trace uma reta que atravessa o ponto dado A e o centro do círculo, depois marque o ponto de intersecção B entre a circunferência e a reta. Agora, trace a mediatriz entre A e B, e marque os pontos de intersecção C e D, entre ela e a circunferência. Por fim, trace o quadrado equilátero ABCD.



Construção estrela 7E: Dada uma circunferência c_0 qualquer, centrada em A, e um ponto B contido nela, construa a circunferência c_1, centrada em B, com raio AB, e marque os pontos C e D de intersecção entre c_0 e c_1. Construa outra circunferência c_2, centrada em C, de raio CD, e marque o ponto E de intersecção entre c_0 e c_2. Agora, trace a reta que atravessa A e C, e marque os pontos F e G de intersecção entre c_2 e a reta AC. Depois, trace a reta que atravessa E e F e marque o ponto H de intersecção entre c_0 e a reta EF. Agora trace as retas HB e GE, e marque o ponto I de intersecção entre c_0 e a reta GE. Por fim, trace a reta que atravessa os pontos B e I.



Demonstração da Resolução 6L: Como a reta AB atravessa o ponto O, centro da circunferência c_0, temos que $AO \equiv OB$, pois ambos são raios de c_0. Ao traçar a mediatriz do segmento $\overline{AB}$, obtemos que $AO \equiv BO \equiv CO \equiv DO$, pois também são raios de c_0. Além disso, formamos quatro ângulos de $90^{\underline{o}}$ e quatro triângulos retângulos isósceles $\triangle AOC$, $\triangle AOD$, $\triangle BOC$, $\triangle BOD$, e pelo caso LAL de congruência de triângulos, temos que $\triangle AOC \equiv \triangle AOD \equiv \triangle BOC \equiv \triangle BOD$.

Dessa forma, temos que os ângulos das bases desses triângulos medem $45^{\underline{o}}$. Tomando os ângulos $A\hat{C}O$ e $O\hat{C}B$, temos que ambos são complementares. O mesmo ocorre entre $O\hat{B}C$ e $O\hat{B}D$, assim como entre $O\hat{D}B$ e $O\hat{D}A$. Como a reta AC forma $90^{\underline{o}}$ com as retas AD e BC, temos que $AC\backslash\backslash BD$. Analogamente, $AD\backslash\backslash BC$. Como temos esses dois casos de paralelismo, os lados AC, BC, BD e AD são congruentes, com A, B, C, e D pertencendo à circunferência c_0. Dessa forma, temos um quadrado inscrito na circunferência.