



Programa de Integração Estudantil - PROINTE

Apostila de exercícios resolvidos de Geometria Analítica

Preceptora: Daniela Sayuri Ishizaki

Coordenadora: Patrícia Hernandes Baptistelli

Universidade Estadual de Maringá

Maringá, 2026

Capítulo 1

Álgebra vetorial

1.1 Adição de vetores e produto por escalar

Denote por V^3 o conjunto dos vetores em $\mathbb{R}^3$. Temos que:

A1) Propriedade associativa

$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3.$$

A2) Propriedade comutativa

$$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall \vec{u}, \vec{v} \in V^3.$$

A3) Elemento Neutro

$$\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}, \forall \vec{u} \in V^3.$$

Lembremos que todo representante do vetor nulo tem origem e extremidade coincidentes.

A4) Elemento Oposto

Dado $\vec{u} \in V^3$ qualquer, existe um vetor que somando a $\vec{u}$ resulta no vetor nulo: trata-se do vetor oposto de $\vec{u}$, que se indica por $-\vec{u}$. Assim:

$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}.$$

- 1) Prove que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w} \Rightarrow \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$.

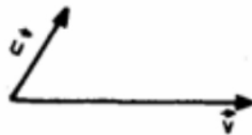
Solução:

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} = \vec{w} &\Rightarrow (\vec{u} + \vec{v}) + (-\vec{v}) = \vec{w} + (-\vec{v}) \\ &\stackrel{(A1)}{\Rightarrow} \vec{u} + (\vec{v} + (-\vec{v})) = \vec{w} + (-\vec{v}) \end{aligned}$$

$$\stackrel{(A4)}{\Rightarrow} \vec{u} + \vec{0} = \vec{w} + (-\vec{v})$$

$$\stackrel{(A3)}{\Rightarrow} \vec{u} = \vec{w} - \vec{v}.$$

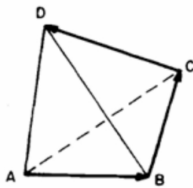
- 2) Dados representantes dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ conforme a figura abaixo, ache um representante algébrico de $\vec{x} \in V^3$ tal que $\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0}$.



Solução:

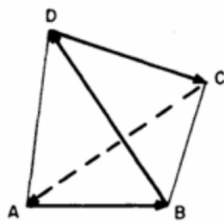
$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} + \vec{x} = \vec{0} &\iff (-\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{x} = (-\vec{u} - \vec{v}) + \vec{0} \\ &\stackrel{(A1), (A3)}{\iff} -\vec{u} + (-\vec{v} + \vec{u}) + (\vec{v} + \vec{x}) = -\vec{u} - \vec{v} \\ &\stackrel{(A2)}{\iff} -\vec{u} + (\vec{u} - \vec{v}) + (\vec{v} + \vec{x}) = -\vec{u} - \vec{v} \\ &\stackrel{(A1)}{\iff} (-\vec{u} + \vec{u}) + (-\vec{v} + \vec{v}) + \vec{x} = -\vec{u} - \vec{v} \\ &\stackrel{(A4)}{\iff} \vec{0} + \vec{0} + \vec{x} = -\vec{u} - \vec{v} \\ &\stackrel{(A3)}{\iff} \vec{x} = -\vec{u} - \vec{v}. \end{aligned}$$

- 3) Ache a soma dos vetores indicados na figura, nos casos:



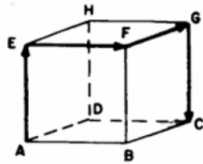
a)

Solução: $(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD} = \vec{AC} + \vec{CD} = \vec{AD}.$



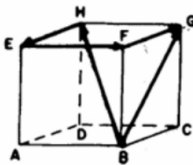
b)

Solução: $(\vec{AB} + \vec{BD}) + \vec{DC} = \vec{AD} + \vec{DC} = \vec{AC}.$



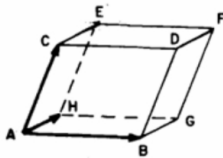
c)

Solução: $(\vec{AE} + \vec{EF}) + (\vec{FG} + \vec{GC}) = \vec{AF} + \vec{FC} = \vec{AC}.$



d)

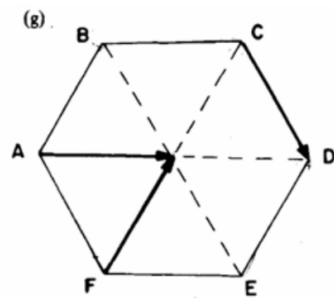
Solução: $\vec{BH} + \vec{HE} + \vec{EF} + \vec{FG} + \vec{BG} = (\vec{BH} + \vec{HE}) + (\vec{EF} + \vec{FG}) + \vec{BG} = (\vec{BE} + \vec{EG}) + \vec{BG} = \vec{BG} + \vec{BG} = 2\vec{BG}.$



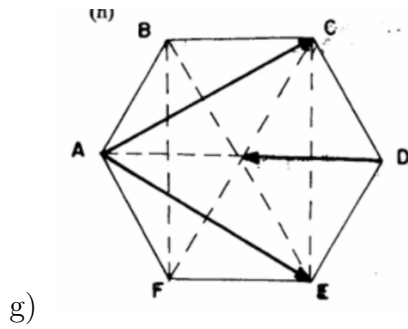
e)

Solução: $\vec{AB} + \vec{AH} + \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BG}) + \vec{AC} = \vec{AG} + \vec{AC} = \vec{AG} + \vec{GF} = \vec{AF}.$

f) A figura abaixo representa um hexágono regular, ou seja, um polígono com seis lados iguais e seis ângulos internos iguais, composto por seis triângulos equiláteros.



Solução: $\vec{AO} + \vec{FO} + \vec{CD} = \vec{AO} + (\vec{FO} + \vec{AF}) = \vec{AO} + (\vec{AF} + \vec{FO}) = \vec{AO} + \vec{AO} = 2\vec{AO} = \vec{AD}.$



g)

Solução: $\vec{AE} + \vec{AC} + \vec{DO} = \vec{AE} + (\vec{AC} + \vec{CB}) = \vec{AE} + \vec{AB} = \vec{AE} + \vec{ED} = \vec{AD}.$

4) Resolva o sistema nas incógnitas $\vec{x}$ e $\vec{y}$:

$$\begin{cases} \vec{x} + 2\vec{y} = \vec{u}, \\ 3\vec{x} - \vec{y} = 2\vec{u} + \vec{v}. \end{cases}$$

Solução: Substituindo a expressão de $\vec{u}$ na segunda igualdade, obtemos:

$$3\vec{x} - \vec{y} = 2(\vec{x} + 2\vec{y}) + \vec{v} = 2\vec{x} + 4\vec{y} + \vec{v}$$

$$3\vec{x} - 2\vec{x} = \vec{v} + 4\vec{y} + \vec{y} \Rightarrow \vec{x} = \vec{v} + 5\vec{y}.$$

Substituindo $\vec{x}$ na primeira igualdade do sistema, obtemos:

$$(\vec{v} + 5\vec{y}) + 2\vec{y} = \vec{u} \Rightarrow \vec{v} + 7\vec{y} = \vec{u} \Rightarrow 7\vec{y} = \vec{u} - \vec{v} \Rightarrow \vec{y} = \frac{1}{7}(\vec{u} - \vec{v}).$$

Portanto,

$$\vec{x} = \vec{v} + 5 \left(\frac{1}{7}(\vec{u} - \vec{v}) \right) \Rightarrow \vec{x} = \frac{5}{7}\vec{u} - \frac{5}{7}\vec{v} + \vec{v} \Rightarrow \vec{x} = \frac{5}{7}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{v} \Rightarrow \vec{x} = \frac{1}{7}(5\vec{u} + 2\vec{v}).$$

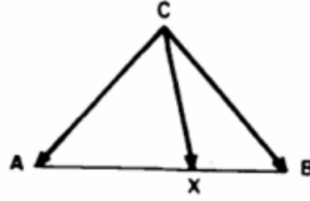
5) Seja $\vec{v} \neq \vec{0}$ um vetor. Mostre que $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é um vetor unitário (chamado *versor* de $\vec{v}$).

Solução: Como $\vec{v} \neq \vec{0}$, temos que $\|\vec{v}\|$ é um número real estritamente positivo.

Lembrando que $\|\lambda\vec{v}\| = |\lambda|\|\vec{v}\|$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, obtemos:

$$\left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \vec{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \|\vec{v}\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1.$$

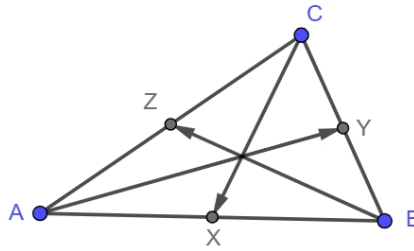
- 6) Dados quatro pontos A, B, C e $X \in \mathbb{R}^3$ tais que $\vec{AX} = m\vec{XB}$, escreva $\vec{CX}$ em função de $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$.



Solução:

$$\begin{aligned}
 \vec{AX} = m\vec{XB} &\iff \vec{AC} + \vec{CX} = m(\vec{XC} + \vec{CB}) \\
 &\iff -\vec{CA} + \vec{CX} = m(-\vec{CX} + \vec{CB}) \\
 &\iff -\vec{CA} + \vec{CX} = -m\vec{CX} + m\vec{CB} \\
 &\iff \vec{CX} + m\vec{CX} = \vec{CA} + m\vec{CB} \\
 &\iff (1+m)\vec{CX} = \vec{CA} + m\vec{CB} \\
 &\iff \vec{CX} = \frac{1}{1+m}(\vec{CA} + m\vec{CB}).
 \end{aligned}$$

- 7) Dado um triângulo ABC e os pontos $X, Y, Z \in \mathbb{R}^3$ tais que $\vec{AX} = m\vec{XB}$, $\vec{BY} = n\vec{YC}$ e $\vec{CZ} = p\vec{ZA}$, escreva $\vec{CX}$, $\vec{AY}$, $\vec{BZ}$ em função de $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$.



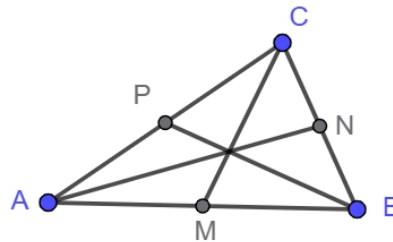
Solução:

$$\begin{aligned}
 \vec{AX} = m\vec{XB} &\iff \vec{AC} + \vec{CX} = m(\vec{XC} + \vec{CB}) \\
 &\iff -\vec{CA} + \vec{CX} = m(-\vec{CX} + \vec{CB}) \\
 &\iff -\vec{CA} + \vec{CX} = -m\vec{CX} + m\vec{CB} \\
 &\iff \vec{CX} + m\vec{CX} = m\vec{CB} + \vec{CA} \\
 &\iff (1+m)\vec{CX} = m\vec{CB} + \vec{CA} \\
 &\iff \vec{CX} = \frac{1}{1+m}(m\vec{CB} + \vec{CA}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{BY} = n\vec{YC} &\iff \vec{BA} + \vec{AY} = n(\vec{YA} + \vec{AC}) \\
&\iff (\vec{BC} + \vec{CA}) + \vec{AY} = n(-\vec{AY} - \vec{CA}) \\
&\iff -\vec{CB} + \vec{CA} + \vec{AY} = -n\vec{AY} - n\vec{CA} \\
&\iff \vec{AY} + n\vec{AY} = -\vec{CA} - n\vec{CA} + \vec{CB} \\
&\iff \vec{AY} + n\vec{AY} = -\vec{CA} + n(-\vec{CA}) + \vec{CB} \\
&\iff (1+n)\vec{AY} = (1+n)(-\vec{CA}) + \vec{CB} \\
&\iff \vec{AY} = \frac{1}{1+n} \left((1+n)(-\vec{CA}) + \vec{CB} \right) \\
&\iff \vec{AY} = -\vec{CA} + \frac{1}{1+n}\vec{CB}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{CZ} = p\vec{ZA} &\iff \vec{CB} + \vec{BZ} = p(\vec{ZB} + \vec{BA}) \\
&\iff \vec{CB} + \vec{BZ} = p(-\vec{BZ} + (\vec{BC} + \vec{CA})) \\
&\iff -\vec{BC} + \vec{BZ} = -p\vec{BZ} + p\vec{BC} + p\vec{CA} \\
&\iff \vec{BZ} + p\vec{BZ} = \vec{BC} + p\vec{BC} + p\vec{CA} \\
&\iff (1+p)\vec{BZ} = (1+p)\vec{BC} + p\vec{CA} \\
&\iff \vec{BZ} = \frac{1}{1+p} \left((1+p)\vec{BC} + p\vec{CA} \right) \\
&\iff \vec{BZ} = \vec{BC} + \frac{p}{1+p}\vec{CA} \\
&\iff \vec{BZ} = -\vec{CB} + \frac{p}{1+p}\vec{CA}.
\end{aligned}$$

- 8) No triângulo ABC abaixo, sejam M, N, P os pontos médios dos lados AB, BC e AC , respectivamente. Mostre que $\vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} = \vec{0}$.



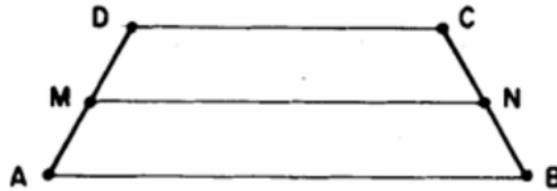
Solução: Sabemos que $\vec{CN} = \frac{1}{2}\vec{CB}$, $\vec{AP} = \frac{1}{2}\vec{AC}$, $\vec{AM} = \frac{1}{2}\vec{AB}$. Além disso,

$$\vec{CB} = \vec{CA} + \vec{AB}, \quad \vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}, \quad \vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}.$$

Então

$$\begin{aligned} \vec{AN} + \vec{BP} + \vec{CM} &= \vec{AC} + \vec{CN} + \vec{BA} + \vec{AP} + \vec{CA} + \vec{AM} \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} + \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2}(\vec{CA} + \vec{AB}) + \vec{BA} + \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CA} + \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{CB}) \\ &= \vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BA} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC} + \vec{CA} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{CB} \\ &= \left((1 + \frac{1}{2})\vec{AC} + (1 + \frac{1}{2})\vec{CA} \right) + \left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{BA} \right) + \left(\frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{CB} \right) \\ &= \frac{3}{2}(\vec{AC} + \vec{CA}) + (\vec{AB} + \vec{BA}) + \frac{1}{2}(\vec{BC} + \vec{CB}) \\ &= \frac{3}{2}\vec{0} + \vec{0} + \frac{1}{2}\vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$

- 9) Demonstre que o segmento que une os pontos médios dos lados não-paralelos de um trapézio é paralelo às bases. Mostre também que sua medida é a média das medidas das bases (Atenção: não é suficiente provar que $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$, mas isso ajuda bastante.)



Solução: Sejam M e N os pontos médios dos segmentos AD e BC , respectivamente. Queremos provar primeiramente que MN é paralelo a AB e a DC . Vamos utilizar as igualdades:

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MN} + \vec{NB}, \tag{1.1}$$

$$\vec{AB} = \vec{AD} + \vec{DC} + \vec{CB}, \tag{1.2}$$

$$\vec{MN} = \vec{MD} + \vec{DC} + \vec{CN}. \tag{1.3}$$

De (1.3), temos

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{DC} + \frac{1}{2}\vec{CB} = \frac{1}{2}(\vec{AD} + \vec{CB}) + \vec{DC}.$$

De (1.2), temos $\vec{AD} + \vec{CB} = \vec{AB} + (-\vec{DC}) = \vec{AB} - \vec{DC}$. Então

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} - \vec{DC}) + \vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{DC} + \vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + (1 - \frac{1}{2})\vec{DC} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{DC}.$$

Portanto,

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}).$$

Como $\vec{AB} \parallel \vec{DC}$ e possuem mesmo sentido, existe um número real $\alpha > 0$ tal que $\vec{AB} = \alpha\vec{DC}$. Logo,

$$\vec{MN} = \frac{1}{2}(\alpha\vec{DC} + \vec{DC}) \Rightarrow \vec{MN} = \frac{(\alpha + 1)}{2}\vec{DC}.$$

Portanto, $\vec{MN} \parallel \vec{DC}$, o que implica em $MN \parallel DC$. Como $\vec{MN} \parallel \vec{DC}$ e $\vec{DC} \parallel \vec{AB}$, então $MN \parallel AB$.

Agora, provemos que $\|\vec{MN}\| = \frac{\|\vec{AB}\| + \|\vec{DC}\|}{2}$.

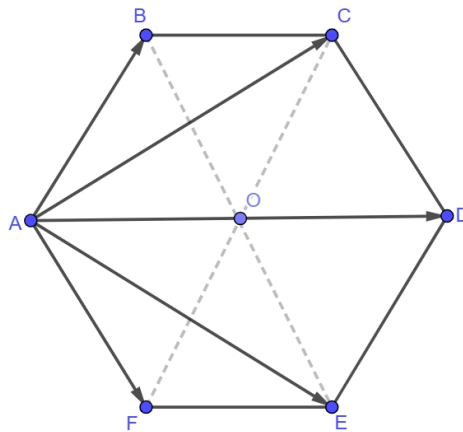
De fato, da igualdade $\vec{MN} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$ segue que

$$\|\vec{MN}\| = \left\| \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC}) \right\| = \frac{1}{2}\|\vec{AB} + \vec{DC}\|.$$

Usando novamente que $\vec{AB} = \alpha\vec{DC}$ para algum $\alpha > 0$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\vec{MN}\| &= \frac{1}{2}\|\alpha\vec{DC} + \vec{DC}\| = \frac{1}{2}\|(\alpha + 1)\vec{DC}\| = \frac{1}{2}(\alpha + 1)\|\vec{DC}\| \\ &= \frac{1}{2}(\alpha + 1)\|\vec{DC}\| = \frac{1}{2}\alpha\|\vec{DC}\| + \frac{1}{2}\|\vec{DC}\| = \frac{1}{2}\|\vec{AB}\| + \frac{1}{2}\|\vec{DC}\| \\ &= \frac{\|\vec{AB}\| + \|\vec{DC}\|}{2}. \end{aligned}$$

- 10) Sendo $ABCDEF$ um hexágono regular de centro O , prove que $\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 6\vec{AO}$.



Solução:

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} &= (\vec{AO} + \vec{OB}) + (\vec{AO} + \vec{OC}) + 2\vec{AO} + (\vec{AO} + \vec{OE}) + (\vec{AO} + \vec{OF}) \\
 &= 6\vec{AO} + (\vec{OB} + \vec{OE}) + (\vec{OC} + \vec{OF}) \\
 &= 6\vec{AO} + (\vec{OB} + \vec{BO}) + (\vec{OC} + \vec{CO}) \\
 &= 6\vec{AO} + \vec{OO} + \vec{OO} \\
 &= 6\vec{AO} + \vec{0} + \vec{0} = 6\vec{AO}.
 \end{aligned}$$

1.2 Independência linear e base

11) Prove que se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI, então $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ também é LI.

Solução: Por hipótese, temos que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente independente. Queremos provar que o conjunto $\{\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}, \vec{u} - \vec{v}, 3\vec{v}\}$ também é linearmente independente. Para isto, devemos mostrar que a única solução da equação

$$a(\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}) + b(\vec{u} - \vec{v}) + c(3\vec{v}) = \vec{0}, \quad (1.4)$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, é $a = b = c = 0$.

De (1.4), temos que

$$(a + b)\vec{u} + (a - b + 3c)\vec{v} + a\vec{w} = \vec{0}.$$

Como $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é linearmente independente, a única solução para a equação acima é

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a - b + 3c = 0 \\ a = 0 \end{cases},$$

ou seja, $a = b = c = 0$.

12) Verifique se os vetores são LI ou LD:

a) $\vec{u} = (1, 3, 14)$, $\vec{v} = (\frac{1}{14}, -\frac{3}{14}, 1)$.

Solução: $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seria LD se, e somente se, $(1, 3, 14) = \alpha(\frac{1}{14}, \frac{-3}{14}, 1)$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$. Neste caso,

$$\begin{cases} \frac{\alpha}{14} = 1 \\ -\frac{3\alpha}{14} = 3 \\ \alpha = 14 \end{cases}.$$

Então $\alpha = 14$, o que implica em $-\frac{3}{14}(14) = 3$, ou seja, $-3 = 3$, o que é um absurdo. Logo, não existe um escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \alpha\vec{v}$. Portanto, os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LI.

b) $\vec{u} = (1, 0, 0)$, $\vec{v} = (200, 2, 1)$ e $\vec{w} = (300, 1, 2)$.

Solução: Se $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ fosse LI, então a única solução de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$ seria $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Considere a igualdade

$$\alpha(1, 0, 0) + \beta(200, 2, 1) + \gamma(300, 1, 2) = \vec{0},$$

de onde obtemos

$$(\alpha + 200\beta + 300\gamma, 2\beta + \gamma, \beta + 2\gamma) = (0, 0, 0).$$

Então

$$\begin{cases} \alpha + 200\beta + 300\gamma = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ \beta + 2\gamma = 0 \end{cases}.$$

Escalonando a matriz associada a este sistema, obtemos $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Logo, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LI.

c) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, -1, -7)$ e $\vec{w} = (4, 5, -4)$.

Solução: Prosseguiremos de maneira análoga ao item anterior.

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \iff \alpha(1, 2, 1) + \beta(1, -1, -7) + \gamma(4, 5, -4) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (\alpha, 2\alpha, \alpha) + (\beta, -\beta, -7\beta) + (4\gamma, 5\gamma, -4\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\iff (\alpha + \beta + 4\gamma, 2\alpha - \beta + 5\gamma, \alpha - 7\beta - 4\gamma) = (0, 0, 0)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\alpha - \beta + 5\gamma = 0 \\ \alpha - 7\beta - 4\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha + 3\gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases} \text{ . Do}$$

último sistema, concluímos que $\beta = -\gamma$ e $\alpha = -3\gamma$. Isto é, dado $\gamma \in \mathbb{R}$ não nulo, existem $\alpha, \beta \neq 0$ tais que o sistema é satisfeito e, portanto, satisfazendo a equação $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$. Por exemplo, se $\gamma = 1$, então

$$-3(1, 2, 1) - 1(1, -1, -7) + 1(4, 5, -4) = (0, 0, 0).$$

Logo, o conjunto $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é LD.

- 13) Escreva $\vec{t} = (4, 0, 13)$ como combinação linear dos vetores $\vec{u} = (1, -1, 3)$, $\vec{v} = (0, 1, 2)$ e $\vec{w} = (7, 4, -1)$.

Solução: Temos que

$$\begin{aligned}\vec{t} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} &\iff (4, 0, 13) = \alpha(1, -1, 3) + \beta(0, 1, 2) + \gamma(7, 4, -1) \\ &= (\alpha + 7\gamma, -\alpha + \beta + 4\gamma, 3\alpha + 2\beta - \gamma).\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} \alpha + 7\gamma = 4 \\ -\alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta - \gamma = 13 \end{cases}$$

Substituindo $\alpha = 4 - 7\gamma$ na terceira equação do sistema, temos

$$3(4 - 7\gamma) + 2\beta - \gamma = 13 \iff 12 - 21\gamma + 2\beta - \gamma = 13 \iff -22\gamma + 2\beta = 1 \iff \beta = \frac{1}{2} + 11\gamma.$$

Substituindo α e β na segunda equação do sistema, obtemos

$$-4 + 7\gamma + \frac{1}{2} + 11\gamma + 4\gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \frac{7}{22}.$$

Logo, $\alpha = 4 - 7 \cdot \frac{7}{22} = \frac{127}{22}$ e $\beta = \frac{1}{2} + 11 \cdot \frac{7}{22} = \frac{9}{2}$. Portanto, $\vec{t} = \frac{127}{22}\vec{u} + \frac{9}{2}\vec{v} + \frac{7}{22}\vec{w}$.

- 14) Prove que $\{\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}, 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}, \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}\}$ é LD, quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$.

Solução: Considere os vetores $\vec{a} = \vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}$, $\vec{b} = 2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$, $\vec{c} = \vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}$ e os escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Queremos mostrar que a igualdade $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ é possível para valores de α, β e γ diferentes de 0.

Considere a combinação linear $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Então

$$\alpha(\vec{u} - 2\vec{v} + \vec{w}) + \beta(2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}) + \gamma(\vec{u} + 8\vec{v} + 3\vec{w}) = \vec{0},$$

o logo

$$(\alpha + 2\beta + \gamma)\vec{u} + (-2\alpha + \beta + 8\gamma)\vec{v} + (\alpha + 3\beta + 3\gamma)\vec{w} = \vec{0}.$$

Uma vez que $\vec{u}, \vec{v}$ e $\vec{w}$ são vetores arbitrários, tal igualdade sempre será válida para:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + \beta + 8\gamma = 0 \\ \alpha + 3\beta + 3\gamma = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo tal sistema, obtemos $\alpha = 3\gamma$ e $\beta = -2\gamma$, para qualquer $\gamma \in \mathbb{R}$. Escolhendo $\gamma = 1$, por exemplo, obtemos a igualdade $3\vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$. Logo, o conjunto $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é LD quaisquer que sejam os vetores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

- 15) Prove que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI se, e somente se, $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI.

Solução: ($\Rightarrow$) Suponha que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ seja LI, isto é, qualquer combinação da forma $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ implica em $\alpha = \beta = 0$. Queremos provar que $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ também é LI, ou seja, se tivermos $\gamma(\vec{u} + \vec{v}) + \rho(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$, então obrigatoriamente $\gamma = \rho = 0$. Temos que

$$\gamma(\vec{u} + \vec{v}) + \rho(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \Rightarrow (\gamma + \rho)\vec{u} + (\gamma - \rho)\vec{v} = \vec{0}.$$

Como $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, então

$$\begin{cases} \gamma + \rho = 0 \\ \gamma - \rho = 0 \end{cases} \Rightarrow \gamma = \rho = 0.$$

Portanto, $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI.

($\Leftarrow$) Suponha que $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ seja LI. Queremos provar que $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ é LI, ou seja, se $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0}$ então $\alpha = \beta = 0$. Observe que podemos reescrever $\vec{u}$ e $\vec{v}$ da seguinte maneira:

$$\vec{u} = \frac{1}{2}[(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})] \quad \text{e} \quad \vec{v} = \frac{1}{2}[(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v})].$$

$$\begin{aligned} \text{Assim, } \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{0} &\iff \alpha\left(\frac{(\vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v})}{2}\right) + \beta\left(\frac{(\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v})}{2}\right) = \vec{0} \\ &\iff \frac{\alpha}{2}(\vec{u} + \vec{v}) + \frac{\alpha}{2}(\vec{u} - \vec{v}) + \frac{\beta}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{\beta}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0} \\ &\iff \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)(\vec{u} + \vec{v}) + \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Como $\{\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\}$ é LI, temos $\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$. Portanto, $\alpha + \beta = \alpha - \beta = 0$, o que implica em $\alpha = \beta = 0$.

- 16) Verifique se $\vec{u} = (1, -1, 3)$ pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{w} = (2, 3, \frac{1}{3})$.

Solução: Se existirem escalares α, β tais que $\vec{u} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}$, então u poderá ser escrito como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$. Suponha

$$(1, -1, 3) = \alpha(-1, 1, 0) + \beta(2, 3, \frac{1}{3}).$$

Então

$$(1, -1, 3) = (-\alpha + 2\beta, \alpha + 3\beta, \frac{1}{3}\beta) \Rightarrow \begin{cases} -\alpha + 2\beta = 1 \\ \alpha + 3\beta = -1 \\ \frac{1}{3}\beta = 3 \end{cases}$$

Substituindo $\beta = 9$ na primeira e segunda equações, obtemos $\alpha = 17$ e $\alpha = -28$, respectivamente, o que não pode ocorrer. Portanto, $\vec{u}$ não pode ser escrito como combinação linear de $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

17) Sendo $E = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ uma base de V^3 e supondo que

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{f}_3 = \vec{e}_3 \end{cases},$$

verifique se $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ também é uma base de V^3 .

Solução: Para que $F = (\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$ seja uma base de V^3 , basta que o conjunto $\{f_1, f_2, f_3\}$ seja LI. Temos que:

$$\begin{aligned} \alpha\vec{f}_1 + \beta\vec{f}_2 + \gamma\vec{f}_3 &= \vec{0} \\ \alpha(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + \beta(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) + \gamma\vec{e}_3 &= \vec{0} \\ \alpha\vec{e}_1 + \alpha\vec{e}_2 + \alpha\vec{e}_3 + \beta\vec{e}_1 + \beta\vec{e}_2 + \gamma\vec{e}_3 &= \vec{0} \\ (\alpha + \beta)\vec{e}_1 + (\alpha + \beta)\vec{e}_2 + (\alpha + \gamma)\vec{e}_3 &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Como E é uma base de V^3 , concluímos que

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -\beta, \gamma = \beta.$$

Como o sistema admite soluções não triviais, F é linearmente dependente (basta considerar, por exemplo, $\beta = 1$). Logo, F não é uma base de V^3 .

18) Determine m para que os vetores sejam LDs.

- a) $\vec{u} = (m, 1, m)$ e $\vec{v} = (1, m, 1)$.

Solução: Se $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$, então

$$(m, 1, m) = \alpha(1, m, 1) \Rightarrow (m, 1, m) = (\alpha, \alpha m, \alpha) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = m \\ \alpha m = 1 \end{cases}.$$

Portanto, $m^2 = 1$, isto é, $m = \pm 1$.

- b) $\vec{u} = (1 - m^2, 1 - m, 0)$ e $\vec{v} = (m, m, m)$.

Solução: Seja $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \gamma\vec{v}$. Então $(1 - m^2, 1 - m, 0) = \gamma(m, m, m)$.

$$(1 - m^2, 1 - m, 0) = (\gamma m, \gamma m, \gamma m) \Rightarrow \begin{cases} 1 - m^2 = \gamma m \\ 1 - m = \gamma m \\ 0 = \gamma m \end{cases} \Rightarrow 1 - m = 0.$$

Logo, $m = 1$.

- 19) Calcule $\|\vec{u}\|$ (a norma de $\vec{u}$), sendo $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ uma base ortonormal de V^3 .

- a) $\vec{u} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$.

Solução: $\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

- b) $\vec{u} = 3\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3$.

Solução: $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

- 20) a) Encontre a matriz mudança de base de $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ para $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ quando

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = \vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = 3\vec{e}_1 \\ \vec{f}_3 = 4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2 \end{cases}.$$

Solução: Primeiramente, determinamos as coordenadas de f_1, f_2 e f_3 na base E , dadas por $[f_1]_E = (1, 0, -1)_E$, $[f_2]_E = (3, 0, 0)_E$ e $[f_3]_E = (4, -3, 0)_E$. A matriz mudança de base de F para E é dada por tais coordenadas postas em forma de coluna, ou seja,

$$M_E^F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz mudança de base de E para F é dada por $M_F^E = (M_E^F)^{-1}$, ou seja,

$$M_F^E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}.$$

- b) Encontre as coordenadas de $\vec{v} = -4\vec{f}_1 + \vec{f}_2 - \vec{f}_3$ na base E .

Solução: Veja que

$$\vec{v} = -4(\vec{e}_1 - \vec{e}_3) + 3\vec{e}_1 - (4\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2) = -5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3.$$

Logo, $[\vec{v}]_E = (-5, 3, 4)_E$.

Um outro modo de determinar as coordenadas de $\vec{v}$ na base E é usando a relação

$$[\vec{v}]_E = M_E^F [\vec{v}]_F,$$

onde $[\vec{v}]_F = (-4, 1, -1)_F$. Logo,

$$[\vec{v}]_E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}_F = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}_E.$$

- c) Sendo $\vec{v} = (1, 2, -3)_E$ encontre as coordenadas de $\vec{v}$ na base F .

Solução: Como $[\vec{v}]_E = M_E^F [\vec{v}]_F$, então

$$[\vec{v}]_F = (M_E^F)^{-1} [\vec{v}]_E = M_F^E [\vec{v}]_E.$$

Assim,

$$[\vec{v}]_F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ \frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Assim, $[\vec{v}]_F = (3, \frac{2}{9}, \frac{2}{3})_F$.

- 21) Sendo $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ e $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ bases de V^3 , com

$$\begin{cases} \vec{f}_1 = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_3 \\ \vec{f}_2 = \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \\ \vec{f}_3 = 7\vec{e}_2 \end{cases}$$

e $\vec{w} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$, determine $\vec{w}$ em termos da base F .

Solução: Veja que

$$M_E^F = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz mudança de base de F para E , uma vez que $[f_1]_E = (2, 0, -1)_E$, $[f_2]_E = (0, 1, 2)_E$ e $[f_3]_E = (0, 7, 0)_E$ denotam as coordenadas de f_1, f_2 e f_3 na base E .

Além disso, $[\vec{w}]_E = (1, 1, 1)_E$ são as coordenadas de $\vec{w}$ na base E . Denotando por $(x, y, z)_F$ as coordenadas de $\vec{w}$ na base F , temos que

$$[\vec{w}]_E = M_E^F [\vec{w}]_F,$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_F.$$

Efetuada o produto matricial,

$$\begin{cases} 2x = 1 \\ y + 7z = 1 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{3}{4} \\ z = \frac{1}{28} \end{cases}.$$

Portanto, $[\vec{w}]_F = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{28})_F$.

22) Sejam $E = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, $F = \{\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3\}$ e $G = \{\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3\}$ bases de V^3 satisfazendo

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{f}_1 - \frac{1}{2}\vec{f}_3 \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{2}\vec{f}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{f}_3 \\ \vec{e}_3 = \vec{f}_2 \end{cases} \quad (1.5)$$

e

$$\begin{cases} \vec{g}_1 = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{g}_2 = 3\vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{g}_3 = \vec{e}_1 \end{cases}. \quad (1.6)$$

Encontre:

- a) A matriz mudança de base da base F para a base E ;

Solução: Do sistema (1.5), temos a matriz mudança de base da base E para a base F é

$$E \xrightarrow{M} F, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a matriz mudança de base de F para E é dada por M^{-1} , ou seja,

$$E \xrightarrow{M^{-1}} F, \quad M^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

- b) A matriz mudança de base da base G para a base E ;

Solução: De (1.6), obtemos a matriz mudança de base

$$G \xrightarrow{N} E, \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

- c) A matriz mudança de base da base E para G ;

Solução: Para determinar a matriz mudança de base da base G para a base E , basta calcular a inversa de N cujo determinante é $\det(N) = -1$. Assim,

$$N^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- d) A matriz mudança de base da base G para F .

Solução: Conhecendo as matrizes mudança de base M e N , que permitem a mudança da base E para F e da base G para E , respectivamente, podemos determinar a matriz de mudança da base G para F por meio do produto matricial MN :

$$MN = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}+1}{2} & \frac{3\sqrt{3}+1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}-1}{2} & \frac{\sqrt{3}-3}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

1.3 Operações com vetores

23) Calcule os valores de $a \in \mathbb{R}$ para que o vetor $\vec{u} = (a, -2)$ tenha norma 4.

Solução: O módulo de um vetor $\vec{u} = (x, y)$ com respeito à base canônica é dada por $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Logo,

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + (-2)^2} = 4 \iff (\sqrt{a^2 + 4})^2 = (4)^2 \iff a^2 + 4 = 16.$$

Portanto, $a = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}$.

24) Fixando a base canônica $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ de V^3 , determine o vetor unitário que tenha: (I) o mesmo sentido de $\vec{v}$; (II) sentido contrário a $\vec{v}$, nos seguintes casos:

a) $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}$.

Solução: O vetor unitário $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ tem o mesmo sentido de $\vec{v}$ (versor). Analogamente, o vetor unitário $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ tem sentido contrário de $\vec{v}$. Como $\vec{v} = (-1, 1, 0)$, temos $\|\vec{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$, com:

(I) $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0);$

(II) $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0).$

b) $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{k}$.

Solução: Sendo $\vec{v} = (3, 0, -1)$, então $\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$. Assim,

(I) $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{10}});$

(II) $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (-\frac{3}{\sqrt{10}}, 0, \frac{1}{\sqrt{10}}).$

c) $\vec{v} = (1, 2, \sqrt{3})$.

Solução: Temos que $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Logo,

(I) $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}) = (\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{4});$

(II) $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (-\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}) = (-\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{4}).$

d) $\vec{v} = (0, -4, 0)$

Solução: Sendo $\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4$, temos:

(I) $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0, -1, 0);$

(II) $-\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = (0, 1, 0).$

25) Dado o vetor $\vec{v} = (0, 1, -3)$, determine o vetor paralelo a $\vec{v}$ que tenha:

a) sentido contrário ao de $\vec{v}$ e duas vezes a norma de $\vec{v}$;

Solução: Seja $\vec{u}$ um vetor paralelo a $\vec{v}$ e de sentido contrário, ou seja, $\vec{u} = \alpha\vec{v}$, para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ negativo. Por hipótese, temos que $\|\vec{u}\| = 2\|\vec{v}\|$. Logo,

$$\|\alpha\vec{v}\| = 2\|\vec{v}\| \Rightarrow |\alpha|\|\vec{v}\| = 2\|\vec{v}\| \Rightarrow |\alpha| = 2 \Rightarrow \alpha = -2.$$

Portanto, $\vec{u} = -2\vec{v} = -2(0, 1, -3) = (0, -2, 6)$.

b) mesmo sentido de $\vec{v}$ e norma igual a 2;

Solução: Se $\vec{u}$ tem mesmo sentido de $\vec{v}$, então $\vec{u} = \alpha\vec{v} = (0, \alpha, -3\alpha)$, para $\alpha > 0$. Como $\|\vec{u}\| = 2$, então

$$\sqrt{0^2 + \alpha^2 + (-3\alpha)^2} = 2 \Rightarrow 10\alpha^2 = 4 \Rightarrow \alpha^2 = \frac{4}{10} \Rightarrow \alpha = \frac{2}{\sqrt{10}}.$$

Portanto, $\vec{u} = (0, \frac{2}{\sqrt{10}}, -\frac{6}{\sqrt{10}})$.

26) Dados os pontos $A(2, -2, 3)$, $B(1, 1, 5)$ e o vetor $\vec{v} = (1, 3, -4)$, determine:

a) $A + 3\vec{v}$ (ponto);

Solução:

$$\begin{aligned} A + 3\vec{v} &= (2, -2, 3) + 3(1, 3, -4) \\ &= (2, -2, 3) + (3, 9, -12) \\ &= (5, 7, -9). \end{aligned}$$

b) $\overrightarrow{BA} - \vec{v}$ (vetor);

Solução:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BA} - \vec{v} &= [(2, -2, 3) - (1, 1, 5)] - (1, 3, -4) \\ &= (1, -3, -2) - (1, 3, -4) \\ &= (0, -6, 2). \end{aligned}$$

c) $B + 2\overrightarrow{AB}$ (ponto);

Solução:

$$\begin{aligned} B + 2\overrightarrow{AB} &= 3B - 2A \\ &= (1, 1, 5) + 2[(1, 1, 5) - (2, -2, 3)] \\ &= (1, 1, 5) + (-2, 6, 4) \\ &= (-1, 7, 9). \end{aligned}$$

d) $2\vec{v} - 3\vec{AB}$ (vetor);

Solução:

$$\begin{aligned} 2\vec{v} - 3\vec{AB} &= 2(1, 3, -4) - 3[(1, 1, 5) - (2, -2, 3)] \\ &= (2, 6, -8) - 3(-1, 3, 2) \\ &= (2, 6, -8) + (3, -9, -6) \\ &= (5, -3, -14). \end{aligned}$$

27) Dados os pontos $A(3, -4, -2)$ e $B(-2, 1, 0)$, determine o ponto N pertencente ao segmento AB tal que $\vec{AN} = \frac{2}{5}\vec{AB}$.

Solução: Vamos denotar $N = (x, y, z)$. Então:

$$\vec{AN} = N - A = (x, y, z) - (3, -4, -2) = (x - 3, y + 4, z + 2);$$

$$\vec{AB} = B - A = (-2, 1, 0) - (3, -4, -2) = (-5, -3, 2);$$

$$\vec{AN} = \frac{2}{5}\vec{AB} \Rightarrow (x - 3, y + 4, z + 2) = \frac{2}{5}(-5, -3, 2)$$

$$\Rightarrow (x - 3, y + 4, z + 2) = (-2, -\frac{6}{5}, \frac{4}{5})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x - 3 = -2 \\ y + 4 = -\frac{6}{5} \\ z + 2 = \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{26}{5} \\ z = -\frac{6}{5} \end{cases}.$$

Portanto, $N = (1, -\frac{26}{5}, -\frac{6}{5})$.

28) Dados os pontos $A(1, -2, 3)$, $B(2, 1, -4)$ e $C(-1, -3, 1)$, determine o ponto D tal que $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$.

Solução: Denote $D = (x, y, z)$. Lembremos que:

$$\vec{AB} = B - A = (2, 1, -4) - (1, -2, 3) = (1, 3, -7);$$

$$\vec{CD} = D - C = (x, y, z) - (-1, -3, 1) = (x + 1, y + 3, z - 1);$$

Fazendo $\vec{AB} + \vec{CD} = \vec{0}$, temos $(1, 3, -7) + (x + 1, y + 3, z - 1) = (0, 0, 0)$. Logo,

$$(x + 2, y + 6, z - 8) = (0, 0, 0) \Rightarrow \begin{cases} x + 2 = 0 \\ y + 6 = 0 \\ z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2, y = -6, z = 8.$$

Portanto, $D = (-2, -6, 8)$.

- 29) Sabendo que $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, determine a, b e c tais que $\vec{u} = (2, -1, c)$, $\vec{v} = (a, b - 2, 3)$ e $\vec{w} = (4, -1, 0)$.

Solução: Fazendo $3\vec{u} - 4\vec{v} = 2\vec{w}$, temos:

$$3(2, -1, c) - 4(a, b - 2, 3) = 2(4, -1, 0) \Rightarrow (6 - 4a, -4b + 5, 3c - 12) = (8, -2, 0).$$

Logo,

$$\begin{cases} 6 - 4a = 8 \Rightarrow a = -\frac{1}{2} \\ -4b + 5 = -2 \Rightarrow b = \frac{7}{4} \\ 3c - 12 = 0 \Rightarrow c = 4 \end{cases}.$$

- 30) Quais dos seguintes vetores $\vec{u} = (4, -6, 2)$, $\vec{v} = (-6, 9, -3)$, $\vec{w} = (14, -21, 9)$ e $\vec{t} = (10, -15, 5)$ são paralelos?

Solução: Dois vetores serão paralelos se suas coordenadas forem proporcionais (um é múltiplo do outro).

- $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são paralelos, pois $\frac{4}{-6} = \frac{-6}{9} = \frac{2}{-3}$.
- $\vec{u}$ e $\vec{w}$ não são paralelos, pois $\frac{4}{14} = -\frac{6}{21} \neq \frac{2}{9}$.
- $\vec{u}$ e $\vec{t}$ são paralelos, pois $\frac{4}{10} = \frac{-6}{-15} = \frac{2}{5}$.
- $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são paralelos, pois $\frac{-6}{14} \neq \frac{9}{-21} \neq \frac{-3}{9}$.
- $\vec{v}$ e $\vec{t}$ são paralelos, pois $\frac{-6}{10} = \frac{9}{-15} = \frac{-3}{5}$.
- $\vec{w}$ e $\vec{t}$ não são paralelos, pois $\frac{14}{10} = \frac{-21}{-15} \neq \frac{9}{5}$.

- 31) Verifique se são colineares:

- a) $A(-1, -5, 0)$, $B(2, 1, 3)$ e $C(-2, -7, -1)$;

Solução: Três pontos são colineares se, e somente se, os vetores com origem e extremidade nesses pontos são linearmente dependentes. Escolha dois vetores formados a partir desses pontos, por exemplo:

$$\overrightarrow{AB} = (2, 1, 3) - (-1, -5, 0) = (3, 6, 3);$$

$$\overrightarrow{AC} = (-2, -7, -1) - (-1, -5, 0) = (-1, -2, -1);$$

Como $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$, eles são LD. Logo, A, B e C são colineares.

b) $A(2, 1, -1)$, $B(3, -1, 0)$ e $C(1, 0, 4)$;

Solução: De modo análogo ao item anterior,

$$\vec{CA} = (2, 1, -1) - (1, 0, 4) = (1, 1, -5);$$

$$\vec{CB} = (3, -1, 0) - (1, 0, 4) = (2, -1, -4);$$

Como $\frac{1}{2} \neq \frac{1}{-1} \neq \frac{-5}{-4}$, então $\vec{CA}$ e $\vec{CB}$ não são paralelos. Logo, A , B e C não são colineares.

32) Determine o valor de n para que o vetor $\vec{v} = (n, -\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$ seja unitário.

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| = 1 &\iff \sqrt{n^2 + (-\frac{1}{2})^2 + (\frac{3}{4})^2} = 1 \iff n^2 + \frac{13}{16} = 1 \\ &\iff n^2 = \frac{3}{16} \iff n = \pm \frac{\sqrt{3}}{4}. \end{aligned}$$

33) Dados os pontos $A(1, 0, -1)$, $B(4, 2, 1)$ e $C(1, 2, 0)$, determine o valor de m para que a norma do vetor $\vec{v} = m\vec{AC} + \vec{BC}$ seja igual a 7.

Solução: Como $\vec{AC} = (1, 2, 0) - (1, 0, -1) = (0, 2, 1)$ e $\vec{BC} = (1, 2, 0) - (4, 2, 1) = (-3, 0, -1)$, então

$$\vec{v} = m\vec{AC} + \vec{BC} = m(0, 2, 1) + (-3, 0, -1).$$

Logo, $\vec{v} = (0, 2m, m) + (-3, 0, -1) = (-3, 2m, m - 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + (2m)^2 + (m - 1)^2} = 7 &\iff 9 + 4m^2 + m^2 - 2m + 1 = 49 \\ &\iff 5m^2 - 2m + 10 = 49 \Rightarrow 5m^2 - 2m - 39 = 0. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de segundo grau, obtemos:

$$m = \frac{2 \pm \sqrt{784}}{10} = \frac{2 \pm 28}{10} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{2 + 28}{10} = 3 \\ m = \frac{2 - 28}{10} = -\frac{13}{5} \end{cases}.$$

1.4 Produto interno, vetorial e misto

Definição: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ forem vetores não nulos e θ for o ângulo entre eles, então o produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ é o número real

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta).$$

Se $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ for o vetor nulo, então $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

É possível mostrar que se $\vec{u} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ e $\vec{v} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, onde $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ é uma base ortonormal de V^3 , então

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

O produto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$ também é denotado por $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ e se lê “ $\vec{u}$ escalar $\vec{v}$ ”.

Propriedades do produto escalar:

- (i) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$;
- (ii) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$;
- (iii) $\alpha(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v})$;
- (iv) $\vec{u} \cdot \vec{u} > 0$ se $\vec{u} \neq 0$ e $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ se $\vec{u} = \vec{0}$;
- (v) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

- (1) (Desigualdade de Schwarz) $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$;
- (2) (Desigualdade triangular) $|\vec{u} + \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$;
- (3) Como o sinal de $\vec{u} \cdot \vec{v}$ coincide com o sinal de $\cos(\theta)$, concluímos que:

- (i) $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff \cos(\theta) > 0 \iff 0^\circ \leq \theta < 90^\circ$,
- (ii) $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \iff \cos(\theta) < 0 \iff 90^\circ < \theta \leq 180^\circ$,
- (iii) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \cos(\theta) = 0 \iff \theta = 90^\circ$ ($\vec{u} \perp \vec{v}$).

Cálculo do ângulo entre dois vetores: Conhecido o produto interno entre 2 vetores, da igualdade $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\theta)$, temos que

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|},$$

fórmula usada para calcular o ângulo θ entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos.

- 34) Determine a medida do ângulo θ entre os vetores $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-2, 10, 2)$ cujas coordenadas são dadas em função de uma base ortonormal de V^3 .

Solução: Seja θ o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Então,

$$\cos(\theta) = \frac{(1, 0, 1) \cdot (-2, 10, 2)}{\|(1, 0, 1)\| \|(-2, 10, 2)\|} = \frac{0}{\|(1, 0, 1)\| \|(-2, 10, 2)\|} = 0.$$

Portanto, $\theta = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ radianos.

- 35) Determine x de modo que $\vec{u} = (x, 0, 3)$ seja perpendicular a $\vec{v} = (1, x, 3)$.

Solução: Lembremos que $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Dessa forma,

$$(x, 0, 3) \cdot (1, x, 3) = 0 \iff x + 9 = 0 \iff x = -9.$$

- 36) Determine o vetor $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = (4, -1, 5)$ e a $\vec{w} = (1, -2, 3)$ e que satisfaz $\vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1$.

Solução: Escreva $\vec{u} = (x, y, z)$. Então

$$\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{v} \iff (x, y, z) \cdot (4, -1, 5) = 0 \Rightarrow 4x - y + 5z = 0 \\ \vec{u} \perp \vec{w} \iff (x, y, z) \cdot (1, -2, 3) = 0 \Rightarrow x - 2y + 3z = 0 \\ \vec{u} \cdot (1, 1, 1) = -1 \iff (x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = -1 \Rightarrow x + y + z = -1 \end{cases}$$

Assim, devemos determinar x, y, z reais que satisfaça o sistema

$$\begin{cases} 4x - y + 5z = 0 \\ x - 2y + 3z = 0 \\ x + y + z = -1 \end{cases},$$

cujas matriz ampliada é $\begin{bmatrix} 4 & -1 & 5 & 0 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Escalonando essa matriz, obtemos a matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = -1 \end{cases}.$$

Portanto, $\vec{u} = (1, -1, -1)$.

- 37) Determine o vetor $\vec{v}$ ortogonal ao eixo 0_y tal que $\vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8$ e $\vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3$, sendo $\vec{v}_1 = (3, 1, -2)$ e $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$.

Solução: Escreva $\vec{v} = (x, y, z)$. Então

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{e}_2 \iff \vec{v} \cdot \vec{e}_2 = 0 \iff (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0; & (1) \\ \vec{v} \cdot \vec{v}_1 = 8 \iff (x, y, z) \cdot (3, 1, -2) = 8; \iff 3x - 2z = 8 & (2) \\ \vec{v} \cdot \vec{v}_2 = -3 \iff (x, y, z) \cdot (-1, 1, 1) = -3 \iff z = -3 + x. & (3) \end{cases}$$

Substituindo (3) em (2), obtemos $3x + 6 - 2x = 8$, ou seja, $x = 2$. Substituindo em (3), temos $z = -1$. Da equação (1), temos $y = 0$. Portanto, $\vec{v} = (2, 0, -1)$.

38) Sabendo que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ e $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$, calcule:

a) $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u}$:

Solução:

$$(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{u} - 3\vec{v} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 - 3\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 - 3(-1) = 7.$$

b) $(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v})$:

Solução:

$$(2\vec{v} - \vec{u}) \cdot (2\vec{v}) = 2\vec{v} \cdot 2\vec{v} - \vec{u} \cdot 2\vec{v} = 4\|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 4 \cdot 9 - 2(-1) = 38.$$

c) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u})$:

Solução:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - 4\vec{u}) &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{v} - 4(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{u} \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} - 4(\vec{u} \cdot \vec{u}) - 4(\vec{v} \cdot \vec{u}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 - 4\|\vec{u}\|^2 - 4(\vec{u} \cdot \vec{v}) \\ &= -3(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \\ &= 3 + 9 - 16 = -4. \end{aligned}$$

39) Ache um vetor unitário ortogonal a $\vec{u} = (1, -3, 1)$ e a $\vec{v} = (-3, -3, 3)$.

Solução: Queremos $\vec{s} = (x, y, z)$ que satisfaça:

$$\begin{cases} \|\vec{s}\| = 1 \iff \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1 \iff x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ \vec{s} \perp \vec{u} \iff \vec{s} \cdot \vec{u} = 0 \iff x - 3y + z = 0, \\ \vec{s} \perp \vec{v} \iff \vec{s} \cdot \vec{v} = 0 \iff -3x - 3y + 3z = 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ -3x - 3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Escalonando a matriz acima, obtemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \iff x = y = \frac{1}{2}z.$$

Logo, $(\frac{1}{2}z)^2 + (\frac{1}{2}z)^2 + z^2 = 1$, de onde obtemos $\frac{3}{2}z^2 = 1$. Portanto, $z = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$. Assim,

$$x = y = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} = \pm\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Portanto, $\vec{s} = \pm(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{3})$.

40) Determine o vetor $\vec{v}$ nos seguintes casos:

- a) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo 0_z , forma um ângulo de 30° com o vetor $\vec{i}$ e um ângulo obtuso com $\vec{j}$, $||\vec{v}|| = 8$:

Solução: Escreva $\vec{v} = (x, y, z)$. Então:

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{e}_3 \iff (x, y, z) \cdot (0, 0, 1) = 0 \iff z = 0, \\ ||\vec{v}|| = 8 \iff \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 8, \\ \vec{v} \cdot \vec{i} = ||\vec{v}|| ||\vec{i}|| \cos(30) \iff (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = 4\sqrt{3}. \end{cases}$$

Substituindo $x = 4\sqrt{3}$ e $z = 0$ na segunda equação, obtemos:

$$\sqrt{(4\sqrt{3})^2 + y^2 + 0^2} = 8 \iff 48 + y^2 = 64 \iff y^2 = 16 \iff y = \pm 4.$$

Para determinar o valor de y , devemos verificar qual dos valores faz com que $\vec{v}$ forme um ângulo obtuso com $\vec{j}$. Assim:

- Se $y = 4$, então $\vec{v} = (4\sqrt{3}, 4, 0)$, de modo que

$$(4\sqrt{3}, 4, 0) \cdot (0, 1, 0) = \vec{v} \cdot \vec{j} = ||\vec{v}|| ||\vec{j}|| \cos(\theta) = 8 \cdot 1 \cdot \cos(\theta).$$

Portanto, $4 = 8 \cos(\theta)$. Assim, $\cos(\theta) = \frac{1}{2} > 0$, o que implica que $\theta = 60^\circ$ é um ângulo agudo.

- Se $y = -4$, então $\vec{v} = (4\sqrt{3}, -4, 0)$, de modo que

$$(4\sqrt{3}, -4, 0) \cdot (0, 1, 0) = \vec{v} \cdot \vec{j} = ||\vec{v}|| ||\vec{j}|| \cos(\theta) = 8 \cdot 1 \cdot \cos(\theta).$$

Portanto, $-4 = 8 \cos(\theta)$. Assim, $\cos(\theta) = -\frac{1}{2} < 0$, o que implica que $\theta = 120^\circ$, que é um ângulo obtuso.

Portanto, $\vec{v} = (4\sqrt{3}, -4, 0)$.

- b) $\vec{v}$ é ortogonal ao eixo 0_x , forma ângulo de 60° com o vetor $\vec{j}$ e um ângulo agudo com $\vec{k}$, $||\vec{v}|| = 2$.

Solução: Analogamente ao que fizemos no item anterior, temos:

$$\begin{cases} \vec{v} \perp \vec{e}_1 \iff (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \iff x = 0, \\ ||\vec{v}|| = 2 \iff \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 2, \\ \vec{v} \cdot \vec{j} = ||\vec{v}|| ||\vec{j}|| \cos(60) \iff (x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 2 \cdot 1 \cdot (\frac{1}{2}) \iff y = 1. \end{cases}$$

Substituindo $x = 0$ e $y = 1$ na segunda equação, obtemos $1 + z^2 = 4 \iff z^2 = 3$. Logo, $z = \pm\sqrt{3}$. Como queremos que $\vec{v}$ forme um ângulo agudo com o eixo O_z , então $z = \sqrt{3}$. De fato, para $\vec{v} = (0, 1, \sqrt{3})$, temos:

$$\vec{v} \cdot \vec{k} = ||\vec{v}|| ||\vec{k}|| \cos(\theta) \iff (0, 1, \sqrt{3}) \cdot (0, 0, 1) = 2 \cdot 1 \cdot \cos(\theta) \iff \cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Logo, $\theta = 30^\circ$, que é um ângulo agudo.

- 41) Para cada um dos pares de vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, encontre o vetor projeção ortogonal de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ e decomponha $\vec{v}$ como uma soma de vetores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, sendo $\vec{v}_1 \parallel \vec{u}$ e $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$.

- a) $\vec{u} = (1, 0, 0)$ e $\vec{v} = (4, 3, 0)$.

Solução: Por definição, temos que $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{||\vec{u}||^2} \vec{u}$. Então,

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(4, 3, 0) \cdot (1, 0, 0)}{||(1, 0, 0)||^2} (1, 0, 0) = \frac{4 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0}{1^2 + 0^2 + 0^2} (1, 0, 0) = 4(1, 0, 0) = (4, 0, 0),$$

em que $\vec{v}_1 = (4, 0, 0)$ é paralelo a $\vec{u}$. Tome agora

$$\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1 = (4, 3, 0) - (4, 0, 0) = (0, 3, 0)$$

e observe que $\vec{v}_2 \perp \vec{u}$, pois $\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = 0 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0$.

- b) $\vec{u} = (1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (2, 5, 1)$.

Solução: Por definição,

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = \frac{(2, 5, 1) \cdot (1, 0, 1)}{||(1, 0, 1)||^2} (1, 0, 1) = \frac{2 \cdot 1 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 1}{1^2 + 0^2 + 1^2} (1, 0, 1) = (\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}),$$

em que $\vec{v}_1 = (\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2})$ é paralelo a $\vec{u}$ e $\vec{v}_2 = \vec{v} - \vec{v}_1$ é ortogonal a $\vec{u}$. De fato,

$$\vec{v}_2 = (2, 5, 1) - (\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}) = (\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2})$$

satisfaz

$$\vec{v}_2 \cdot \vec{u} = (\frac{1}{2}, 5, -\frac{1}{2}) \cdot (1, 0, 1) = \frac{1}{2} \cdot 1 + 5 \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$$

- 42) Os ângulos diretores de um vetor não nulo $\vec{v}$ são os ângulos (α, β, γ) que $\vec{v}$ forma com as direções positivas dos eixos coordenados no espaço tridimensional. Eles definem a orientação do vetor e seus cossenos (cossenos diretores) satisfazem a relação $\cos^2(\alpha) + \cos^2(\beta) + \cos^2(\gamma) = 1$.

Calcule os ângulos diretores do vetor $\vec{v} = (6, -2, 3)$.

Solução: Como $\|\vec{v}\| = \sqrt{6^2 + (-2)^2 + 3^2} = \sqrt{49} = 7$, temos que os ângulos diretores (α, β, γ) de $\vec{v}$ satisfazem:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{i}}{\|\vec{v}\| \|\vec{i}\|} = \frac{(6, -2, 3) \cdot (1, 0, 0)}{7 \cdot 1} = \frac{6}{7} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{6}{7}\right) \approx 31^\circ = 0,5411 \text{ radianos};$$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{j}}{\|\vec{v}\| \|\vec{j}\|} = \frac{(6, -2, 3) \cdot (0, 1, 0)}{7 \cdot 1} = -\frac{2}{7} \Rightarrow \beta = \arccos\left(-\frac{2}{7}\right) \approx 106,6^\circ = 1,86 \text{ radianos};$$

$$\cos(\gamma) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{k}}{\|\vec{v}\| \|\vec{k}\|} = \frac{(6, -2, 3) \cdot (0, 0, 1)}{7 \cdot 1} = \frac{3}{7} \Rightarrow \gamma = \arccos\left(\frac{3}{7}\right) \approx 64,62^\circ = 1,128 \text{ radianos}.$$

- 43) Determine o vetor $\vec{a}$, sabendo que seus ângulos diretores são 45° , 60° e 120° e que $\|\vec{a}\| = 2$.

Solução: Seja $\vec{a} = (x, y, z)$, com ângulos diretores $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ e $\gamma = 120^\circ$. Então:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45) = \frac{x}{\|\vec{a}\|} = \frac{x}{2} \Rightarrow x = \sqrt{2};$$

$$\frac{1}{2} = \cos(60) = \frac{y}{\|\vec{a}\|} = \frac{y}{2} \Rightarrow y = 1;$$

$$-\frac{1}{2} = \cos(120) = \frac{z}{\|\vec{a}\|} = \frac{z}{2} \Rightarrow z = -1.$$

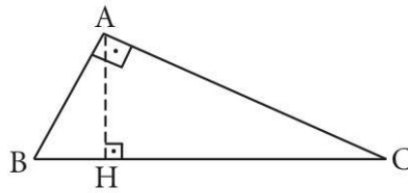
Portanto, $\vec{a} = (\sqrt{2}, 1, -1)$.

- 44) Determine os vetores projeção de $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ sobre os eixos cartesianos O_x , O_y e O_z .

Solução: Como $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ já está escrito como as componentes nos respectivos eixos coordenados, segue que

$$\text{proj}_{\vec{i}}\vec{v} = 4\vec{i} = (4, 0, 0), \quad \text{proj}_{\vec{j}}\vec{v} = -3\vec{j} = (0, -3, 0), \quad \text{proj}_{\vec{k}}\vec{v} = 2\vec{k} = (0, 0, 2).$$

45) Sejam $A(2, 1, 3)$, $B(m, 3, 5)$ e $C(0, 4, 1)$ os vértices de um triângulo. Responda:



a) Para qual valor de m o triângulo ABC é retângulo em A ?

Solução: O triângulo ABC será retângulo em A se os vetores $\vec{AC}$ e $\vec{AB}$ forem ortogonais, ou seja,

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0.$$

Temos que:

$$\vec{AC} = (0, 4, 1) - (2, 1, 3) = (-2, 3, -2)$$

e

$$\vec{AB} = (m, 3, 5) - (2, 1, 3) = (m - 2, 2, 2).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{AB} = 0 &\iff (-2, 3, -2) \cdot (m - 2, 2, 2) = 0 \\ &\Rightarrow -2m + 4 + 6 - 4 = 0 \\ &\Rightarrow m = 3; \end{aligned}$$

b) Calcule a medida da projeção do cateto AB sobre a hipotenusa BC .

Solução: Como

$$\vec{BA} = (2, 1, 3) - (3, 3, 5) = (-1, -2, -2)$$

e

$$\vec{BC} = (0, 4, 1) - (3, 3, 5) = (-3, 1, -4),$$

então por definição

$$\text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA} = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2} \vec{BC} = \frac{3 - 2 + 8}{(-3)^2 + 1^2 + (-4)^2} (-3, 1, -4) = \frac{9}{26} (-3, 1, -4).$$

Portanto,

$$\|\text{proj}_{\vec{BC}} \vec{BA}\| = \sqrt{\left(\frac{9}{26}\right)^2 [(-3)^2 + 1^2 + (-4)^2]} = \frac{9}{26} \sqrt{26}.$$

- c) Determine o ponto H , pé da altura relativa ao vértice A .

Solução: Denote o ponto H por (x, y, z) . Então:

$$\vec{CH} = H - C = (x, y - 4, z - 1), \quad \vec{CA} = A - C = (2, -3, 2), \quad \vec{CB} = B - C = (3, -1, 4).$$

$$\begin{aligned} \vec{CH} = \text{proj}_{\vec{CB}} \vec{CA} &\iff (x, y - 4, z - 1) = \frac{(2, -3, 2) \cdot (3, -1, 4)}{3^2 + (-1)^2 + 4^2} (3, -1, 4) \\ &\iff (x, y - 4, z - 1) = \frac{17}{26} (3, -1, 4) \\ &\iff (x, y - 4, z - 1) = \left(\frac{51}{26}, -\frac{17}{26}, \frac{68}{26} \right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{cases} x = \frac{51}{26} \\ y - 4 = -\frac{17}{26} \Rightarrow y = \frac{87}{26} \\ z - 1 = \frac{68}{26} \Rightarrow z = \frac{47}{13} \end{cases},$$

de onde obtemos $H = \left(\frac{51}{26}, \frac{87}{26}, \frac{47}{13} \right)$.

- 46) Para $\vec{u} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = -\vec{i} + \vec{k}$, determine:

- a) $\|\vec{u} \times \vec{u}\|$:

Solução: O produto vetorial de dois vetores linearmente dependentes é sempre o vetor nulo. Logo, $\vec{u} \times \vec{u} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 0\vec{k}$, de modo que $\|\vec{u} \times \vec{u}\| = 0$.

- b) $(\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w}$:

Solução: Como

$$\vec{u} - \vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} - 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k} = \vec{i} - 5\vec{j} - \vec{k} = (1, -5, -1),$$

simbolicamente temos:

$$\begin{aligned} (\vec{u} - \vec{v}) \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -5 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= -5\vec{i} - 0\vec{j} - 5\vec{k}. \end{aligned}$$

- c) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u})$:

Solução: Como $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$, temos que $\vec{u} \times \vec{v}$ e $\vec{v} \times \vec{u}$ são vetores paralelos (linearmente dependentes). Logo, $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{u}) = \vec{0}$.

d) $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$

Solução: Usando novamente o determinante simbólico, temos:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{i} - 1\vec{j} + 4\vec{k}.$$

Assim,

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = (3, -1, -2) \cdot (4, -1, 4) = 3 \cdot 4 + (-1) \cdot (-1) - 2 \cdot 4 = 5.$$

- 47) Dados os pontos $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$ e $C(2, -1, -3)$, determine o ponto D tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC}$.

Solução: Denotemos $D = (x, y, z)$. Fazendo

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (x - 2, y - 1, z + 1),$$

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (2 - 3, -1, 1 + 3) = (-1, -1, 4),$$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = (2 - 2, -1 - 1, -3 + 1) = (0, -2, -2), \text{ temos}$$

$$\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 10\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Portanto,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{AC} \iff (x - 2, y - 1, z + 1) = (10, 2, 2),$$

de modo que

$$\begin{cases} x - 2 = 10 & \Rightarrow x = 12 \\ y - 1 = 2 & \Rightarrow y = 3 \\ z + 1 = 2 & \Rightarrow z = 1 \end{cases}.$$

Portanto, $D = (12, 3, 1)$.

- 48) Dados os vetores $\vec{u} = (3, 1, 4)$, $\vec{v} = (-4, 0, 3)$ e $\vec{w} = (1, 2, 0)$, determine o vetor $\vec{a}$ de modo que $\vec{a} \perp \vec{w}$ e $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{v}$.

Solução: Denote $\vec{a} = (x, y, z)$. Então

$$\vec{a} \perp \vec{w} \iff \vec{a} \cdot \vec{w} = 0$$

$$\iff (x, y, z) \cdot (1, 2, 0) = 0$$

$$\iff x + 2y = 0.$$

Logo, $x = -2y$. Além disso, $\vec{a} \times \vec{u} = \vec{v}$, ou seja,

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2y & y & z \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 3\vec{k}.$$

Portanto, $(4y - z)\vec{i} - (-8y - 3z)\vec{j} + (-5y)\vec{k} = -4\vec{i} + 3\vec{k}$, dando $y = -\frac{3}{5}$, $z = \frac{8}{5}$ e $x = -2y = \frac{6}{5}$. Assim, $\vec{a} = \frac{1}{5}(6, -3, 8)$.

- 49) Determine um vetor simultaneamente ortogonal aos vetores $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$, sendo $\vec{u} = (-3, 2, 0)$ e $\vec{v} = (0, -1, -2)$.

Solução: Um vetor simultaneamente ortogonal a $\vec{u} + 2\vec{v}$ e $\vec{v} - \vec{u}$ seria o vetor $\vec{x} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u})$. Como

$$\vec{u} + 2\vec{v} = (-3, 2, 0) + 2(0, -1, -2) = (-3, 0, -4)$$

e

$$\vec{v} - \vec{u} = (0, -1, -2) - (-3, 2, 0) = (3, -3, -2),$$

então

$$\vec{x} = (\vec{u} + 2\vec{v}) \times (\vec{v} - \vec{u}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 0 & -4 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 18\vec{j} + 9\vec{k}.$$

Portanto, $\vec{x} = (-12, -18, 9)$.

- 50) Dados os vetores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, determine:

- a) um vetor unitário simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

Solução: Podemos simplesmente determinar o versor de $\vec{u} \times \vec{v}$, que chamaremos de $\vec{x}$. Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k},$$

então $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$. Portanto,

$$\vec{x} = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2, -2, 2) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Uma outra possibilidade seria o vetor $-\vec{x} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

b) um vetor de módulo 5 simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: Pelo item anterior, temos que o vetor $(2, -2, 2)$ é simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e $\vec{v}$. Considere o vetor $\vec{y} = \alpha(2, -2, 2) = (2\alpha, -2\alpha, 2\alpha)$, que é paralelo a $\vec{u} \times \vec{v}$, e vamos impor que $\|\vec{y}\| = 5$. Então

$$\sqrt{(2\alpha)^2 + (-2\alpha)^2 + (2\alpha)^2} = 5 \Rightarrow 12\alpha^2 = 25 \Rightarrow \alpha = \pm \frac{5}{\sqrt{12}} = \pm \frac{5}{2\sqrt{3}}.$$

$$\text{Portanto, } \vec{y} = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}\right) \text{ ou } \vec{y} = \left(-\frac{5}{\sqrt{3}}, \frac{5}{\sqrt{3}}, -\frac{5}{\sqrt{3}}\right).$$

51) Sabendo que $\vec{x}$ é um vetor ortogonal a $(1, 1, 0)$ e a $(-1, 0, 1)$, cuja norma é $\sqrt{3}$ e que tem θ como a medida do ângulo entre $\vec{x}$ e $(0, 1, 0)$, com $\cos(\theta) > 0$, determine $\vec{x}$.

Solução: Denote $\vec{u} = (1, 1, 0)$ e $\vec{v} = (-1, 0, 1)$. Então

$$\vec{v} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\vec{i} + 1\vec{j} - 1\vec{k}.$$

Veja que $\|\vec{v} \times \vec{u}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$. Portanto, $\vec{x} = (-1, 1, -1)$ é um candidato ao vetor procurado. Resta mostrar que $\cos(\theta) > 0$. De fato,

$$\cos(\theta) = \frac{(-1, 1, -1) \cdot (0, 1, 0)}{\|(-1, 1, -1)\| \|(0, 1, 0)\|} = \frac{-1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}} > 0.$$

52) Calcule a área do triângulo ABC , sendo $\vec{AC} = (-1, 1, 0)$ e $\vec{AB} = (0, 1, 3)$.

Solução: Temos que $A = \|\vec{AC} \times \vec{AB}\|$ coincide com a área do paralelogramo determinado por $\vec{AC}$ e $\vec{AB}$. Logo, a área do triângulo ABC é a metade de A . Calculando

$$\vec{AC} \times \vec{AB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 1\vec{k},$$

concluimos que $A = \|\vec{AC} \times \vec{AB}\| = \sqrt{3^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{19}$. Portanto, a área do triângulo é $A_T = \frac{\sqrt{19}}{2}$.

53) Calcule o valor de m para que a área do paralelogramo determinada por $\vec{u} = (m, -3, 1)$ e $\vec{v} = (1, -2, 2)$ seja igual a $\sqrt{26}$.

Solução: Basta impor que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{26}$. Da igualdade

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ m & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - (2m-1)\vec{j} + (-2m+3)\vec{k},$$

temos que $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{(-4)^2 + (-2m+1)^2 + (-2m+3)^2}$. Então,

$$\begin{aligned} (-4)^2 + (-2m+1)^2 + (-2m+3)^2 &= 26 \\ 16 + 4m^2 - 4m + 1 + 4m^2 - 12m + 9 - 26 &= 0 \\ m(8m-16) &= 0 \Rightarrow m=0 \text{ ou } m=2. \end{aligned}$$

54) Sabendo que $\|\vec{u}\| = 6$, $\|\vec{v}\| = 4$ e que a medida angular entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$ de 30° , calcule:

a) a área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

Solução: A área do triângulo determinado por $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é igual à metade da área do paralelogramo determinado por eles, isto é:

$$A_T = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(30)) = \frac{1}{2} (6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}) = 6.$$

b) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u}$ e $(-\vec{v})$;

Solução: Se $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formam um ângulo de 30° , então $\vec{u}$ e $-\vec{v}$ formam um ângulo de 150° , pois $180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$. Como $\sin(150) = \sin(30) = \frac{1}{2}$ e $\|-\vec{v}\| = \|\vec{v}\|$, temos:

$$A = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(150) = 6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

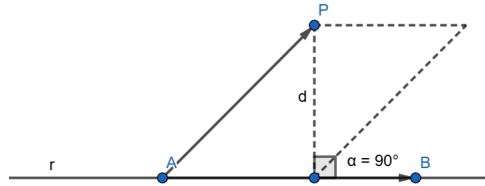
c) a área do paralelogramo determinado por $\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{u} - \vec{v}$.

Solução: Tal área é determinada pela área $A = \|(\vec{u} + \vec{v}) \times (\vec{u} - \vec{v})\|$. sendo as propriedades do produto vetorial, obtemos:

$$\begin{aligned} A &= \|(\vec{u} \times \vec{u}) - (\vec{u} \times \vec{v}) + (\vec{v} \times \vec{u}) - (\vec{v} \times \vec{v})\| \\ &= \|0 - (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{v}) - 0\| \\ &= \|-2(\vec{u} \times \vec{v})\| \\ &= 2\|\vec{u} \times \vec{v}\| \\ &= 2(\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(30)) \\ &= 2 \cdot (6 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}) = 24. \end{aligned}$$

- 55) Calcule a distância do ponto $P(4, 3, 3)$ à reta que passa por $A(1, 2, -1)$ e $B(3, 1, 1)$.

Solução:



Seja d a distância do ponto P à reta r . Os vetores $\vec{AB}$ e $\vec{AP}$ determinam um paralelogramo cuja altura relativa à base AB é a distância d . Como a área de um paralelogramo se dá pela medida da base vezes a altura, temos:

$$d = \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{AB}\|}.$$

Também temos que $\vec{AB} = (2, -1, 2)$, $\vec{AP} = (3, 1, 4)$ e

$$\vec{AB} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = -6\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}.$$

Portanto,

$$d = \frac{\|(-6, -2, 5)\|}{\|(2, -1, 2)\|} = \frac{\sqrt{(-6)^2 + (-2)^2 + 5^2}}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{65}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{65}}{3} \text{ u.c.}$$

- 56) Encontre um vetor ortogonal ao plano determinado pelos pontos $P(3, 0, 0)$, $Q(0, 3, 0)$, e $R(0, 0, 2)$, e calcule a área do triângulo PQR .

Solução: Temos $\vec{PQ} = (0, 3, 0) - (3, 0, 0) = (-3, 3, 0)$ e $\vec{PR} = (0, 0, 2) - (3, 0, 0) = (-3, 0, 2)$. O plano determinado por P , Q e R tem vetor normal dado por

$$\vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = 6\vec{i} + 6\vec{j} + 9\vec{k}.$$

Assim, os vetores ortogonais a este plano são todos da forma $t(2, 2, 3)$, com $t \in \mathbb{R}$. Além disso, a área do triângulo PQR é dada pela igualdade:

$$A_T = \frac{\|\vec{PQ} \times \vec{PR}\|}{2} = \frac{\|(6, 6, 9)\|}{2} = \frac{\sqrt{6^2 + 6^2 + 9^2}}{2} = \frac{\sqrt{153}}{2} = \frac{3\sqrt{17}}{2}.$$

- 57) Calcule z , sabendo-se que $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ e $C(0, 0, z)$ são vértices de um triângulo de área 6.

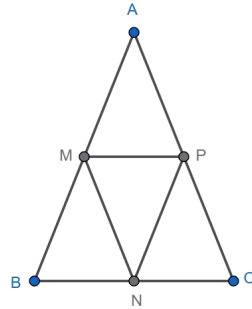
Solução: Como $\vec{AB} = B - A = (-2, 2, 0)$ e $\vec{AC} = C - A = (-2, 0, z)$, então

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \vec{k} = (2z, 2z, 4).$$

Logo,

$$\begin{aligned} A_T &= \frac{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}{2} = 6 \iff \sqrt{(2z)^2 + (2z)^2 + 4^2} = 12 \\ &\Rightarrow 8z^2 + 16 = 144 \Rightarrow 8z^2 = 128 \\ &\Rightarrow z^2 = \frac{128}{8} \Rightarrow z = \pm\sqrt{16} = \pm 4. \end{aligned}$$

- 58) Os pontos médios dos lados do triângulo ABC são $M(0, 1, 3)$, $N(3, -2, 2)$ e $P(1, 0, 2)$. Determine a área do triângulo.



Solução: Fazendo $\vec{MN} = N - M = (3, -3, -1)$ e $\vec{MP} = P - M = (1, -1, -1)$, temos que

$$\vec{MN} \times \vec{MP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = (2, 2, 0).$$

Logo,

$$A_{\Delta MNP} = \frac{\|\vec{MN} \times \vec{MP}\|}{2} = \frac{\|(2, 2, 0)\|}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 2^2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Como $A_{\Delta MNP} = \frac{A_{\Delta ABC}}{4}$, segue que $A_{\Delta ABC} = 4\sqrt{2}$.

- 59) Prove que se $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{w} \times \vec{t}$ e $\vec{u} \times \vec{w} = \vec{v} \times \vec{t}$, então $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são linearmente dependentes.

Solução: Sabemos que $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são linearmente dependentes se, e somente se, $(\vec{u} - \vec{t}) \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}$. Esta é, portanto, a igualdade desejada. Por hipótese,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) = (\vec{w} \times \vec{t}) - (\vec{v} \times \vec{t}),$$

ou seja,

$$(\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) - (\vec{w} \times \vec{t}) + (\vec{v} \times \vec{t}) = \vec{0}.$$

No entanto, veja que

$$\begin{aligned} (\vec{u} \times \vec{v}) - (\vec{u} \times \vec{w}) - (\vec{w} \times \vec{t}) + (\vec{v} \times \vec{t}) &= \vec{0} \xrightarrow{\text{Distributividade}} \vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) + (\vec{v} - \vec{w}) \times \vec{t} = \vec{0} \\ &\xrightarrow{\text{Anticomutatividade}} \vec{u} \times (\vec{v} - \vec{w}) - [\vec{t} \times (\vec{v} - \vec{w})] = \vec{0} \\ &\xrightarrow{\text{Distributividade}} (\vec{u} - \vec{t}) \times (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Portanto, $\vec{u} - \vec{t}$ e $\vec{v} - \vec{w}$ são LDs.

- 60) Dados os vetores $\vec{u} = (3, -1, 1)$, $\vec{v} = (1, 2, 2)$ e $\vec{w} = (2, 0, -3)$, calcule:

a) $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$

Solução:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 - 7 - 4 = -29.$$

b) $[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]$

Solução:

Como o produto misto é alternado, temos que $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = -29$.

- 61) Sabendo que $[\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] = 2$ e $[\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = 5$, calcule:

a) $[3\vec{u}, 3\vec{w}, -2\vec{x}]$

Solução: $[3\vec{u}, 3\vec{w}, -2\vec{x}] = 3[\vec{u}, 3\vec{w}, -2\vec{x}] = 3 \cdot 3[\vec{u}, \vec{w}, -2\vec{x}] = 9 \cdot (-2)[\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] = -18 \cdot 2 = -36$.

b) $[5\vec{u} - 3\vec{v}, 2\vec{w}, \vec{x}]$

Solução:

$$[5\vec{u} - 3\vec{v}, 2\vec{w}, \vec{x}] = 5[\vec{u}, 2\vec{w}, \vec{x}] - 3[\vec{v}, 2\vec{w}, \vec{x}] = (5 \cdot 2)[\vec{u}, \vec{w}, \vec{x}] - (3 \cdot 2)[\vec{v}, \vec{w}, \vec{x}] = 10 \cdot 2 - 6 \cdot 5 = -10.$$

62) Verifique se os pontos são coplanares:

a) $A(1, 1, 0)$, $B(-2, 1, -6)$, $C(-1, 2, -1)$ e $D(2, -1, -4)$

Solução: Os pontos A , B , C e D são coplanares $\iff [\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = 0$.
Como $\vec{AB} = B - A = (-3, 0, -6)$, $\vec{AC} = C - A = (-2, 1, -1)$ e $\vec{AD} = D - A = (1, -2, -4)$, então

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & 0 & -6 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} - 6 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0.$$

Portanto, os pontos A , B , C e D são coplanares.

b) $A(2, 1, 2)$, $B(0, 1, -2)$, $C(1, 0, -3)$ e $D(3, 1, -2)$

Solução: Para $\vec{AB} = (-2, 0, -4)$, $\vec{AC} = (-1, -1, -5)$ e $\vec{AD} = (1, 0, -4)$, temos

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -2 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -5 \\ 1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -8 - 4 \neq 0.$$

Portanto, os pontos A , B , C e D não são coplanares.

63) Qual é o volume do cubo determinado pelos vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$?

Solução: O volume deste cubo é dado pelo produto misto de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, em módulo.
Logo,

$$V = |[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}]| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 u.c.$$

64) Um paralelepípedo é determinado pelos vetores $\vec{u} = (3, -1, 4)$, $\vec{v} = (2, 0, 1)$ e $\vec{w} = (-2, 1, 5)$. Calcule seu volume e a altura relativa à base definida pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Solução: Denote por V o volume procurado. Como

$$[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}] = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 5 + 10 = 17,$$

então $V = |[\vec{w}, \vec{u}, \vec{v}]| = 17 u.v$. Veja que podemos escrever V como

$$V = \|\vec{u} \times \vec{v}\| \cdot h,$$

onde $||\vec{u} \times \vec{v}||$ denota a área da base definida por $\vec{u}$ e $\vec{v}$, e h denota a altura relativa a esta base. Como

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k},$$

então $||\vec{u} \times \vec{v}|| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{30}$. Portanto,

$$17 = V = \sqrt{30} \cdot h,$$

ou seja, $h = \frac{17}{\sqrt{30}}$.

- 65) Dados os pontos $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 0, 1)$ e $C(3, 2, -2)$, determine o ponto D do eixo O_z para que o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ seja igual a 25.

Solução: Para $\vec{AB} = B - A = (-3, -1, 0)$, $\vec{AC} = C - A = (1, 1, -3)$ e $\vec{AD} = D - A = (-2, -1, z - 1)$, temos

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & z - 1 \end{vmatrix} = -3(z - 1 - 3) + z - 1 - 6 = -2z + 5.$$

Como $V = |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = 25$, então

$$|-2z + 5| = 25 \Rightarrow \begin{cases} -2z + 5 = -25 \Rightarrow z = 15 \\ -2z + 5 = 25 \Rightarrow z = -10 \end{cases} \Rightarrow z = 15 \text{ ou } z = -10.$$

Portanto, $D = (0, 0, 15)$ ou $D = (0, 0, -10)$.

- 66) Calcule o volume do tetraedro de base ABC e vértice P , sendo $A(2, 0, 0)$, $B(2, 4, 0)$, $C(0, 3, 0)$ e $D(2, -2, 9)$. Qual é a altura do tetraedro relativa ao vértice D ?

Solução: Fazendo $\vec{AB} = B - A = (0, 4, 0)$, $\vec{AC} = C - A = (-2, 3, 0)$ e $\vec{AD} = D - A = (0, -2, 9)$, temos que:

$$[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}] = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 9 \end{vmatrix} = 72.$$

Logo, o volume do tetraedro é

$$V = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} 72 = 12.$$

Resta calcular a altura relativa ao vértice P , que é dada pela distância de P ao plano formado pela face oposta:

$$h = \frac{|[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]|}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|}.$$

Como

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0\vec{i} - 0\vec{j} + 8\vec{k} = (0, 0, 8),$$

temos que

$$h = \frac{72}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 8^2}} = \frac{72}{8} = 9.$$

- 67) Calcule a distância do ponto $D(2, 5, 2)$ ao plano determinado pelos pontos $A(3, 0, 0)$, $B(0, -3, 0)$ e $C(0, 0, 3)$.

Solução: Fazendo $\vec{AB} = B - A = (-3, -3, 0)$, $\vec{AC} = C - A = (-3, 0, 3)$ e $\vec{AD} = D - A = (-1, 5, 2)$, temos

$$[\vec{AD}, \vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 36$$

e

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9\vec{i} + 9\vec{j} - 9\vec{k} = (-9, 9, -9).$$

Portanto, $V = 36$ é o volume do tetraedro determinado por A, B, C e D e

$$\|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \sqrt{(-9)^2 + 9^2 + (-9)^2} = \sqrt{243},$$

que determina a área da base do tetraedro. Logo, a distância de D ao plano gerado por $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ e $\vec{AD}$ é:

$$h = \frac{V}{\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|} = \frac{36}{\sqrt{243}} = \frac{4}{\sqrt{3}}.$$

68) Prove que $[\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}, \vec{v} + \gamma\vec{w}, \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$.

Solução:

$$\begin{aligned} [\vec{u} + \alpha\vec{v} + \beta\vec{w}, \vec{v} + \gamma\vec{w}, \vec{w}] &= [\vec{u}, \vec{v} + \gamma\vec{w}, \vec{w}] + \alpha[\vec{v}, \vec{v} + \gamma\vec{w}, \vec{w}] + \beta[\vec{w}, \vec{v} + \gamma\vec{w}, \vec{w}] \\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] + \gamma[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}] + \alpha[\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}] + \alpha\gamma[\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}] \\ &\quad + \beta[\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}] + \beta\gamma[\vec{w}, \vec{w}, \vec{w}] \\ &= [\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}], \end{aligned}$$

uma vez que

$$[\vec{u}, \vec{w}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{v}, \vec{w}] = [\vec{w}, \vec{w}, \vec{w}] = 0.$$

Capítulo 2

Retas e Planos

2.1 Equações da reta

- 69) Determine uma equação vetorial da reta r definida pelos pontos $A(2, -3, 4)$ e $B(1, -1, 2)$, e verifique se os pontos $C(\frac{5}{2}, -4, 5)$ e $D(-1, 3, 4)$ pertencem a r .

Solução: A reta definida por dois pontos A e B tem a direção do vetor $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-1, 2, -2)$. Sua equação vetorial é

$$r : P = A + t\vec{v} = (2, -3, 4) + t(-1, 2, -2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Temos que $C \in r \iff \exists t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AC} = t\vec{v}$. Como $\overrightarrow{AC} = C - A = (\frac{1}{2}, -1, 1)$, vamos verificar se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que

$$(\frac{1}{2}, -1, 1) = t(-1, 2, -2) \iff \begin{cases} -t = \frac{1}{2} \\ 2t = -1 \\ -2t = 1 \end{cases}.$$

Então $t = -\frac{1}{2}$ e $C \in r$.

Analogamente, vamos verificar se existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AD} = t\vec{v}$. Como $\overrightarrow{AD} = D - A = (-3, 6, 0)$, temos

$$(-3, 6, 0) = t(-1, 2, -2) \iff \begin{cases} -t = -3 \\ 2t = 6 \\ -2t = 0 \end{cases}.$$

Logo, não existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaça o sistema acima, isto é, $D \notin r$.

70) São dados os pontos $A(3, 6, -7)$, $B(-5, 2, 3)$ e $C(4, -7, -6)$.

- a) Escreva as equações vetorial e paramétricas para a reta determinada pelos pontos B e C , e obtenha sua forma simétrica (se existir). O ponto $D(3, 1, 4)$ pertence a essa reta?

Solução: Escolhendo $\overrightarrow{BC} = C - B = (9, -9, -9)$ como um vetor diretor da reta r determinada por B e C , temos a equação vetorial

$$r : P = B + t\overrightarrow{BC} = (-5, 2, 3) + t(9, -9, -9), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, as equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = -5 + 9t \\ y = 2 - 9t \\ z = 3 - 9t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

e as equações na forma simétrica são dadas por:

$$\frac{x+5}{9} = \frac{y-2}{-9} = \frac{z-3}{-9}.$$

Substituindo as coordenadas do ponto D nas equações paramétricas de r , obtemos:

$$\begin{cases} -5 + 9t = 3 \\ 2 - 9t = 1 \\ 3 - 9t = 4 \end{cases}.$$

Da segunda equação, temos $t = \frac{1}{9}$ e da terceira equação, temos $t = -\frac{1}{9}$. Portanto, não existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaz o sistema acima. Logo, $D \notin r$.

- b) Verifique que os pontos A , B e C são vértices de um triângulo.

Solução: Para que os pontos A , B e C sejam vértices de um triângulo, eles não podem ser colineares. Para isso, vamos verificar se $A \in r$ onde r é a reta determinada por B e C (obtida no item anterior).

$$\begin{cases} -5 + 9t = 3 \\ 2 - 9t = 6 \\ 3 - 9t = -7 \end{cases}.$$

Novamente, não existe $t \in \mathbb{R}$ que satisfaça simultaneamente as três equações. Logo, $A \notin r$ e, então, os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

- c) Escreva as equações paramétricas da mediana relativa ao vértice C do triângulo.

Solução: A mediana de um triângulo é o segmento que liga o vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice. Sendo M o ponto médio de AB , temos que

$$M = \left(\frac{3+5}{2}, \frac{6+2}{2}, \frac{-7+3}{2} \right) = (-1, 4, -2).$$

Escolhendo $\overrightarrow{MC} = (5, -11, -4)$ como um vetor diretor da mediana por C , temos:

$s : X = (-1, 4, -2) + t(5, -11, -4)$, cujas equações paramétricas são:

$$\begin{cases} x = -1 + 5t \\ y = 4 - 11t \\ z = -2 - 4t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 71) Dados os pontos $A(0, 0, 1)$, $B(1, 2, 1)$ e $C(1, 0, 1)$, obtenha equações paramétricas das bissetrizes internas do triângulo ABC , relativas ao vértice C .

Solução: A bissetriz interna no vértice C têm a direção dada pela soma dos vetores unitários ao longo dos lados CA e CB (pois o vetor soma é a diagonal de um losango). Assim,

$$\overrightarrow{CA} = (-1, 0, 0), \text{ em que } \|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$$

e

$$\overrightarrow{CB} = (0, 2, 0), \text{ em que } \|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{0^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Portanto, o versor de CA é $\frac{\overrightarrow{CA}}{\|\overrightarrow{CA}\|} = (-1, 0, 0)$ e o versor de CB é $\frac{\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CB}\|} = (0, 1, 0)$.

Somando tais vetores unitários, encontramos o vetor diretor da bissetriz em C :

$$\vec{v} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} = (-1, 1, 0).$$

Portanto, as equações paramétricas são dadas por:

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 0 + t \\ z = 1 + 0t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

72) Obtenha as equações paramétricas para os três eixos coordenados de $\mathbb{R}^3$.

Solução: Todos os eixos passam pela origem $O(0,0,0)$. Considere os vetores $\vec{i} = (1,0,0)$, $\vec{j} = (0,1,0)$ e $\vec{k} = (0,0,1)$ como os diretores dos eixos das abscissas, das ordenadas e das cotas, respectivamente.

As equações paramétricas são:

$$\begin{aligned} \text{Para o eixo } O_x : & \begin{cases} x = 0 + t = t \\ y = 0 + 0t = 0 \\ z = 0 + 0t = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}; \\ \text{Para o eixo } O_y : & \begin{cases} x = 0 + 0t = 0 \\ y = 0 + t = t \\ z = 0 + 0t = 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}; \\ \text{Para o eixo } O_z : & \begin{cases} x = 0 + 0t = 0 \\ y = 0 + 0t = 0 \\ z = 0 + t = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

73) Determine o ponto $P(m, 1, n)$ pertencente à reta que passa por $A(3, -1, 4)$ e $B(4, -3, -1)$.

Solução: Se $P \in r$, onde r é a reta determinada por A e B , então existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $P = A + t\vec{AB}$, em que $\vec{AB} = (1, -2, -5)$. Considere o sistema linear

$$\begin{cases} m = 3 + t \\ 1 = -1 - 2t \\ n = 4 - 5t \end{cases}.$$

Da segunda equação, temos $t = -1$. Então

$$m = 3 + (-1) = 2 \quad \text{e} \quad n = 4 - 5(-1) = 9.$$

Portanto, $P = (2, 1, 9)$.

74) Obtenha o ponto de abscissa 1 e que pertence à reta $r : \frac{2x+1}{3} = \frac{3y-2}{2} = z+4$. Determine um vetor diretor de r que tenha ordenada igual a 3.

Solução: Pelas equações simétricas de r , um vetor diretor de r é o vetor $\vec{r} = (3, 2, 1)$. Denote por $P = (1, b, c)$ o ponto com abscissa 1 e pertencente à r . Fazendo $x = 1$, $y = b$ e $z = c$, obtemos:

$$1 = \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} = \frac{3b - 2}{2} = c + 4.$$

Portanto, $b = \frac{4}{3}$ e $c = -3$. Assim, $P = (1, \frac{4}{3}, -3)$.

Queremos, agora, determinar um outro vetor diretor de r paralelo a $\vec{r}$ que tenha ordenada igual à 3. Denotemos $\vec{u} = (x, 3, z)$ tal vetor. Então, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$(x, 3, z) = \alpha(3, 2, 1) \Rightarrow \begin{cases} x = 3\alpha \\ 3 = 2\alpha \\ z = \alpha \end{cases}.$$

De $3 = 2\alpha$, temos que $\alpha = \frac{3}{2}$. Assim, $x = \frac{9}{2}$ e $z = \frac{3}{2}$. Dessa forma, devemos ter

$$\vec{u} = (\frac{9}{2}, 3, \frac{3}{2}).$$

- 75) Escreva as equações reduzidas na variável z da reta que passa por $A(-1, 6, 3)$ e $B(2, 2, 1)$.

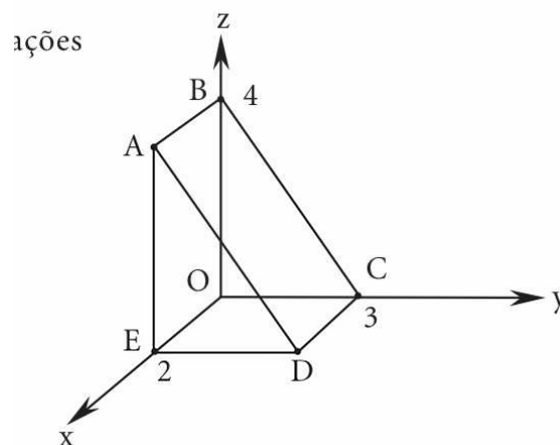
Solução: O vetor diretor da reta r é o vetor $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, -4, -2)$. Como r passa por $A(-1, 6, 3)$, as equações simétricas de r são:

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-3}{-2}.$$

Com a primeira igualdade, podemos expressar as variáveis x e y em função de z .

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{3} &= \frac{z-3}{-2} \Rightarrow -2x-2 = 3z-9 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}z + \frac{7}{2}; \\ \frac{y-6}{-4} &= \frac{z-3}{-2} \Rightarrow -2y+12 = -4z+12 \Rightarrow y = 2z. \end{aligned}$$

- 76) Com base na figura abaixo, escreva as equações paramétricas da reta que passa pelos pontos:



a) $A = (2, 0, 4)$ e $B = (0, 0, 4)$.

Solução: Para $\overrightarrow{AB} = (-2, 0, 0)$, temos:

$$r : \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 + 0t \\ z = 4 + 0t \end{cases} = \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = 0 \\ z = 4 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) $B(0, 0, 4)$ e $C = (0, 3, 0)$.

Solução: Para $\overrightarrow{BC} = (0, 3, -4)$, temos:

$$r_1 : \begin{cases} x = 0 + 0\alpha \\ y = 0 + 3\alpha \\ z = 4 - 4\alpha \end{cases} = \begin{cases} x = 0 \\ y = 3\alpha \\ z = 4 - 4\alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

c) $A(2, 0, 4)$ e $D = (2, 3, 0)$.

Solução: Para $\overrightarrow{AD} = (0, 3, -4)$, temos:

$$r_2 : \begin{cases} x = 2 + 0\beta \\ y = 0 + 3\beta \\ z = 4 - 4\beta \end{cases} = \begin{cases} x = 2 \\ y = 3\beta \\ z = 4 - 4\beta \end{cases}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

77) Escreva as equações paramétricas para a reta r que passa pelo ponto $A(2, 0, -3)$ e:

a) r é paralela à reta

$$s : \frac{1-x}{5} = \frac{3y}{4} = \frac{z+3}{6}.$$

Solução: Duas retas serão paralelas se seus vetores diretores forem paralelos.

Neste caso, a reta s pode ser escrita como

$$s : \frac{x-1}{-5} = \frac{y-0}{\frac{4}{3}} = \frac{z-(-3)}{6}$$

cujo vetor diretor é $\vec{s} = (-5, \frac{4}{3}, 6)$. Portanto,

$$r : \begin{cases} x = 2 - 5t \\ y = \frac{4}{3}t \\ z = -3 + 6t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) r é paralela à reta que passa pelos pontos $B(1, 0, 4)$ e $C(2, 1, 3)$.

Solução: Como a reta que passa por B e C tem vetor diretor $\overrightarrow{BC} = (1, 1, -1)$, temos:

$$r : \begin{cases} x = 2 + \alpha \\ y = \alpha \\ z = -3 - \alpha \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

c) r é paralela à reta s :

$$s : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}.$$

Solução: O vetor diretor de s é $\vec{s} = (-2, 1, -1)$. Assim,

$$r : \begin{cases} x = 2 - 2\beta \\ y = \beta \\ z = -3 - \beta \end{cases}, \quad \beta \in \mathbb{R}.$$

78) Passe para a forma simétrica, se possível, a equação da reta r obtida no item b) do exercício anterior.

Solução: Isolando α na equação de r , obtemos:

$$x - 2 = y = -z - 3,$$

que pode ser reescrito como

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 0}{1} = \frac{z + 3}{-1}.$$

Tal forma simétrica está coerente com a reta que passa pelo ponto $A(2, 0, -3)$ e tem vetor diretor $\vec{r} = (1, 1, -1)$.

79) Verifique se as retas r e s são iguais, nos seguintes casos:

a)

$$r : \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s : \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{2}\mu \\ y = 2 + \mu \\ z = 1 + \frac{1}{2}\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Solução: Duas retas serão iguais (paralelas coincidentes) se seus vetores diretores forem paralelos e qualquer ponto de uma das retas pertence à outra reta.

O vetor diretor de r é $\vec{r} = (-1, 2, 1)$ e de s é $\vec{s} = (-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$. Observe que $\vec{r} = 2\vec{s}$. Logo, r e s são paralelas.

Agora, vamos verificar se r e s são coincidentes. Para isto, considere $P = (1, 2, 1) \in r$ (basta tomar $\lambda = 0$). Perceba que fazendo $\mu = 0$, também obtemos $P \in s$. Portanto, $r = s$.

b)

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{3} - \lambda \\ y = -\frac{1}{3} + \lambda \\ z = \frac{2}{3} - \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s : \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

Solução: Note que o vetor $\vec{r} = (-1, 1, -1)$ é um vetor diretor das retas r e de s . Logo, tais retas são paralelas. Vejamos se são coincidentes.

Considere $P = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \in r$. Vamos verificar se P pertence à s . Para isto, devemos encontrar $\mu \in \mathbb{R}$ que satisfaça simultaneamente as equações do sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} = 1 - \mu \Rightarrow \mu = \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} = -1 + \mu \Rightarrow \mu = \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} = 2 - \mu \Rightarrow \mu = \frac{4}{3} \end{cases}.$$

Logo, não existe tal $\mu \in \mathbb{R}$ satisfazendo o sistema, isto é, $P \notin s$.

c) $r : X = (1, 1, 0) + \lambda(1, 0, \frac{-1}{2}), \lambda \in \mathbb{R};$

$s : X = (0, 1, \frac{1}{2}) + \mu(-2, 0, 1), \mu \in \mathbb{R}.$

Solução: Claramente, $\vec{r} = (1, 0, -\frac{1}{2})$ e $\vec{s} = (-2, 0, 1)$ são paralelos, pois

$$(1, 0, -\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}(-2, 0, 1).$$

Portanto, as retas r e s são paralelas. Vamos verificar se $P = (1, 1, 0) \in r$ também pertence a s , ou seja, se existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} 1 = 0 - 2\mu \\ 1 = 1 + 0\mu \\ 0 = \frac{1}{2} + \mu \end{cases}.$$

Veja que $\mu = -\frac{1}{2}$ satisfaz o sistema. Portanto, $r = s$.

- 80) Escreva a equação paramétrica da reta que passa pelo ponto $A(4, -5, 3)$ e é paralela ao eixo O_y .

Solução: A reta que é paralela ao eixo O_y tem vetor diretor $\vec{j} = (0, 1, 0)$. Assim,

$$r : \begin{cases} x = 4 + 0t \\ y = -5 + t \\ z = 3 + 0t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 81) Determine o ângulo entre as seguintes retas:

a)

$$r_1 : \begin{cases} x = -2 - t \\ y = t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$r_2 : \frac{x}{2} = \frac{y+6}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

Solução: O ângulo θ entre as retas r_1 e r_2 é o menor ângulo entre os vetores diretores de r_1 e r_2 , a saber $\vec{r}_1 = (-1, 1, -2)$ e $\vec{r}_2 = (2, 1, 1)$, respectivamente. Então, temos:

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{(-1, 1, -2) \cdot (2, 1, 1)}{\|\vec{r}_1\| \|\vec{r}_2\|} = \frac{-2 + 1 - 2}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-2)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Portanto, $\theta = \arccos(-\frac{1}{2}) = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} = 120^\circ$.

b)

$$r_1 : \begin{cases} y = -2x + 3 \\ z = x - 2 \end{cases}$$

e

$$r_2 : y = \frac{z+1}{-1}; \quad x = 4.$$

Solução: A reta r_1 está na forma reduzida. Para determinar um vetor diretor de r_1 , vamos determinar dois pontos A e B de r_1 e, posteriormente, encontrar o vetor $\overrightarrow{AB}$.

Para $x = 0$, obtemos $A = (0, 3, -2) \in r_1$ e para $x = 1$, obtemos $B = (1, 1, -1) \in r_1$. Assim, $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1)$ é um vetor diretor de r_1 .

Analogamente, para encontrar o vetor diretor da reta r_2 :

Para $z = 0$, obtemos $C = (4, 1, 0) \in r_2$ e para $z = 1$, obtemos $D = (4, 2, 1) \in r_2$. Assim, $\overrightarrow{CD} = (0, 1, 1)$ é um vetor diretor de r_2 .

Portanto, se θ é a medida angular entre r_1 e r_2 , temos:

$$\cos(\theta) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{AB}\| \|\overrightarrow{CD}\|} = \frac{(1, -2, 1) \cdot (0, 1, 1)}{\sqrt{1+4+1}\sqrt{1+1}} = \frac{-1}{\sqrt{12}} = -\frac{1}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Logo,

$$\theta = \arccos(-\frac{\sqrt{3}}{6}) \approx 1,86 \text{ rad} = 106,3^\circ.$$

82) Determine o valor de n para que o ângulo entre as retas

$$r_1 : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} y = nx + 5 \\ z = 2x - 2 \end{cases}$$

seja de $\frac{\pi}{6}$ radianos.

Solução: O vetor diretor de r_1 é $\vec{r}_1 = (4, 5, 3)$. Para obter o vetor diretor de r_2 , basta tomar $x = t$ como parâmetro e escrever r_2 como

$$r_2 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = 5 + nt \\ z = -2 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, seu vetor diretor é $\vec{r}_2 = (1, n, 2)$. Então, impondo que a medida angular entre r_1 e r_2 seja de $\frac{\pi}{6}$, obtemos

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{\|\vec{r}_1\| \|\vec{r}_2\|},$$

de onde segue que

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{(4, 5, 3) \cdot (1, n, 2)}{\sqrt{4^2 + 5^2 + 3^2} \sqrt{1^2 + n^2 + 2^2}} = \frac{4 + 5n + 6}{\sqrt{50} \sqrt{5 + n^2}} = \frac{5n + 10}{\sqrt{50}(n^2 + 5)}.$$

Portanto, $10n + 20 = \sqrt{150(n^2 + 5)}$. Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$(10n + 20)^2 = 150(n^2 + 5).$$

Reorganizando os termos e dividindo por 50, resulta em

$$n^2 - 8n + 7 = 0,$$

cujas raízes são $n = 1$ ou $n = 7$.

2.2 Posições relativas entre retas

- 83) Encontre as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto A e é simultaneamente ortogonal às retas r_1 e r_2 nos seguintes casos:

$$\text{a) } A(3, 2, -1), \quad r_1 : \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{e } r_2 : \begin{cases} y = x - 3 \\ z = -2x + 3 \end{cases}.$$

Solução: O vetor diretor da reta r é dado pelo produto vetorial dos vetores diretores das retas r_1 e r_2 . Para r_1 , tome $z = t$ como parâmetro e escreva

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 + 0t \\ y = -1 + 0t \\ z = 0 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, para r_2 tome $x = t$ e escreva

$$r_2 : \begin{cases} x = 0 + t \\ y = -3 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Portanto, os vetores diretores de r_1 e r_2 são $\vec{r}_1 = (0, 0, 1)$ e $\vec{r}_2 = (1, 1, -2)$, respectivamente. Assim,

$$\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{j} - \vec{i} = (-1, 1, 0).$$

Portanto, a reta r que passa por $A(3, 2, -1)$ e tem $\vec{r}$ como vetor diretor é dada por

$$r : \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) A é a interseção de r_1 e r_2 , onde

$$r_1 : x - 2 = \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{3} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 1 - y \\ z = 2 + 2y \end{cases}.$$

Solução: Os vetores diretores das retas r_1 e r_2 são $\vec{r}_1 = (1, 2, 3)$ e $\vec{r}_2 = (-1, 1, 2)$, respectivamente. Assim, o vetor diretor da reta r é dado por:

$$\vec{r} = \vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k} = (1, -5, 3).$$

Se existir $A(x, y, z)$ comum às duas retas, suas coordenadas verificam todas as equações de r_1 e r_2 simultaneamente. Reescrevendo a equação da reta r_1 na forma reduzida em relação a z , obtemos:

$$\begin{aligned} x - 2 = \frac{y + 1}{2} &\iff x = \frac{1}{2}y + \frac{5}{2} \\ \frac{y + 1}{2} = \frac{z}{3} &\iff z = \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Igualando as expressões de x e z nas equações de r_1 e r_2 , tem-se o sistema:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}y + \frac{5}{2} = 1 - y \\ \frac{3}{2}y + \frac{3}{2} = 2 + 2y \end{cases},$$

cuja solução é $y = -1$. Substituindo nas equações de r_2 , obtém-se $x = 2$ e $z = 0$. Portanto, $A = (2, -1, 0)$ e a equação paramétrica da reta r é:

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 5t \\ z = 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

84) Calcule o valor de m para que as seguintes retas sejam concorrentes:

$$\text{a) } r_1 : \begin{cases} y = 2x - 5 \\ z = -x + 2 \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : x - 5 = \frac{y}{m} = z + 1.$$

Solução: Duas retas são ditas concorrentes quando elas se intersectam em um único ponto. Para isto, reescrevemos a reta r_2 na forma paramétrica, sabendo que r_2 passa pelo ponto $(5, 0, -1)$ e tem vetor diretor $(1, m, 1)$:

$$r_2 : \begin{cases} x = 5 + t \\ y = mt \\ z = -1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Agora, podemos substituir x, y e z nas equações de r_1 :

$$\begin{cases} mt = 2(5 + t) - 5 \\ -1 + t = -(5 + t) + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m - 2)t = 5 \\ t = -1 \end{cases}.$$

Portanto, $m - 2 = -5$, de onde obtemos $m = -3$.

Se quisermos obter o ponto de interseção, basta fazer $t = -1$ e $m = -3$ nas equações de r_2 :

$$x = 5 - 1 = 4; y = (-3)(-1) = 3; z = -1 - 1 = -2.$$

Portanto, o único ponto de interseção é o ponto $A = (4, 3, -2)$.

$$\text{b) } r_1 : \begin{cases} x = m - t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} (t \in \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad r_2 : \frac{x - 1}{3} = \frac{y + 2}{1} = \frac{z}{-2}.$$

Solução: De modo análogo, podemos reescrever r_2 na forma paramétrica:

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + 3s \\ y = -2 + s \\ z = -2s \end{cases}, s \in \mathbb{R}.$$

Substituindo x, y, z nas equações de r_1 , resulta no seguinte sistema:

$$\begin{cases} m - t = 1 + 3s & (1) \\ 1 + t = -2 + s & (2) \\ 2t = -2s & (3) \end{cases}$$

De (3), temos que $t = -s$. Substituindo em (2), obtemos:

$$1 - s = -2 + s \Rightarrow 2s = 3 \Rightarrow s = \frac{3}{2} \Rightarrow t = -\frac{3}{2}.$$

Substituindo tais valores em (1), concluímos que

$$m - \left(-\frac{3}{2}\right) = 1 + 3\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow m = 4.$$

- 85) Determine um ponto na reta r equidistante dos pontos $A(2, -1, -2)$ e $B(1, 0, -1)$, em que

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \\ z = -1 + 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Desejamos determinar $C \in r$ tal que $\|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\|$. Para isso, escreva $C(2 + t, t, -1 + 2t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Então:

$$\vec{AC} = (2 + t, t, -1 + 2t) - (2, -1, -2) = (t, t + 1, 2t + 1),$$

$$\vec{BC} = (2 + t, t, -1 + 2t) - (1, 0, -1) = (t + 1, t, 2t).$$

Temos que

$$\begin{aligned} \|\vec{AC}\| = \|\vec{BC}\| &\iff \sqrt{t^2 + (t + 1)^2 + (2t + 1)^2} = \sqrt{(t + 1)^2 + t^2 + (2t)^2} \\ &\iff t^2 + (t + 1)^2 + (2t + 1)^2 = (t + 1)^2 + t^2 + (2t)^2 \\ &\iff t^2 + 2t + 1 + 4t^2 + 4t + 1 = t^2 + 2t + 1 + 4t^2 \\ &\iff 4t + 1 = 0 \iff t = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tomando $t = -\frac{1}{4}$, obtemos o ponto $C(\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}, -\frac{3}{2})$.

- 86) Determine o ângulo que a reta determinada por $A(3, -1, 4)$ e $B(1, 3, 2)$ forma com a sua projeção ortogonal sobre o plano Oxy .

Solução: A reta r que passa pelos pontos A e B tem como vetor diretor o vetor $\vec{AB} = B - A = (-2, 4, -2)$. Assim, a projeção da reta r sobre o plano Oxy terá como

vetor diretor o vetor $\vec{p} = (-2, 4, 0)$ (pois a projeção ortogonal preserva a abcissa e a ordenada, mas torna $z = 0$).

O ângulo θ formado entre r e sua projeção no plano Oxy é obtido da seguinte forma:

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{p}}{\|\vec{AB}\| \|\vec{p}\|} = \frac{(-2, 4, -2) \cdot (-2, 4, 0)}{\sqrt{24}\sqrt{20}} = \frac{20}{4\sqrt{30}} = \frac{5}{\sqrt{30}}.$$

Logo, $\theta = \arccos\left(\frac{5}{\sqrt{30}}\right) \approx 0,418 \text{ rad} \approx 23,96^\circ$.

87) Estude a posição relativa das retas r e s nos casos a seguir:

a) $r : X = (1, -1, 1) + \lambda(-2, 1, -1), \lambda \in \mathbb{R};$

$$s : \begin{cases} y + z = 3 \\ x + y - z = 6 \end{cases}.$$

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{r} = (-2, 1, -1)$. Para determinar um vetor diretor de s , fazemos $z = t$ como parâmetro e reescrevemos s na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

de onde temos $\vec{s} = (2, -1, 1)$ como um vetor diretor de s .

Veja que $\vec{s} = -\vec{r}$, ou seja, $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são vetores paralelos. Logo, r e s são retas paralelas. Tais retas não são coincidentes, pois $A(1, -1, 1) \in r$, mas $A \notin s$, uma vez que o sistema

$$\begin{cases} 3 + 2t = 1 \\ 3 - t = -1 \\ t = 1 \end{cases}$$

não admite solução real.

b) $r : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{2};$

$s : X = (0, 0, 0) + \lambda(1, 2, 0), \lambda \in \mathbb{R}.$

Solução: Escolhemos os vetores diretores $\vec{r} = (2, 3, 2)$ e $\vec{s} = (1, 2, 0)$ de r e s , respectivamente. Veja que $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos, pois não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(2, 3, 2) = \alpha(1, 2, 0)$; se existisse, teríamos $2 = \alpha \cdot 0 = 0$.

Então $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI. Neste caso, temos duas possibilidades: ou r e s são retas concorrentes ou são reversas.

Considere $A(-1, 0, -1)$ um ponto da reta r e $B(0, 0, 0)$ um ponto de s . Se $\{\vec{AB}, \vec{r}, \vec{s}\}$ for LD, então r e s são concorrentes; se $\{\vec{AB}, \vec{r}, \vec{s}\}$ for LI, então r e s são reversas.

Como $\vec{AB} = B - A = (1, 0, 1)$, temos o produto misto:

$$[\vec{AB}, \vec{r}, \vec{s}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 - 3 - 4 = -3 \neq 0.$$

Logo, $\{\vec{AB}, \vec{r}, \vec{s}\}$ é LI, ou seja, r e s são retas reversas.

c) $r : X = (8, 1, 9) + \lambda(2, -1, 3), \lambda \in \mathbb{R};$

$s : X = (3, -4, 4) + \lambda(1, -2, 2), \lambda \in \mathbb{R}.$

Solução: Escolhemos $\vec{r} = (2, -1, 3)$ e $\vec{s} = (1, -2, 2)$ como vetores diretores de r e s , respectivamente. Verifiquemos se $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LD ou LI.

Se existisse $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{r} = \alpha\vec{s}$, então

$$(2, -1, 3) = (\alpha, -2\alpha, 2\alpha) \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2 \\ -2\alpha = -1 \\ 2\alpha = 3 \end{cases}.$$

Como tal sistema não tem solução, $\{\vec{r}, \vec{s}\}$ é LI.

Sejam $A = (8, 1, 9) \in r$ e $B = (3, -4, 4) \in s$. Como $\vec{AB} = (-5, -5, -5)$, temos o produto misto:

$$[\vec{AB}, \vec{r}, \vec{s}] = \begin{vmatrix} -5 & -5 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 10 - 15 + 20 - 5 + 20 - 30 = 0.$$

Logo, $\{\vec{AB}, \vec{r}, \vec{s}\}$ é LD, ou seja, as retas r e s são concorrentes.

2.3 Equações de planos e posições relativas entre retas e planos

88) Determine uma equação geral do plano π nos seguintes casos:

a) π é paralelo ao plano $\pi_2 : 2x - 3y - z + 5 = 0$ e contém o ponto $A(4, -2, 1)$.

Solução: Um vetor normal ao plano π_2 é $\vec{n} = (2, -3, -1)$. Tendo em vista que $\vec{n}$ é também um vetor normal a qualquer plano paralelo a π_2 , a equação do plano π é da forma:

$$2x - 3y - z + d = 0,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Como $A = (4, -2, 1) \in \pi$, suas coordenadas devem verificar a equação de π , ou seja,

$$2 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) - 1 + d = 0$$

$$8 + 6 - 1 + d = 0$$

$$d = -13.$$

Logo, uma equação geral do plano π é dada por $2x - 3y - z - 13 = 0$.

b) π contém o ponto $A(-1, 2, 3)$ e é perpendicular à reta $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

Solução: Um plano π é perpendicular à reta r se, e somente se, um vetor diretor de r é paralelo a um vetor normal a π . Neste caso, $\vec{r} = (2, -3, 4)$ é um vetor diretor de r , que pode ser tomado como um vetor normal a π . Logo, a equação geral de π é da forma:

$$2x - 3y + 4z + d = 0,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Como $A(-1, 2, 3)$ é um ponto do plano, temos

$$2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + d = 0$$

$$-2 - 6 + 12 + d = 0$$

$$d = -4.$$

Logo, uma equação geral do plano é $2x - 3y + 4z - 4 = 0$.

- 89) Dada a equação geral do plano $\pi : 3x - 2y - z - 6 = 0$, determine um sistema de equações paramétricas de π .

Solução: Uma maneira de obter as equações paramétricas a partir da equação geral de um plano seria isolar uma variável em função das outras duas.

Como $z = -6 + 3x - 2y - 6$, fazendo $x = t$ e $y = s$, obtemos $z = -6 + 3t - 2s$. Assim,

$$\pi : \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = -6 + 3t - 2s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Logo, π é um plano que contém o ponto $A(0, 0, -6)$ e tem $\vec{u} = (1, 0, 3)$ e $\vec{v} = (0, 1, -2)$ como vetores diretores.

Outra maneira de solucionar esta questão seria determinar 3 pontos não colineares do plano π . Já temos que $A = (0, 0, -6) \in \pi$; fazendo $x = z = 0$, obtemos $y = -3$; fazendo $y = z = 0$, obtemos $x = 2$. Assim, $B = (0, -3, 0) \in \pi$ e $C = (2, 0, 0) \in \pi$.

Observe que $\vec{AB} = (0, -3, 6)$ e $\vec{AC} = (2, 0, 6)$ não são paralelos, pois não existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(0, -3, 6) = \alpha(2, 0, 6)$. Se existisse, teríamos $-3 = 0$.

Então, um ponto $P = (x, y, z)$ pertence a π se, e somente se, $\vec{AP}, \vec{AB}$ e $\vec{AC}$ são coplanares, ou seja, existem $t, s \in \mathbb{R}$ tais que

$$\vec{AP} = t\vec{AB} + s\vec{AC}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} P &= A + t\vec{AB} + s\vec{AC} \\ (x, y, z) &= (0, 0, -6) + t(0, -3, 6) + s(2, 0, 6), \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{cases} x = 2s \\ y = -3t \\ z = -6 + 6t + 6s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

- 90) Determine a equação geral do plano cujas equações paramétricas são

$$\pi : \begin{cases} x = 1 + h - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 4 + 2h - 2t \end{cases}, \quad h, t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Como $\vec{u} = (1, 0, 2)$ e $\vec{v} = (-2, -1, -2)$ são vetores diretores do plano π (e portanto são coplanares), então eles são LI. Assim, um vetor normal ao plano deve ser simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, isto é,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 2\vec{j} - 1\vec{k} = (2, -2, -1).$$

Assim, uma equação geral de π é da forma

$$2x - 2y - z + d = 0,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Sabemos pelo sistema de equações paramétricas dado que $A = (1, 1, 4)$ é um ponto do plano. Logo, suas coordenadas devem satisfazer a equação do plano:

$$2 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 4 + d = 0$$

$$-4 + d = 0$$

$$d = 4.$$

Logo, uma equação geral do plano π é $2x - 2y - z + 4 = 0$.

- 91) Escreva uma equação geral e um sistema de equações paramétricas do plano π determinado pelos pontos $A(1, 0, 2)$, $B(-1, 2, -1)$ e $C(1, 1, -1)$.

Solução: Fazendo $\vec{AB} = B - A = (-2, 2, -3)$ e $\vec{AC} = C - A = (0, 1, -3)$, temos que um vetor normal ao plano π é o vetor

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - 6\vec{j} - 2\vec{k} = (-3, -6, -2).$$

Assim, a equação geral do plano é da forma

$$-3x - 6y - 2z + d = 0,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Como $A(1, 0, 2) \in \pi$, temos que as coordenadas de A devem satisfazer a equação $-3 \cdot 1 - 6 \cdot 0 - 2 \cdot 2 + d = 0$. Portanto, $d = 7$ e a equação geral do plano é dada por $-3x - 6y - 2z + 7 = 0$.

Considerando agora $A(1, 0, 2) \in \pi$ e os vetores diretores $\vec{AB} = (-2, 2, -3)$ e $\vec{AC} = (0, 1, -3)$, concluímos que as equações paramétricas de π são obtidas a partir da igualdade:

$$(x, y, z) = (1, 0, 2) + t(-2, 2, -3) + s(0, 1, -3),$$

ou seja,

$$\pi : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t + s \\ z = 2 - 3t - 3s \end{cases}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

- 92) Determine o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que os pontos $A(\alpha, 1, 9)$, $B(2, 3, 4)$, $C(-4, -1, 6)$ e $D(0, 2, 4)$ sejam coplanares.

Solução: Os pontos serão coplanares se A pertencer ao plano π determinado por B, C, D . Tal plano possui como vetores diretores $\vec{BC} = C - B = (-6, -4, 2)$ e $\vec{BD} = D - B = (-2, -1, 0)$.

Repare que $\vec{BC}$ e $\vec{BD}$ são LI. Logo, $\vec{n} = \vec{BC} \times \vec{BD}$ é um vetor normal ao plano π , ou seja,

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & -4 & 2 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - 2\vec{k} = (2, -4, -2).$$

Assim, a equação geral do plano π é da forma

$$2x - 4y - 2z + d = 0,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Como $B(2, 3, 4) \in \pi$, temos que

$$2 \cdot 2 - 4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + d = 0,$$

ou seja, $d = 16$. Portanto, a equação do plano é

$$2x - 4y - 2z + 16 = 0.$$

Impondo agora que $A(\alpha, 1, 9) \in \pi$, temos

$$2 \cdot \alpha - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 9 + 16 = 0$$

$$2\alpha - 4 - 18 + 16 = 0$$

$$2\alpha - 6 = 0$$

$$\alpha = 3.$$

93) Determine uma equação geral do plano π nos seguintes casos:

a) π passa pelos pontos $A(-3, 1, -2)$ e $B(-1, 2, 1)$ e é paralelo à reta

$$r : \frac{x}{2} = \frac{z}{-3}; y = 4.$$

Solução: Uma reta é paralela a um plano se, e somente se, seu vetor diretor $\vec{r}$ é ortogonal a um vetor normal $\vec{n}$ ao plano.

Fazendo $x = 0$ na equação de r , obtemos $y = 4$ e $z = 0$, ou seja, $C = (0, 4, 0) \in r$. Fazendo $x = 2$, obtemos $y = 4$ e $z = -3$, ou seja, $D = (2, 4, -3) \in r$. Então

$$\vec{r} = \overrightarrow{CD} = D - C = (2, 0, -3)$$

é um vetor diretor de r .

Sendo $A, B \in \pi$, então $\vec{n}$ é ortogonal a $\overrightarrow{AB}$. Além disso, $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{r}$. Portanto, $\vec{n}$ é paralelo a $\overrightarrow{AB} \times \vec{r}$, em que

$$\overrightarrow{AB} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 12\vec{j} - 2\vec{k} = (-3, 12, -2).$$

Podemos assumir $\vec{n} = (-3, 12, -2)$ um vetor normal a π . Logo, a equação geral de π é da forma

$$-3x + 12y - 2z + d = 0,$$

para algum $d \in \mathbb{R}$. Como $B(-1, 2, 1) \in \pi$, devemos ter

$$-3 \cdot (-1) + 12 \cdot 2 - 2 + d = 0.$$

Logo, $d = -25$, isto é, uma equação geral do plano π é $-3x + 12y - 2z - 25 = 0$.

b) π contém os pontos $A(1, -2, 2)$ e $B(-3, 1, -2)$ e é perpendicular ao plano

$$\pi_1 : 2x + y - z + 8 = 0.$$

Solução: Dois planos são perpendiculares se, e somente se, seus vetores normais são ortogonais.

O vetor normal ao plano π_1 é $\vec{n}_1 = (2, 1, -1)$. Como π é perpendicular a π_1 , temos que seu vetor normal $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{n}_1$. Além disso, como $A, B \in \pi$, o vetor

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, 3, -4)$$

deve ser paralelo a π e, portanto, ortogonal a $\vec{n}_1$. Logo,

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{n}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 12\vec{j} - 10\vec{k} = (1, -12, -10).$$

Portanto, a equação geral de π é da forma $x - 12y - 10z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$.

Como $A \in \pi$, suas coordenadas devem verificar esta equação, ou seja,

$$d = -1 + 12 \cdot (-2) + 10 \cdot 2 = -5.$$

Logo, a equação geral do plano π é $x - 12y - 10z - 5 = 0$.

c) π contém o ponto $A(2, 1, 2)$ e é paralelo ao plano Oxy .

Solução: A equação do plano Oxy é $z = 0$, cujo vetor normal é $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Como π é paralelo a Oxy , podemos assumir que $\vec{n}$ é normal a π , ou seja,

$$\pi : z + d = 0$$

é uma equação geral de π , para algum $d \in \mathbb{R}$. Além disso, como $A(2, 1, 2) \in \pi$, devemos ter $2 + d = 0$, ou seja, $d = -2$. Logo, a equação geral do plano π é

$$z - 2 = 0.$$

d) π contém a reta

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

e é perpendicular ao plano $\pi_2 : 2x + 2y - 3z = 0$.

Solução: Uma reta r está contida em um plano π se $\vec{r}$ é ortogonal a $\vec{n}$, em que $\vec{r}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ é um vetor normal a π .

Como $\pi \perp \pi_2$, então $\vec{n} \perp \vec{n}_2$, em que $\vec{n}_2 = (2, 2, -3)$. Um vetor diretor da reta r é $\vec{r} = (1, -1, 2)$. Portanto,

$$\vec{n} = \vec{n}_2 \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 7\vec{j} - 4\vec{k} = (1, -7, -4).$$

Assim, a equação geral do plano π é da forma $x - 7y - 4z + d = 0$, com $d \in \mathbb{R}$. Como $r \subset \pi$, todos os pontos de r pertencem a π , em particular $A = (2, 1, 3) \in r$. Logo,

$$2 - 7 \cdot 1 - 4 \cdot 3 + d = 0 \Rightarrow d = 17.$$

Então, a equação de π é

$$x - 7y - 4z + 17 = 0.$$

94) Determine o ângulo θ entre os seguintes planos:

a) $\pi_1 : x - y + 4 = 0$ e $\pi_2 : 2x - y - z = 0$;

Solução: Os vetores normais a π_1 e π_2 são $\vec{n}_1 = (1, -1, 0)$ e $\vec{n}_2 = (2, -1, -1)$, respectivamente. Como $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ (pois o ângulo entre planos possui essa variação), podemos usar a igualdade:

$$\cos(\theta) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

Então,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{|(1, -1, 0) \cdot (2, -1, -1)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{2 + 1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6} \text{ rad} = 30^\circ.$$

b) $\pi_1 : x + 2y - 6 = 0$ e $\pi_2 : y = 0$;

Solução: Os vetores normais aos planos π_1 e π_2 são $\vec{n}_1 = (1, 2, 0)$ e $\vec{n}_2 = (0, 1, 0)$, respectivamente. Então,

$$\cos(\theta) = \frac{|(1, 2, 0) \cdot (0, 1, 0)|}{\sqrt{1^2 + 2^2} \sqrt{1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Logo,

$$\theta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) \approx 0,464 \text{ rad} \approx 26,57^\circ.$$

$$c) \pi_1 : \begin{cases} x = 1 + h - t \\ y = h + 2t \\ z = h \end{cases} \quad \text{e} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2h \\ z = h + t \end{cases}, \quad h, t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Os vetores $\vec{u} = (1, 1, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 2, 0)$ são paralelos a π_1 e são LI. Portanto, um vetor normal a π_1 é o vetor

$$\vec{n}_1 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k} = (-2, -1, 3).$$

Os vetores $\vec{w} = (0, -2, 1)$ e $\vec{z} = (1, 0, 1)$ são paralelos a π_2 e são LI. Assim, um vetor normal a π_2 é o vetor

$$\vec{n}_2 = \vec{w} \times \vec{z} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 1\vec{j} + 2\vec{k} = (-2, 1, 2).$$

Então,

$$\begin{aligned} \cos(\theta) &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} = \frac{|(-2, -1, 3) \cdot (-2, 1, 2)|}{\sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 3^2} \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 2^2}} \\ &= \frac{|4 - 1 + 6|}{\sqrt{14}\sqrt{9}} = \frac{9}{3\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\theta = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{14}}\right) \approx 36,7^\circ.$$

- 95) Encontre as equações paramétricas da reta de interseção dos planos $\pi_1 : 3x + y - 3z - 5 = 0$ e $\pi_2 : x - y - z - 3 = 0$.

Solução: A intersecção de dois planos não paralelos é uma reta r cujos pontos $(x, y, z) \in r$ satisfazem, simultaneamente, as equações dos dois planos.

Logo, os pontos de r constituem a solução do sistema:

$$r : \begin{cases} 3x + y - 3z - 5 = 0 \\ x - y - z - 3 = 0 \end{cases}.$$

Somando as duas equações, obtemos:

$$4x - 4z - 8 = 0 \Rightarrow x - z = 2 \Rightarrow x = z + 2.$$

Substituindo na segunda equação:

$$(z + 2) - y - z - 3 = 0 \Rightarrow 2 - y = 3 \Rightarrow y = -1.$$

Logo, a solução do sistema é

$$(x, y, z) = (z + 2, -1, z),$$

com $z \in \mathbb{R}$. Fazendo $z = t$, obtemos

$$(x, y, z) = (t + 2, -1, t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Assim, as equações paramétricas da reta r são:

$$r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -1 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2.4 Distância entre ponto e reta, entre retas, entre reta e plano e entre planos

96) Calcule a distância entre os pontos $P(-2, 0, 1)$ e $Q(1, -3, 2)$.

Solução: Vamos utilizar a fórmula da distância entre dois pontos $P = (x_1, y_1, z_1)$ e $Q = (x_2, y_2, z_2)$:

$$d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Logo,

$$d(P, Q) = \sqrt{(1 - (-2))^2 + (-3 - 0)^2 + (2 - 1)^2} = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}.$$

Outro modo de fazer esse exercício é calcular a norma do vetor $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (3, -3, 1)$, ou seja,

$$d(P, Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{3^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{19}.$$

97) Calcule a distância do ponto P à reta r nos seguintes casos:

a) $P(0, -1, 0)$ e $r : \begin{cases} x = 2z - 1 \\ y = z + 1 \end{cases}$.

Solução: Vamos utilizar a fórmula da distância de um ponto a uma reta:

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{r} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{r}\|},$$

em que A é um ponto qualquer da reta r .

Fazendo $z = t$, podemos escrever as equações paramétricas da reta r por

$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

O vetor diretor de r é $\vec{r} = (2, 1, 1)$ cuja norma é $\|\vec{r}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{6}$. Escolhemos $A(-1, 1, 0)$ como um ponto de r . Logo, podemos escrever $\vec{AP} = P - A = (1, -2, 0)$ tal que

$$\vec{r} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2\vec{i} + 1\vec{j} - 5\vec{k}.$$

Assim, $\|\vec{r} \times \vec{AP}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-5)^2} = \sqrt{30}$. Usando a equação da distância, obtemos:

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{r} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\sqrt{30}}{\sqrt{6}} = \sqrt{5}.$$

b) $P(1, 0, 1)$ e $r : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \frac{\lambda}{2} \\ z = \frac{\lambda}{3} \end{cases}$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{r} = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ e um ponto de r é $A(0, 0, 0)$. Logo, $\vec{AP} = P - A = (1, 0, 1)$ e

$$\vec{r} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{1}{2}\vec{k}.$$

Portanto,

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{r} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{2})^2}}{1^2 + (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \frac{\sqrt{\frac{17}{18}}}{\sqrt{\frac{49}{36}}} = \frac{\sqrt{34}}{7}.$$

c) $P(1, -1, 4)$ e $r : \frac{x-2}{4} = \frac{y}{-3} = \frac{z-1}{-2}$.

Solução: Um vetor diretor de r é $\vec{r} = (4, -3, -2)$ e um ponto de r é $A(2, 0, 1)$. Logo, $\vec{AP} = P - A = (-1, -1, 3)$ e

$$\vec{r} \times \vec{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -11\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}.$$

Assim,

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{r} \times \vec{AP}\|}{\|\vec{r}\|} = \frac{\sqrt{(-11)^2 + (-10)^2 + (-7)^2}}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{270}}{\sqrt{29}}.$$

98) Calcule a distância do ponto P ao plano π nos casos:

a) $P(2, -1, 2)$ e $\pi : 2x - 2y - z + 3 = 0$.

Solução: A distância de um ponto $P(x_0, y_0, z_0)$ a um plano $\pi : ax + by + cz + d = 0$ é dada por:

$$d(P, \pi) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Logo,

$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 + 3|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2}} = \frac{|7|}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}.$$

b) $P(1, 1, 1)$ e $\pi : \begin{cases} x = 2 + 2h + 3t \\ y = -1 + h + t \\ z = 2 - h \end{cases}, \quad h, t \in \mathbb{R}.$

Solução: Os vetores $\vec{u} = (2, 1, -1)$ e $\vec{v} = (3, 1, 0)$ são vetores diretores do plano π . Assim, um vetor normal ao plano deve ser simultaneamente ortogonal a $\vec{u}$ e a $\vec{v}$, ou seja,

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - 3\vec{j} - 1\vec{k} = (1, -3, -1).$$

Assim, a equação geral de π é da forma $x - 3y - z + d = 0$, para algum $d \in \mathbb{R}$. Pelo sistema de equações paramétricas dado no enunciado, temos que $A(2, -1, 2) \in \pi$, ou seja,

$$2 - 3 \cdot (-1) - 2 + d = 0 \Rightarrow d = -3.$$

Logo, uma equação geral do plano é $\pi : x - 3y - z - 3 = 0$. Portanto, para $P(1, 1, 1)$, temos:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 - 3 \cdot 1 - 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{11}} = \frac{6}{\sqrt{11}}.$$

99) Calcule a distância entre as retas dadas:

$$\text{a) } r_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Consideremos os vetores diretores $\vec{r}_1 = (-1, 1, -2)$ e $\vec{r}_2 = (1, -3, 2)$ das retas r_1 e r_2 , respectivamente.

Vamos verificar se esses vetores são LDs. Para isso, suponha que exista $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(-1, 1, -2) = \alpha(1, -3, 2)$. Neste caso, teríamos

$$\begin{cases} \alpha = -1 \\ -3\alpha = 1 \\ 2\alpha = -2 \end{cases},$$

o que não admite solução. Portanto, $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ são LIs, ou seja, as retas r_1 e r_2 não são paralelas.

Se r_1 e r_2 forem concorrentes, a distância entre elas será nula. Se forem reversas, a distância entre elas será estritamente positiva.

Considere $A(2, 3, 1) \in r_1$ e $B(0, -1, 0) \in r_2$. Neste caso, $\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, -4, -1)$. Se $\{\overrightarrow{AB}, \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ for LD, então r_1 e r_2 serão retas concorrentes. Caso contrário, serão reversas. Veja que

$$[\vec{AB}, \vec{r}_1, \vec{r}_2] = \begin{vmatrix} -2 & -4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Logo, $\{\vec{AB}, \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ é LI, ou seja, r_1 e r_2 são reversas. Portanto, a distância entre r_1 e r_2 é dada por

$$d(r_1, r_2) = \frac{||[\vec{AB}, \vec{r}_1, \vec{r}_2]||}{||\vec{r}_1 \times \vec{r}_2||}.$$

Como

$$\vec{r}_1 \times \vec{r}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{i} + 0\vec{j} + 2\vec{k} = (-4, 0, 2),$$

temos que

$$d(r_1, r_2) = \frac{|6|}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 2^2}} = \frac{6}{\sqrt{20}} = \frac{3}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{b) } r_1 : x = y = z \text{ e } r_2 : \begin{cases} y = x \\ z = 2x - 1 \end{cases}.$$

Solução: Tomando $x = t$, podemos reescrever as equações das retas r_1 e r_2 como:

$$r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 2t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, os vetores $\vec{r}_1 = (1, 1, 1)$ e $\vec{r}_2 = (1, 1, 2)$ são vetores diretores de r_1 e r_2 , respectivamente. Claramente, eles são LI (pois um não é um múltiplo do outro). Portanto, r_1 e r_2 são retas concorrentes ou reversas.

Para $A(0, 0, 0) \in r_1$ e $B(0, 0, -1) \in r_2$, temos o vetor $\vec{AB} = B - A = (0, 0, -1)$. Logo,

$$[\vec{AB}, \vec{r}_1, \vec{r}_2] = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 + 1 = 0.$$

Logo, $\{\vec{AB}, \vec{r}_1, \vec{r}_2\}$ é LD, ou seja, r_1 e r_2 são retas concorrentes. Neste caso, existe um ponto de interseção e, portanto, $d(r_1, r_2) = 0$.

Observação: Para obtermos o ponto de interseção de r_1 e r_2 basta fazer $t = 2t - 1$, ou seja, $t = 1$. Portanto, $x = y = z = 1$ são as coordenadas do ponto, isto é, $P(1, 1, 1)$ é o único ponto de interseção de r_1 e r_2 .

c) $r_1 : x = 3; y = 4$ e $r_2 = Oz$.

Solução: Parametricamente, podemos reescrever essas duas retas como

$$r_1 : \begin{cases} x = 3 \\ y = 4 \\ z = t \end{cases} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo, $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = (0, 0, 1)$ é o vetor diretor de r_1 e r_2 . Como tais vetores são paralelos, r_1 e r_2 são retas paralelas. Considere $A(3, 4, 0) \in r_1$. Como $A \notin r_2$, concluímos que tais retas não são coincidentes. Neste caso,

$$d(r_1, r_2) = d(P, r_1),$$

para qualquer $P \in r_2$. Considerando $P(0, 0, 0) \in r_2$, temos $\overrightarrow{AP} = P - A = (-3, -4, 0)$, temos

$$\vec{r}_1 \times \overrightarrow{AP} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 3\vec{j} = (4, -3, 0).$$

Portanto,

$$d(P, r_1) = \frac{\|\vec{r}_1 \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\vec{r}_1\|} = \frac{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + 0^2}}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \sqrt{25} = 5.$$

Assim, $d(r_1, r_2) = 5$.

100) Calcule a distância entre os planos paralelos:

a) $\pi_1 : 2x - y + 2z + 9 = 0$ e $\pi_2 : 4x - 2y + 4z - 21 = 0$.

Solução: Veja que $\vec{n}_1 = (2, -1, 2)$ e $\vec{n}_2 = (4, -2, 4)$ são vetores normais aos planos π_1 e π_2 , respectivamente. Como $\vec{n}_2 = 2\vec{n}_1$, os planos π_1 e π_2 são paralelos distintos, uma vez que $-21 \neq 2 \cdot 9$. Assim,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2),$$

onde P_1 é um ponto qualquer do plano π_1 .

Tome $P_1(0, 0, -\frac{9}{2}) \in \pi_1$. Portanto,

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P_1, \pi_2) = \frac{|4 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-\frac{9}{2}) - 21|}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|-39|}{6} = \frac{13}{2}.$$

$$\text{b) } \pi_1 : x + y + z - \frac{5}{2} = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : \begin{cases} x = 2 - \lambda - \mu \\ y = \mu \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Solução: Primeiramente, vamos verificar se tais planos são paralelos distintos (caso contrário, a distância entre eles será nula).

Temos que $\vec{n}_1 = (1, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano π_1 . Como $\vec{u} = (-1, 0, 1)$ e $\vec{v} = (-1, 1, 0)$ são vetores diretores do plano π_2 , segue que

$$\vec{n}_2 = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, -1, -1)$$

é um vetor normal ao plano π_2 . Claramente, $\vec{n}_1$ e $\vec{n}_2$ são paralelos, indicando que π_1 e π_2 são paralelos.

Veja agora que $P_2(2, 0, 0) \in \pi_2$ não pertence a π_1 , pois $2 + 0 + 0 - \frac{5}{2} = -\frac{1}{2} \neq 0$.

Logo, tais planos são distintos e

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(\pi_1, P_2) = \frac{|2 + 0 + 0 - \frac{5}{2}|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

- 101) Determine os pontos da reta $r : x - 1 = y = z$ que equidistam dos pontos $A = (1, 0, 0)$ e $B = (0, 1, 1)$.

Solução: Fazendo $z = t$, temos que a reta r pode ser reescrita como

$$r : x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = t.$$

Logo, todo $P \in r$ é da forma $P(1 + t, t, t)$, com $t \in \mathbb{R}$. Então:

$$d(P, A) = \sqrt{(1 + t - 1)^2 + (t - 0)^2 + (t - 0)^2},$$

$$d(P, B) = \sqrt{(1 + t - 0)^2 + (t - 1)^2 + (t - 1)^2}.$$

Impondo que $d(P, A) = d(P, B)$ e utilizando os quadrados das distâncias, temos:

$$t^2 + t^2 + t^2 = (1 + t)^2 + (t - 1)^2 + (t - 1)^2.$$

Assim,

$$3t^2 = t^2 + 2t + 1 + 2(t^2 - 2t + 1) = 3t^2 - 2t + 3,$$

de onde obtemos

$$-2t + 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}.$$

Substituindo em P :

$$P = \left(1 + \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Portanto, o ponto da reta r equidistante de A e B é

$$P\left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

- 102) Obtenha uma equação vetorial da reta r paralela à reta $s : \begin{cases} 2x - z = 3 \\ y = 2 \end{cases}$, concorrente a $m : X = (-1, 1, 1) + \lambda(0, -1, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e que dista 1 do ponto $P(1, 2, 1)$.

Solução: Se r é paralela a s , então seus vetores diretores são paralelos.

Fazendo $x = \alpha$ nas equações de s , temos

$$s : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2 \\ z = 2\alpha - 3 \end{cases}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Assim, $\vec{s} = (1, 0, 2)$ é um vetor diretor de s , e de r também. Logo,

$$r : X = Q + t(1, 0, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se r e m são retas concorrentes, então elas possuem um único ponto em comum. Tal ponto tem a forma $Q(-1, 1 - \lambda, 1 + 2\lambda)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Dessa forma, as equações paramétricas da reta r são:

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda + 2t \end{cases}.$$

Pelo enunciado, temos que r dista 1 do ponto $P(1, 2, 1)$, ou seja,

$$d(P, r) = \frac{\|\vec{QP} \times \vec{s}\|}{\|\vec{s}\|} = 1.$$

Como $\vec{QP} = P - Q = (1 - (-1), 2 - (1 - \lambda), 1 - (1 + 2\lambda)) = (2, 1 + \lambda, -2\lambda)$, então

$$\vec{QP} \times \vec{s} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 + \lambda & -2\lambda \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (2 + 2\lambda)\vec{i} - (4 + 2\lambda)\vec{j} - (1 + \lambda)\vec{k}.$$

Portanto,

$$\frac{\sqrt{(2 + 2\lambda)^2 + (4 + 2\lambda)^2 + (1 + \lambda)^2}}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2}} = 1,$$

de onde obtemos $(2 + 2\lambda)^2 + (4 + 2\lambda)^2 + (1 + \lambda)^2 = 5$. Assim,

$$4\lambda^2 + 8\lambda + 4 + 4\lambda^2 + 16\lambda + 16 + \lambda^2 + 2\lambda + 1 - 5 = 0$$

$$9\lambda^2 + 26\lambda + 16 = 0.$$

Resolvendo essa equação de segundo grau, temos que $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -\frac{8}{9}$. Para $\lambda_1 = -2$, obtemos $Q(-1, 3, -3)$ e para $\lambda_2 = -\frac{8}{9}$, obtemos $Q(-1, \frac{17}{9}, -\frac{7}{9})$.

Temos então duas retas que satisfazem as condições do enunciado:

$$r_1 : X = (-1, 3, -3) + t(1, 0, 2), \quad t \in \mathbb{R},$$

$$r_2 : X = (-1, \frac{17}{9}, -\frac{7}{9}) + t(1, 0, 2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- 103) Dê uma equação geral do plano π que passa pelos pontos $P(1, 1, 1)$ e $Q(2, 1, -1)$ e que dista 1 da reta $r : X = (1, 0, 2) + \lambda(1, 0, 2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solução: Como a distância do plano π à reta r é igual a 1, então r e π são paralelos, caso contrário $d(r, \pi) = 0$. Logo, $\vec{r} = (1, 0, 2)$ é ortogonal a $\vec{n}$, onde $\vec{r}$ é um vetor diretor de r e $\vec{n}$ é um vetor normal a π . Como $P, Q \in \pi$, então $\vec{n}$ é ortogonal a $\vec{PQ} = (1, 0, -2)$ também. Assim, $\vec{n}$ é paralelo a

$$\vec{PQ} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{j} = (0, -4, 0).$$

Então a equação geral de π é da forma $-4y + d = 0$, para algum $d \in \mathbb{R}$. Como $P(1, 1, 1) \in \pi$, as coordenadas de P devem verificar a equação do plano:

$$-4 \cdot 1 + d = 0 \Rightarrow d = 4.$$

Logo, uma equação geral do plano π é:

$$\pi : -4y + 4 = 0.$$

Ou ainda $\pi : -y + 1 = 0$.

104) Determine os pontos da reta $r : x - 1 = 2y = z$ que equidistam dos planos

$$\pi_1 : 2x - 3y - 4z - 3 = 0 \quad \text{e} \quad \pi_2 : 4x - 3y - 2z + 3 = 0.$$

Solução: A reta r está na forma simétrica. Fazendo $z = t$, temos $x = 1 + t$, $y = \frac{t}{2}$ e $z = t$. Logo, $P(1 + t, \frac{t}{2}, t) \in r$. Impondo que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, obtemos

$$\frac{|2 \cdot (1 + t) - 3 \cdot (\frac{t}{2}) - 4 \cdot t - 3|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + (-4)^2}} = \frac{|4 \cdot (1 + t) - 3 \cdot (\frac{t}{2}) - 2 \cdot t + 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2 + (-2)^2}}.$$

Logo,

$$|2 + 2t - \frac{3t}{2} - 4t - 3| = |4 + 4t - \frac{3t}{2} - 2t + 3|,$$

$$|-\frac{7}{2}t - 1| = |\frac{t}{2} + 7|.$$

Resulta que $-\frac{7}{2}t - 1 = \pm(\frac{t}{2} + 7)$, ou seja, $t = \pm 2$. Para $t = -2$, obtemos $P(-1, -1, -2)$. Para $t = 2$, obtemos $P(3, 1, 2)$. Esses são os pontos que equidistam dos planos π_1 e π_2 .

Capítulo 3

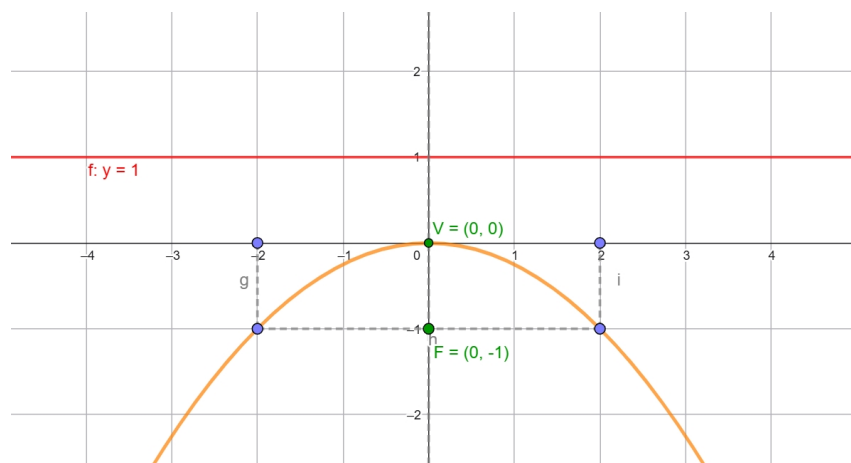
Cônicas

3.1 Parábola

105) Para cada uma das parábolas construa o gráfico, encontre o foco e uma equação para a diretriz.

a) $x^2 = -4y$.

Solução:



Pela equação da parábola, a cada valor de $y \leq 0$ correspondem dois valores de x simétricos. Esta é uma parábola com concavidade voltada para baixo.

Como o vértice está na origem, a equação padrão é da forma

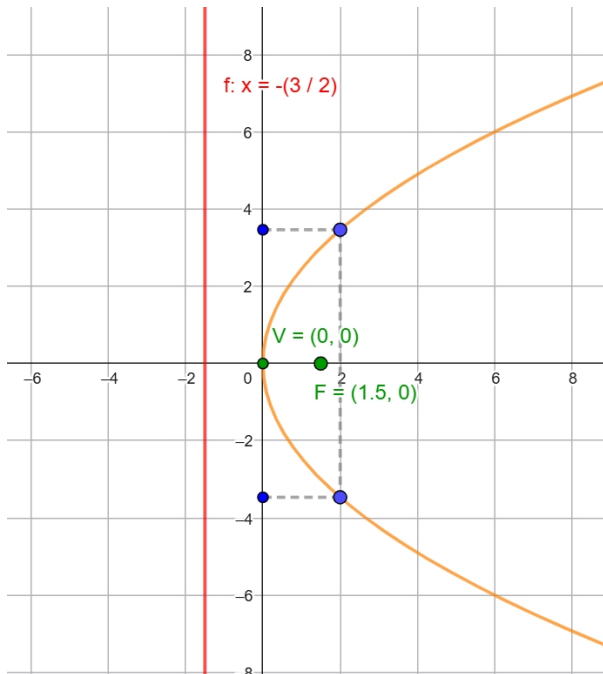
$$x^2 = 4py,$$

em que $p \in \mathbb{R}$ é a distância do foco ao vértice (e do vértice à reta diretriz, mas em sentido oposto). Portanto, temos uma parábola em que

$$4p = -4 \Rightarrow p = -1.$$

Portanto, o foco da parábola é o ponto $F = (0, -1)$ e sua reta diretriz tem equação $y = 1$.

b) $y^2 = 6x$.



Para esta equação, a cada valor de $x \geq 0$ correspondem dois valores de y simétricos. Está é uma parábola com concavidade voltada para a direita. Como o vértice está na origem, temos a equação da forma

$$y^2 = 4px,$$

em que p é a distância do vértice ao foco e à reta diretriz (no sentido oposto). Assim,

$$4p = 6 \Rightarrow p = \frac{3}{2}.$$

Portanto, o foco da parábola é o ponto $F = (\frac{3}{2}, 0)$ e sua reta diretriz tem equação $x = -\frac{3}{2}$.

106) Obtenha uma equação da parábola que satisfaça as condições dadas.

a) Vértice $V(0, 0)$; diretriz $d : y = -2$.

Solução: Como a diretriz é uma reta paralela ao eixo Ox , o eixo de simetria da parábola é vertical. O vértice na origem indica que a equação padrão da

parábola é da forma

$$x^2 = 4py,$$

em que p é a distância do vértice à diretriz (e também ao foco, mas em sentido oposto). Da equação $y = -p$, temos $p = 2$. Logo, a equação da parábola torna-se $x^2 = 8y$.

- b) Foco: $F(2, 0)$; diretriz $d : x + 2 = 0$.

Solução: A reta diretriz é paralela ao eixo Oy ($x = -2$), logo o eixo de simetria é horizontal. A equação padrão da parábola é da forma

$$y^2 = 4px,$$

em que p é a distância do vértice ao foco e à diretriz (no sentido oposto). Da equação $x = -2$, temos que $p = 2$. Portanto, a equação é $y^2 = 8x$.

- c) Vértice: $V(2, -1)$; foco: $F(5, -1)$.

Solução: O vértice e o foco estão sobre a reta $y = -1$. Logo, o eixo de simetria da parábola é horizontal. Como o vértice é $(2, -1)$, a equação padrão da parábola é da forma:

$$(y - (-1))^2 = 4p(x - 2),$$

em que p é a distância do vértice ao foco:

$$p = d(V, F) = \sqrt{(5 - 2)^2 + (-1 - (-1))^2} = \sqrt{3^2} = 3.$$

Logo, a equação da parábola torna-se

$$(y + 1)^2 = 12(x - 2).$$

Mais precisamente, temos

$$y^2 + 2y + 1 = 12x - 24 \Rightarrow y^2 + 2y - 12x + 25 = 0.$$

- d) Vértice: $V(0, 0)$; passando pelo ponto $P(2, -3)$ e simetria em relação ao Oy .

Solução: Como o vértice é na origem e o eixo de simetria é vertical, a parábola tem equação padrão da forma

$$x^2 = 4py,$$

em que p é a distância do vértice ao foco.

Como $P(2, -3)$ pertence à parábola, temos

$$2^2 = 4p(-3) \Rightarrow 4 = -12p \Rightarrow p = -\frac{1}{3}.$$

Portanto, a equação da parábola é

$$x^2 = -\frac{4}{3}y,$$

ou seja, $4y + 3x^2 = 0$.

- e) eixo de simetria paralelo à reta $y = 0$ e passando pelos pontos $P_1(-2, 4)$, $P_2(-3, 2)$ e $P_3 = (-11, -2)$.

Solução: Como o eixo de simetria é horizontal, a equação da parábola é da forma

$$x = ay^2 + by + c,$$

com $a, b, c \in \mathbb{R}$. As coordenadas dos pontos P_1 , P_2 e P_3 devem satisfazer a equação desta parábola, isto é:

$$\begin{cases} -2 = a \cdot 4^2 + b \cdot 4 + c \\ -3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ -11 = a \cdot (-2)^2 + b \cdot (-2) + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 16a + 4b + c = -2 \\ 4a + 2b + c = -3 \\ 4a - 2b + c = -11 \end{cases}.$$

A matriz dos coeficientes deste sistema é

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é

$$D = \begin{vmatrix} 16 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 48.$$

Vamos resolver pela regra de Cramer.

Determinante D_a :

$$D_a = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \\ -11 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -11 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -11 & -2 \end{vmatrix} = -12.$$

$$a = \frac{D_a}{D} = -\frac{12}{48} = -\frac{1}{4}.$$

Determinante D_b :

$$D_b = \begin{vmatrix} 16 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 4 & -11 & 1 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -11 & 1 \end{vmatrix} - (-2) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} = 96.$$

$$b = \frac{D_b}{D} = \frac{96}{48} = 2.$$

Determinante D_c :

$$D_c = \begin{vmatrix} 16 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & -3 \\ 4 & -2 & -11 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -11 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 4 & -11 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -288.$$

$$c = \frac{D_c}{D} = \frac{-288}{48} = -6.$$

Solução:

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = 2, \quad c = -6.$$

Logo, a equação da parábola é

$$x = -\frac{1}{4}y^2 + 2y - 6.$$

- f) eixo de simetria paralelo ao eixo Ox , vértice $V(4, -3)$, passando pelo ponto $P(2, 1)$.

Solução: Como o eixo de simetria é horizontal e o vértice é o ponto $(4, -3)$, a equação padrão da parábola é da forma

$$(y - (-3))^2 = 4p(x - 4).$$

Como $P(2, 1)$ pertence à parábola, então

$$(1 + 3)^2 = 4p(2 - 4) \Rightarrow 16 = -8p \Rightarrow p = -2.$$

Portanto, a equação obtida é

$$(y + 3)^2 = -8(x - 4),$$

ou seja, $y^2 + 6y + 8x - 23 = 0$.

g) Vértice: $V(4, 1)$; diretriz $d : x + 4 = 0$.

Solução: Como a reta diretriz é vertical, o eixo de simetria é horizontal. Então, a equação padrão da parábola é da forma

$$(y - 1)^2 = 4p(x - 4),$$

em que p é a distância do vértice à reta diretriz. Logo, basta calcular a distância de V ao ponto $P(-4, 1)$:

$$p = d(V, P) = \sqrt{(-4 - 4)^2 + (1 - 1)^2} = \sqrt{64} = 8.$$

Logo, a forma canônica da parábola é

$$(y - 1)^2 = 32(x - 4),$$

o que resulta em $y^2 - 2y - 32x + 129 = 0$.

107) Dada a parábola de equação $y = -x^2 + 4x + 5$, determine seu vértice, os pontos de interseção com os eixos coordenados, seu foco e uma equação da reta diretriz.

a) o vértice;

Solução: Inicialmente, transformemos esta equação na forma padrão:

$$-x^2 + 4x = y - 5$$

$$x^2 - 4x = -y + 5$$

$$x^2 - 4x + 4 = -y + 5 + 4$$

$$(x - 2)^2 = -(y - 9).$$

Logo, o vértice desta parábola é $V(2, 9)$.

b) as interseções com os eixos coordenados;

Solução: Fazendo $x = 0$, obtemos $y = 5$. Assim, a parábola intersecta o eixo Oy no ponto $(0, 5)$.

Fazendo $y = 0$, obtemos $-x^2 + 4x + 5 = 0$, cuja solução é -1 ou 5 . Portanto, a parábola intersecta o eixo Ox nos pontos $(-1, 0)$ e $(5, 0)$.

c) o foco;

Solução: Pela equação $(x - 2)^2 = -(y - 9)$, segue que o eixo de simetria da parábola é a reta $x = 2$ (reta que contém o vértice). Além disso, $4p = -1$, ou seja, $p = -\frac{1}{4}$, sendo p a distância do vértice ao foco. Neste caso, como o foco também está sobre a reta $x = 2$, sendo $V(2, 9)$ o vértice, temos

$$F(2, 9 + p) = (2, 9 - \frac{1}{4}) = (2, \frac{35}{4}).$$

d) uma equação da reta diretriz.

Solução: Em continuação ao item anterior, sendo $V(2, 9)$ o vértice, temos que a equação da reta diretriz é

$$y = 9 - p = 9 - \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{37}{4}.$$

108) Obtenha as equações paramétricas da parábola de equação:

a) $y^2 = -4x$.

Solução: Nesta equação, y pode assumir qualquer valor real. Fazendo $y = t$, obtemos o sistema

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{4}t^2 \\ y = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

b) $(x + 4)^2 = -2(y - 1)$.

Solução: Nesta equação, x pode assumir qualquer valor real. Fazendo $x + 4 = t$, obtemos $x = t - 4$ e

$$t^2 = -2(y - 1) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}t^2 + 1.$$

Assim, o sistema

$$\begin{cases} x = t - 4 \\ y = -\frac{1}{2}t^2 + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

constitui um sistema de equações paramétricas da parábola.

c) $y^2 - 4y + x - 1 = 0$

Solução: Inicialmente, transformaremos esta equação na forma padrão:

$$\begin{aligned} y^2 - 4y &= -x + 1 \\ y^2 - 4y + 4 &= -x + 1 + 4 \\ (y - 2)^2 &= -(x - 5). \end{aligned}$$

Se fizermos $y - 2 = t$, teremos $y = t + 2$ e

$$t^2 = -x + 5 \Rightarrow x = 5 - t^2.$$

Portanto, o sistema

$$\begin{cases} x = 5 - t^2 \\ y = 2 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

constitui um sistema de equações paramétricas da parábola.

109) Obtenha uma equação geral da parábola dada pelas equações paramétricas:

$$\text{a)} \quad \begin{cases} x = t + 1 \\ y = \frac{t^2}{3} - 2 \end{cases}.$$

Solução: Substituindo $t = x - 1$ na segunda equação, resulta em:

$$y = \frac{(x-1)^2}{3} - 2 \Rightarrow 3(y+2) = x^2 - 2x + 1 \Rightarrow -x^2 + 3y + 2x + 5 = 0.$$

$$\text{b)} \quad \begin{cases} x = \frac{t^2}{4} + 4 \\ y = t \end{cases}.$$

Solução: Substituindo $t = y$ na primeira equação, resulta em:

$$x = \frac{y^2}{4} + 4 \Rightarrow \frac{y^2}{4} - x + 4 = 0.$$

110) Fixado um sistema ortogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, identifique as cônicas abaixo e esboce o seu gráfico:

$$\text{a)} \quad G(x, y) = 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 = 0.$$

Solução: Temos $A = 16, B = -24, C = 9, D = -38, E = -34$ e $F = 71$. O discriminante da parte quadrática é

$$B^2 - 4AC = (-24)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 9 = 0,$$

de modo que o tipo da cônica é parabólico, ou seja, a cônica deve ser: uma reta (dupla), ou a reunião de duas retas paralelas, ou uma parábola, ou o vazio.

i) Vamos eliminar os termos de primeiro grau, fazendo $x = u + h$ e $y = v + k$:

$$\begin{aligned} 0 &= 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 38x - 34y + 71 \\ &= 16(u+h)^2 - 24(u+h)(v+k) + 9(v+k)^2 - 38(u+h) - 34(v+k) + 71 \\ &= 16u^2 - 24uv + 9v^2 + (32h - 24k - 38)u + (-24h + 18k - 34)v + F, \end{aligned}$$

em que $F = 16h^2 - 24hk + 9k^2 - 38h - 34k + 71$ é constante. Se eliminássemos os termos lineares, teríamos

$$\begin{cases} 32h - 24k - 38 = 0 \\ -24h + 18k - 34 = 0 \end{cases},$$

que é um sistema impossível. Logo, não é possível eliminar os termos lineares dessa cônica. Neste caso, a cônica em questão é uma parábola¹.

- ii) Para eliminar o termo misto uv da equação da cônica, usamos uma rotação de eixos no plano (u, v) para um novo sistema de coordenadas. Neste caso, a cônica rotacionada terá equação

$$A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0,$$

com

$$A' = A \cos^2(\theta) + B \sin(\theta) \cos(\theta) + C \sin^2(\theta),$$

$$C' = A \sin^2(\theta) - B \sin(\theta) \cos(\theta) + C \cos^2(\theta),$$

$$D' = D \cos(\theta) + E \sin(\theta),$$

$$E' = E \cos(\theta) - D \sin(\theta).$$

A fórmula clássica para o ângulo de rotação θ é

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = -\frac{24}{7},$$

o que nos fornece $\tan(\theta) = -\frac{3}{4}$. Então $\theta \approx 36,87^\circ$. Montando o triângulo retângulo com cateto oposto -3 e cateto adjacente 4 , a hipotenusa é igual a $\sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$. Logo,

$$\cos \theta = \frac{4}{5} \quad \text{e} \quad \sin \theta = -\frac{3}{5}.$$

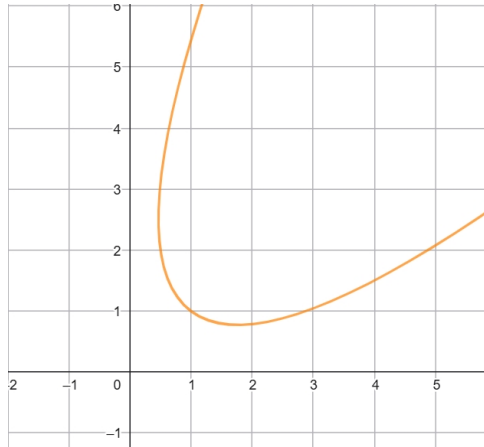
Substituindo nas igualdades acima, temos: $A' = 25$, $B' = C' = 0$, $D' = -10$ e $E' = -50$. A equação final da cônica torna-se

$$25u^2 - 10u - 50v + 71 = 0.$$

Completando quadrados, temos $25(u - \frac{1}{5})^2 = 50v - 70$. Portanto,

$$(u - \frac{1}{5})^2 = 2(v - \frac{7}{5}).$$

¹Se fosse possível eliminar os termos lineares, a equação se reduziria a algo da forma $(4u - 3v)^2 + C = 0$. Isso seria duas retas paralelas (se $C < 0$), uma reta (se $C = 0$) ou o conjunto vazio (se $C > 0$).



b) $G(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 - 8\sqrt{2}x - 8\sqrt{2}y = 0.$

Solução: Temos que $A = 1, B = -2, C = 1, D = E = -8\sqrt{2}, F = 0$. Podemos reescrever a equação da cônica como

$$(x - y)^2 - 8\sqrt{2}(x + y) = 0.$$

Fazendo a rotação de coordenadas

$$u = \frac{x - y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x + y}{\sqrt{2}},$$

temos

$$x - y = \sqrt{2}u \quad \text{e} \quad x + y = \sqrt{2}v.$$

Substituindo na equação,

$$(\sqrt{2}u)^2 - 8\sqrt{2}(\sqrt{2}v) = 0,$$

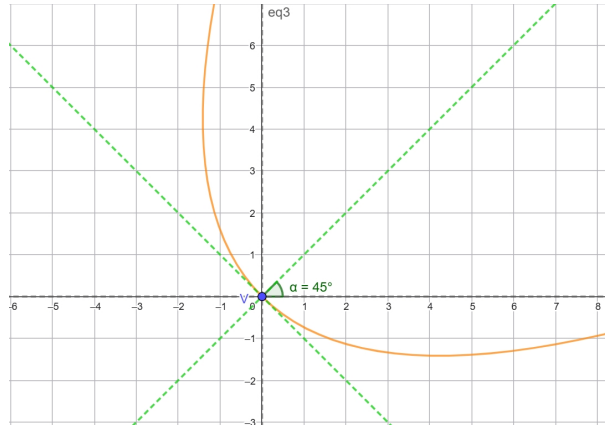
e, portanto, $2u^2 - 16v = 0$. Logo,

$$\boxed{u^2 = 8v}.$$

Portanto, a cônica é uma **parábola**. Note que

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} = 0,$$

uma vez que $A = C = 1$. Logo, $\theta = 45^\circ$ é o ângulo de rotação para se obter o novo sistema de coordenadas.



c) $G(x, y) = 4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + 3y + 2 = 0$.

Solução: Temos que $A = 4, B = -4, C = 1, D = -6, E = 3, F = 2$. Para determinar o ângulo de rotação, usamos

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-4}{4 - 1} = -\frac{4}{3}.$$

Portanto, $\cos(2\theta) = \frac{3}{5}$ e $\sin(2\theta) = -\frac{4}{5}$. Daí,

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}},$$

e

$$\sin \theta = -\sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas

$$u = x \cos \theta + y \sin \theta, \quad v = -x \sin \theta + y \cos \theta,$$

obtemos

$$u = \frac{2x - y}{\sqrt{5}}, \quad v = \frac{x + 2y}{\sqrt{5}}.$$

A transformação inversa é

$$x = \frac{2u + v}{\sqrt{5}}, \quad y = \frac{-u + 2v}{\sqrt{5}}.$$

Substituindo na parte quadrática da equação da cônica, obtemos:

$$4x^2 - 4xy + y^2 = 5u^2.$$

Para os termos lineares, temos

$$-6x + 3y = -6 \left(\frac{2u + v}{\sqrt{5}} \right) + 3 \left(\frac{-u + 2v}{\sqrt{5}} \right),$$

de modo que $-6x + 3y = -3\sqrt{5}u$. Portanto, a equação da cônica no novo sistema de coordenadas é

$$5u^2 - 3\sqrt{5}u + 2 = 0.$$

Completando o quadrado,

$$5 \left(u - \frac{3\sqrt{5}}{10} \right)^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

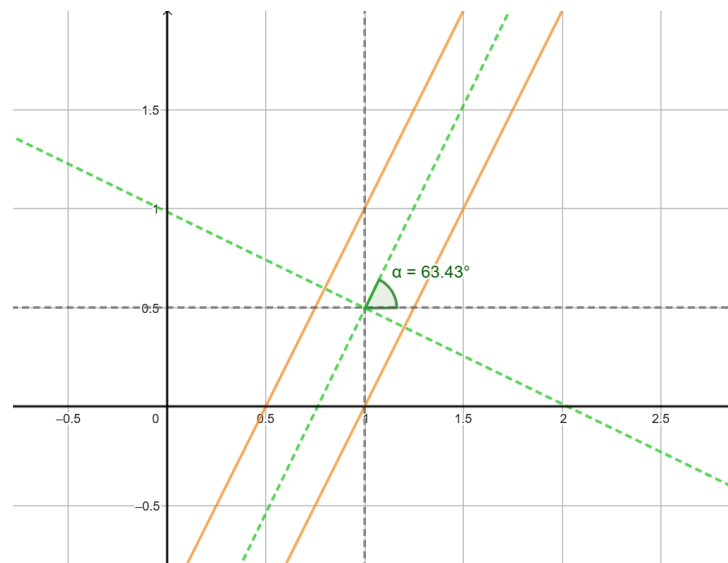
Assim,

$$\left(u - \frac{3\sqrt{5}}{10} \right)^2 = \frac{1}{20},$$

ou seja,

$$u - \frac{3\sqrt{5}}{10} = \pm \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

Portanto, $u = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ ou $u = \frac{\sqrt{5}}{5}$, o que se trata da união de duas retas paralelas.



3.2 Elipse

111) Em cada um dos casos, esboce o gráfico e determine os vértices, os focos e a excentricidade das elipses dadas.

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1;$

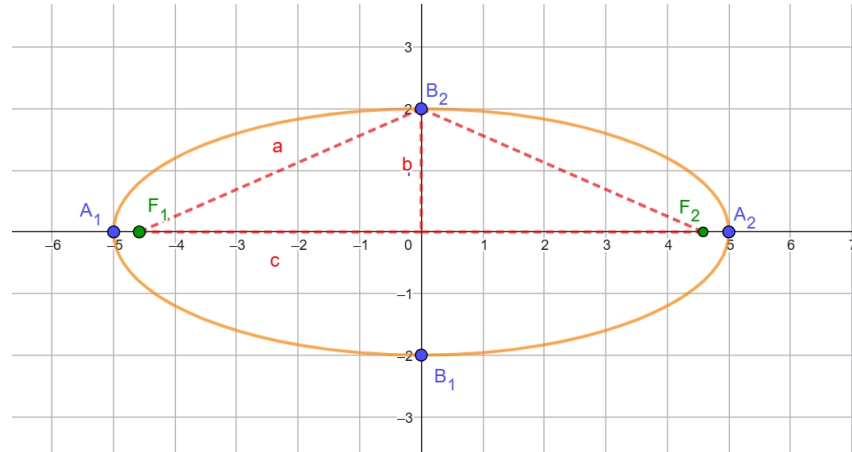
Solução: Como o maior denominador é 25, o eixo maior da elipse está sobre o eixo Ox , pois 25 é o denominador de x^2 .

Então, tomamos $a^2 = 25$ e $b^2 = 4$, ou seja, $a = 5$ e $b = 2$, de modo que os vértices são $A_1 = (-5, 0)$, $A_2 = (5, 0)$, $B_1 = (0, -2)$ e $B_2 = (0, 2)$. Também:

$$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21 \Rightarrow c = \sqrt{21}.$$

Portanto, os focos são $F_1 = (-\sqrt{21}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{21}, 0)$.

A excentricidade² da cônica é igual a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,9165$, sendo a elipse bastante alongada.



b) $9x^2 + 5y^2 - 45 = 0;$

Solução: Veja que a equação reduzida da cônica é

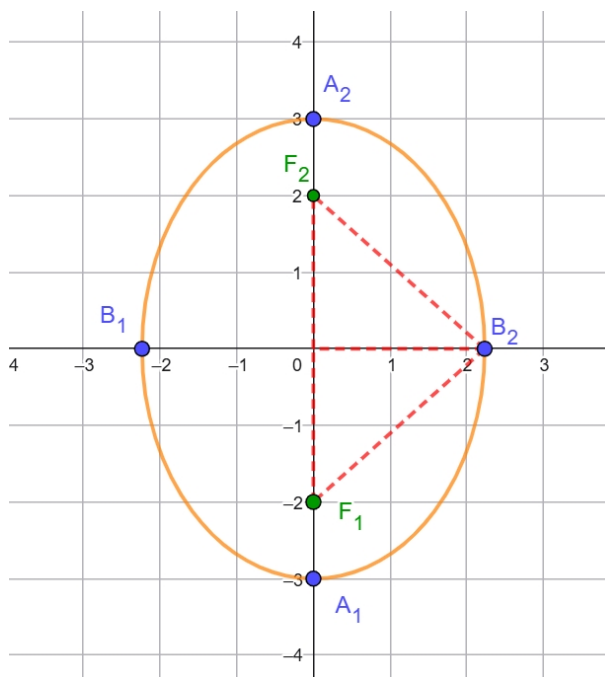
$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Como o maior denominador é 9, o eixo maior da elipse está sobre o eixo Oy , pois 9 é o denominador de y^2 . Sendo $c^2 = a^2 - b^2$, temos:

$$\begin{aligned} a^2 = 9 & \Rightarrow a = 3, \\ b^2 = 5 & \Rightarrow b = \sqrt{5}, \\ c^2 = 4 & \Rightarrow c = 2. \end{aligned}$$

Logo, os vértices são $A_1 = (0, -3)$, $A_2 = (0, 3)$, $B_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ e $B_2 = (\sqrt{5}, 0)$. Também, os focos são $F_1 = (0, -2)$ e $F_2 = (0, 2)$. A excentricidade da cônica é igual a $e = \frac{c}{a} = \frac{2}{3} \approx 0,6667$.

²A excentricidade de uma elipse mede, essencialmente, o quanto ela é achatada ou alongada. Se e for próximo do zero, a elipse é pouco achatada, parecendo quase uma circunferência. Se e se aproxima de 1, a elipse fica mais alongada.



c) $x^2 + 2y^2 - 5 = 0$.

Solução: A equação da elipse na forma reduzida é

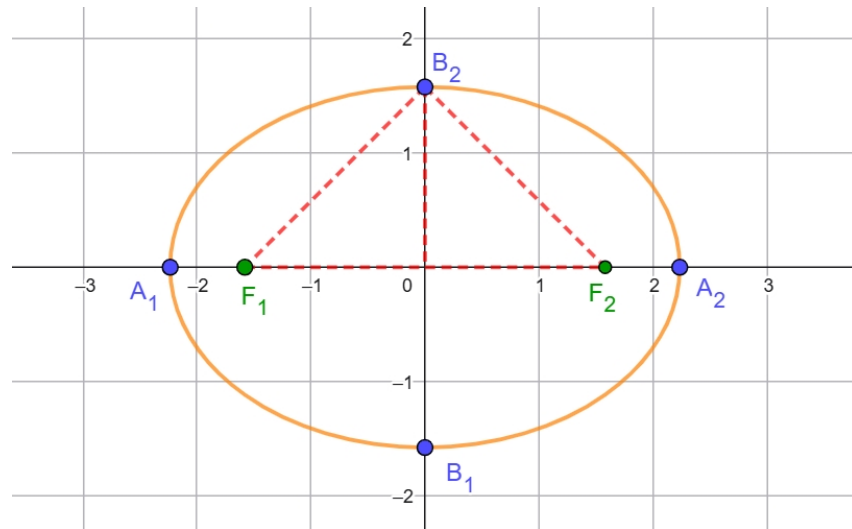
$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{\frac{5}{2}} = 1.$$

Sendo o maior denominador igual a 5 (denominador de x^2), o eixo maior desta elipse é o eixo Ox . Logo,

$$\begin{aligned} a^2 = 5 &\Rightarrow a = \sqrt{5}, \\ b^2 = \frac{5}{2} &\Rightarrow b = \sqrt{\frac{5}{2}}, \\ c^2 = a^2 - b^2 = \frac{5}{2} &\Rightarrow c = \sqrt{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Logo, os vértices são $A_1 = (-\sqrt{5}, 0)$, $A_2 = (\sqrt{5}, 0)$, $B_1 = (0, -\sqrt{\frac{5}{2}})$, $B_2 = (0, \sqrt{\frac{5}{2}})$. Os focos são $F_1 = (-\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{\frac{5}{2}}, 0)$.

A excentricidade da elipse é igual a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071$.



- 112) Escreva a equação geral da elipse cujo centro é o ponto $C(0,0)$, um dos focos é o ponto $F(0,3)$ e um dos vértices é o ponto $V(0,7)$.

Solução: Como um dos focos está sobre o eixo Oy , podemos concluir que o maior denominador a^2 é o denominador de y^2 , sendo $a = 7$, uma vez que $(0,7)$ é um dos vértices. Então $a^2 = 7^2 = 49$. Além disso,

$$c = d(C, F) = \sqrt{(0-0)^2 + (3-0)^2} = 3,$$

o que nos fornece $b = \sqrt{40}$, uma vez que $a^2 = b^2 + c^2$.

Portanto, a equação geral desta elipse é

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{49} = 1.$$

- 113) Escreva a equação da elipse cujos focos são dados por $(-3,2)$ e $(-3,6)$ e a medida do semieixo maior é $a = 4$.

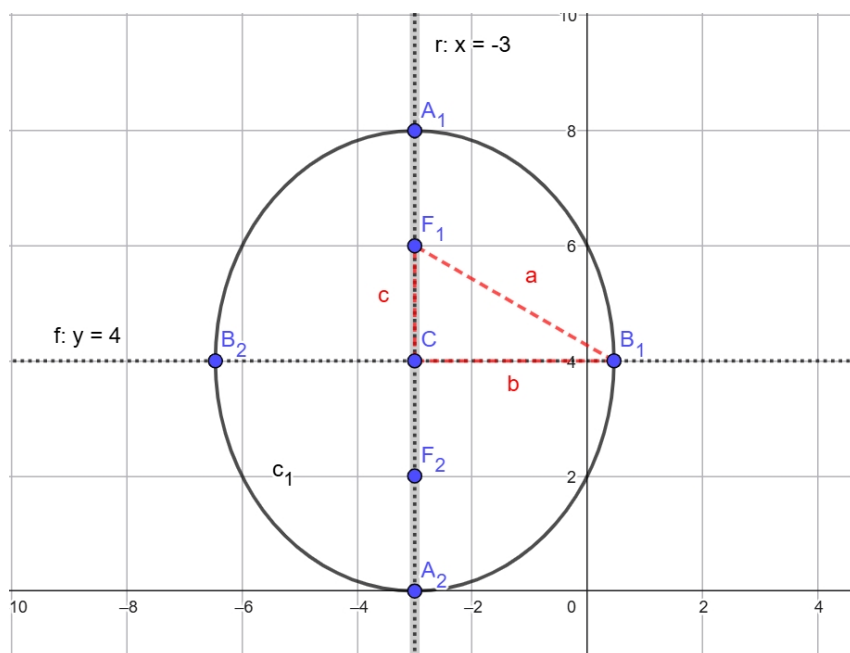
Solução: O centro da elipse é o ponto médio C do segmento F_1F_2 . Logo, $C = (-3,4)$. Dessa forma,

$$c = d(C, F_2) = d(C, F_1) = \sqrt{(-3 - (-3))^2 + (2 - 4)^2} = \sqrt{4} = 2.$$

Fazendo $a^2 = b^2 + c^2$, obtemos $b^2 = 4^2 - 2^2 = 12$, ou seja, $b = 2\sqrt{3}$. Logo, os vértices são:

$$A_1 = (-3, 4 + 4) = (-3, 8), \quad A_2 = (-3, 4 - 4) = (-3, 0),$$

$$B_1 = (-3 + 2\sqrt{3}, 4), \quad B_2 = (-3 - 2\sqrt{3}, 4).$$



114) Obtenha as equações paramétricas da elipse com a seguinte equação:

a) $x^2 + 4y^2 = 4$;

Solução: A forma reduzida da elipse é

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1} = 1$$

e, portanto, $a = 2$ e $b = 1$. Escrevendo a equação como

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = 1,$$

temos que $\frac{x}{2} = \cos(\theta)$ e $y = \sin(\theta)$, para algum $\theta \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{cases} x = 2 \cos(\theta) \\ y = \sin(\theta) \end{cases}$$

são as equações paramétricas desta elipse.

b) $9x^2 + 16y^2 = 1$;

Solução: A forma reduzida é

$$\frac{x^2}{\frac{1}{9}} + \frac{y^2}{\frac{1}{16}} = 1$$

e, portanto, $a = \frac{1}{3}$ e $b = \frac{1}{4}$. Logo,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \cos(\theta) \\ y = \frac{1}{4} \sin(\theta) \end{cases}$$

são as equações paramétricas desta elipse.

c) $9(x-1)^2 + 25(y+1)^2 = 225$.

Solução: A forma reduzida da equação é

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{225}{9}} + \frac{(y+1)^2}{\frac{225}{9}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1.$$

Portanto, o centro da elipse é $(1, -1)$, sendo $a^2 = 25$ e $b^2 = 9$. Fazendo $\frac{x-1}{5} = \cos(\theta)$ e $\frac{y+1}{3} = \sin(\theta)$, obtemos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 5 \cos(\theta) \\ y = -1 + 3 \sin(\theta) \end{cases}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

115) Esboce o gráfico da cônica de equação:

a) $G(x, y) = 3x^2 + 3y^2 + 2xy + 6\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 2 = 0$;

Solução: Temos $A = 3, B = 2, C = 3, D = 6\sqrt{2}, E = 2\sqrt{2}, F = 2$. O discriminante da parte quadrática é $B^2 - 4AC = 4 - 36 < 0$, de modo que a cônica é do tipo elíptico. Logo, as possibilidades para esta cônica são: o vazio, um ponto, uma circunferência ou uma elipse.

Para eliminar o termo xy , fazemos uma rotação dos eixos. O ângulo θ de rotação satisfaz

$$\cot(2\theta) = \frac{A-C}{B} = \frac{0}{2} = 0$$

e, portanto, $2\theta = \frac{\pi}{2}$, ou seja, $\theta = \frac{\pi}{4}$. Fazendo a rotação

$$x = u \cos(\theta) - v \sin(\theta), \quad y = u \sin(\theta) + v \cos(\theta),$$

com $\theta = \frac{\pi}{4}$, obtemos

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(u-v), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(u+v).$$

Substituindo na equação original, obtemos

$$4u^2 + 2v^2 + 8u - 4v + 2 = 0.$$

Completando os quadrados,

$$4u^2 + 2v^2 + 8u - 4v + 2 = 0$$

$$4(u^2 + 2u) + 2(v^2 - 2v) + 2 = 0$$

$$4[(u+1)^2 - 1] + 2[(v-1)^2 - 1] + 2 = 0.$$

Assim,

$$4(u+1)^2 + 2(v-1)^2 = 4,$$

e, dividindo por 4, temos a forma padrão

$$(u+1)^2 + \frac{(v-1)^2}{2} = 1.$$

Portanto, a cônica é uma elipse (não degenerada). O centro da elipse no sistema de coordenadas rotacionado é $(u_0, v_0) = (-1, 1)$. Como

$$x = u \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - v \sin\left(\frac{\pi}{4}\right), \quad y = u \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + v \cos\left(\frac{\pi}{4}\right),$$

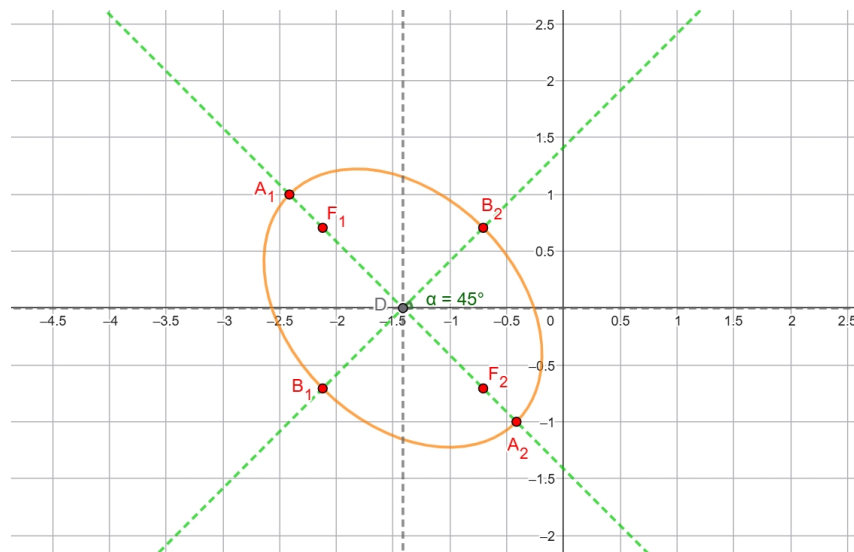
temos que o centro da elipse no sistema original é

$$C = (x_0, y_0) = (-\sqrt{2}, 0).$$

Da equação

$$\frac{(u+1)^2}{1^2} + \frac{(v-1)^2}{(\sqrt{2})^2} = 1,$$

concluimos que os semieixos são $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$. O eixo maior faz um ângulo de $\frac{3\pi}{4}$ com o eixo Ox .



b) $G(x, y) = 7x^2 + 5y^2 + 2\sqrt{3}xy - (14 + 2\sqrt{3})x - (10 + 2\sqrt{3})y + 8 + 2\sqrt{3} = 0;$

Solução: Neste caso, temos $A = 7$, $B = 2\sqrt{3}$, $C = 5$, $D = -14 - 2\sqrt{3}$, $E = -10 - 2\sqrt{3}$ e $F = 8 + 2\sqrt{3}$. O discriminante da parte quadrática é

$$B^2 - 4AC = (2\sqrt{3})^2 - 4(7)(5) = 12 - 140 = -128 < 0.$$

Logo, a cônica é do tipo elíptica.

Para eliminar o termo xy , fazemos uma rotação de ângulo θ tal que

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} = \frac{7 - 5}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Logo,

$$2\theta = \frac{\pi}{3},$$

e, portanto, $\theta = \frac{\pi}{6}$. Fazendo

$$x = u \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - v \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \quad y = u \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + v \cos\left(\frac{\pi}{6}\right),$$

temos

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{1}{2}v, \quad y = \frac{1}{2}u + \frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

Substituindo na equação original, obtemos

$$8u^2 - 8\sqrt{3}u - 8u + 4v^2 - 4\sqrt{3}v + 4v + 8 + 2\sqrt{3} = 0.$$

Agrupando,

$$8u^2 - 8(1 + \sqrt{3})u + 4v^2 + 4(1 - \sqrt{3})v + 8 + 2\sqrt{3} = 0.$$

Completando os quadrados,

$$8 \left[u^2 - (1 + \sqrt{3})u \right] + 4 \left[v^2 + (1 - \sqrt{3})v \right] + 8 + 2\sqrt{3} = 0.$$

Como

$$u^2 - (1 + \sqrt{3})u = \left(u - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 - \frac{(1 + \sqrt{3})^2}{4},$$

e

$$v^2 + (1 - \sqrt{3})v = \left(v - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^2 - \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{4},$$

obtemos

$$8 \left(u - \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \right)^2 + 4 \left(v - \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \right)^2 = 4.$$

Dividindo por 4, obtemos a equação no novo sistema (u, v)

$$\frac{\left(u - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} + \frac{\left(v - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2}{1} = 1.$$

Portanto, a cônica é uma elipse de centro

$$(u_0, v_0) = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$$

no sistema rotacionado. Para encontrar o centro no sistema original, fazemos

$$x_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}u_0 - \frac{1}{2}v_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1+\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1,$$

$$y_0 = \frac{1}{2}u_0 + \frac{\sqrt{3}}{2}v_0 = \frac{1}{2} \frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{3}-1}{2} = 1.$$

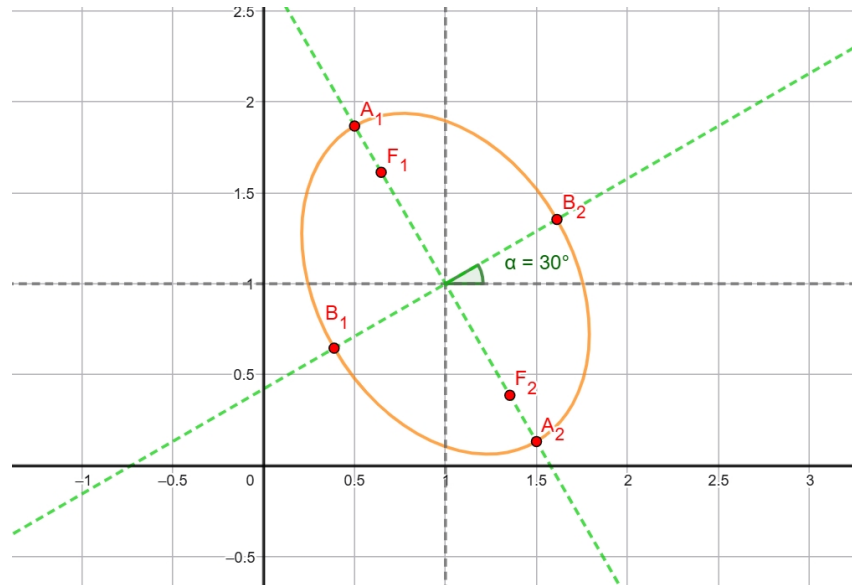
Logo, o centro da elipse no sistema original é $C = (1, 1)$. Os semieixos são

$$a = 1, \quad b = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

O maior semieixo está na direção do eixo Ov . Após a rotação de $\frac{\pi}{6}$, o eixo Ov possui direção

$$\left(-\sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Assim, o eixo maior faz um ângulo de $\frac{2\pi}{3}$ com o eixo Ox .



3.3 Hipérbole

116) Em cada um dos itens, determine a equação reduzida, o centro, os vértices, os focos, a excentricidade e equações das assíntotas das hipérboles dadas. Esboce o gráfico.

a) $9x^2 - 4y^2 - 18x - 16y - 43 = 0$;

Solução: Veja que a equação acima pode ser rescrita como:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 2x) - 4(y^2 + 4y) &= 43 \\ 9(x - 1)^2 - 9 + 4(y + 2)^2 + 16 &= 43 \\ 9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 &= 36 \\ \frac{(x - 1)^2}{4} - \frac{(y + 2)^2}{9} &= 1 \end{aligned}$$

que é a equação reduzida da hipérbole com o eixo transversal (ou real) paralelo ao eixo Ox . Seu centro está em $C = (1, -2)$ e

$$\begin{aligned} a^2 = 4 &\implies a = 2, \\ b^2 = 9 &\implies b = 3. \end{aligned}$$

Portanto, os vértices são:

$$A_1 = (1 - a, -2) = (-1, -2) \text{ e } A_2 = (1 + a, -2) = (3, -2).$$

Para determinar os focos, precisamos do valor de c :

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13 \implies c = \sqrt{13}.$$

Logo, os focos são:

$$F_1 = (1 - c, -2) = (1 - \sqrt{13}, -2) \text{ e } F_2 = (1 + c, -2) = (1 + \sqrt{13}, -2).$$

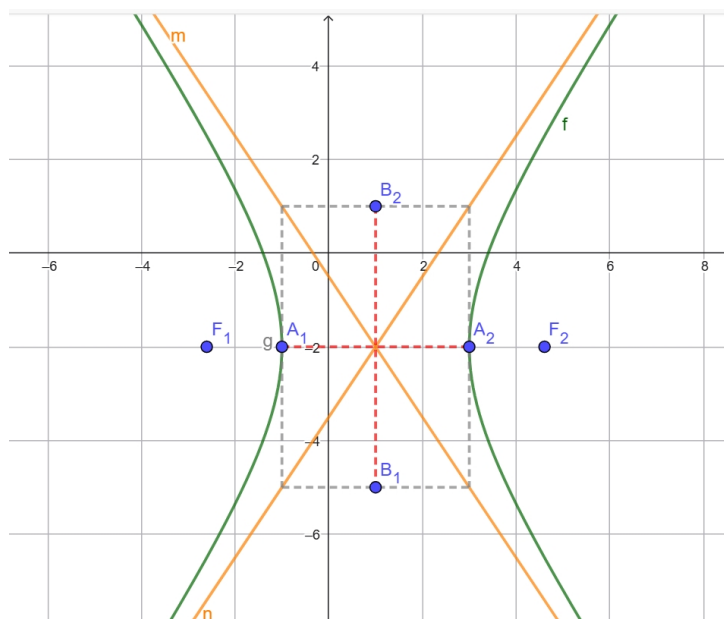
A excentricidade³ da hipérbole é igual a $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$.

Por fim, as equações das duas retas assíntotas são dadas como:

$$y + 2 = \pm \frac{b}{a}(x - 1),$$

ou seja, $y = -2 \pm \frac{3}{2}(x - 1)$. Podemos reescrevê-las como $m : 3x + 2y = -1$ e $n : 3x - 2y = 7$, conforme figura abaixo.

³Como $c > a$, a excentricidade da hipérbole é estritamente maior do que 1 (diferente da elipse, onde $0 < e < 1$, e da parábola, onde $e = 1$). Quanto maior o valor de e , mais abertos são os ramos da hipérbole (as assíntotas ficam mais inclinadas). Quanto mais próximo de 1, mais fechada é a curva.



b) $x^2 - 4y^2 + 6x + 24y - 31 = 0$;

Solução: Reescrevendo a equação na forma reduzida, obtém-se

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 4y^2 + 24y &= 31 \\ (x + 3)^2 - 9 - 4(y^2 - 6y) + 36 &= 31 \\ (x + 3)^2 - 4(y - 3)^2 &= 4 \\ \frac{(x + 3)^2}{4} - \frac{(y - 3)^2}{1} &= 1, \end{aligned}$$

que é a equação reduzida da hipérbole com o eixo transversal (ou real) paralelo ao eixo Ox . Seu centro está em $C = (-3, 3)$. Também temos:

$$\begin{aligned} a^2 = 4 &\Rightarrow a = 2, \\ b^2 = 1 &\Rightarrow b = 1. \end{aligned}$$

Logo, os vértices são:

$$A_1 = (-3 - a, 3) = (-5, 3) \text{ e } A_2 = (-3 + a, 3) = (-1, 3).$$

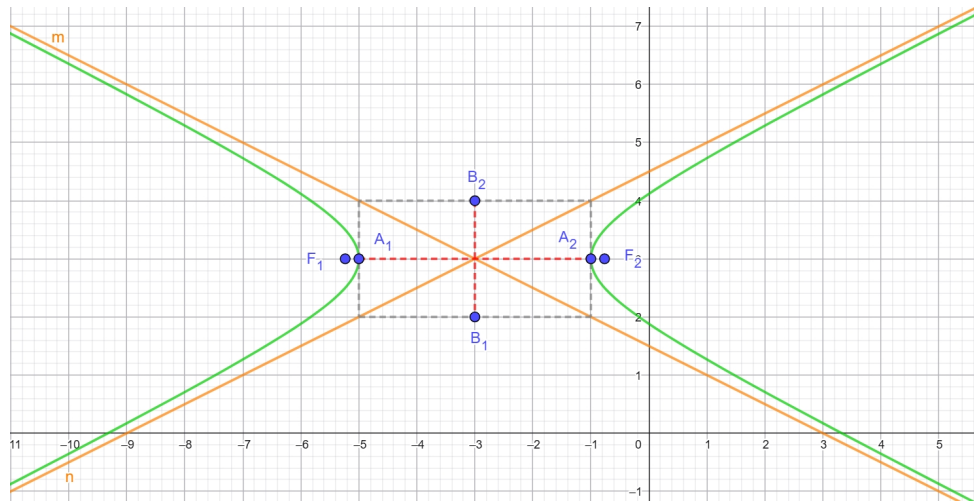
Para o valor de c , temos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 1 = 5 \Rightarrow c = \sqrt{5}.$$

Logo, os focos são $F_1 = (-3 - \sqrt{5}, 3)$ e $F_2 = (-3 + \sqrt{5}, 3)$. A excentricidade da hipérbole é $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Por fim, as equações das duas retas assíntotas são

$$y - 3 = \pm \frac{1}{2}(x + 3),$$

ou seja, $m : x + 2y = 3$ e $n : x - 2y = -9$.



c) $9x^2 - y^2 + 36x + 6y + 63 = 0$;

Solução: Repetindo os passos realizados nos itens anteriores, obtemos:

$$9(x + 2)^2 - (y - 3)^2 = -63 + 36 - 9$$

$$9(x + 2)^2 - (y - 3)^2 = -36$$

$$-\frac{(x + 2)^2}{4} + \frac{(y - 3)^2}{36} = 1,$$

que é a equação da hipérbole com o eixo transversal (real) paralelo ao eixo Oy .

O centro da hipérbole é $C = (-2, 3)$ e

$$a^2 = 36 \Rightarrow a = 6,$$

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2.$$

Portanto, os vértices são $A_1 = (-2, 3 - a) = (-2, -3)$ e $A_2 = (-2, 3 + a) = (-2, 9)$. Para determinar o valor de c , fazemos:

$$c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 4 = 40 \Rightarrow c = 2\sqrt{10}.$$

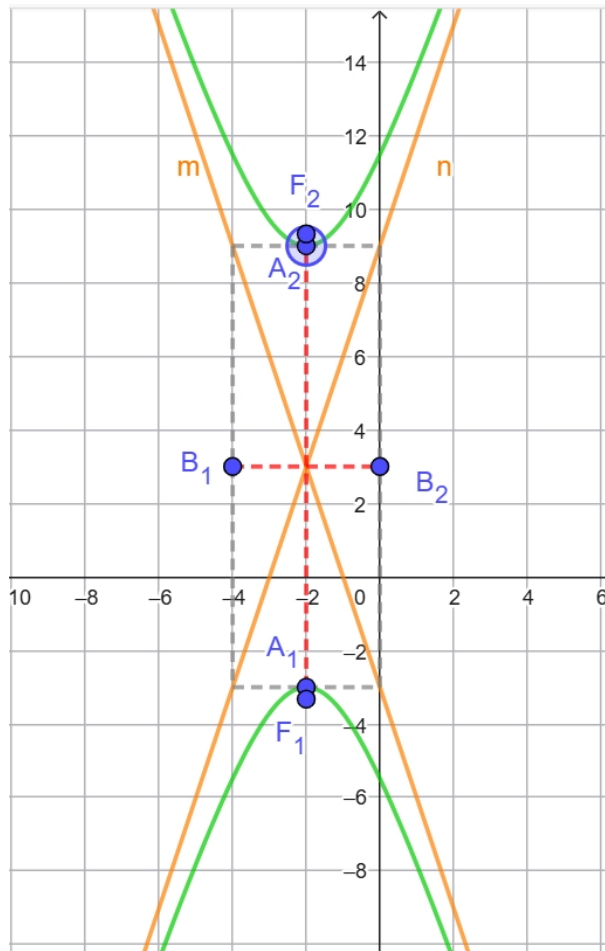
Logo, os focos são $F_1 = (-2, 3 - 2\sqrt{10})$ e $F_2 = (-2, 3 + 2\sqrt{10})$, sendo a excentricidade igual a

$$e = \frac{2\sqrt{10}}{6} = \frac{\sqrt{10}}{3}.$$

Por fim, as equações das duas retas assíntotas são dadas como:

$$y - 3 = \pm \frac{a}{b}(x + 2),$$

ou seja, $y - 3 = \pm 3(x + 2)$. Então, temos as retas $m : 3x + y = -3$ e $n : 3x - y = -9$.



d) $y^2 - 4x^2 = 1$;

Solução: Facilmente, obtemos:

$$-\frac{x^2}{\frac{1}{4}} + y^2 = 1,$$

que é a equação da hipérbole com o eixo real paralelo ao eixo Oy e centro na origem. Também temos

$$a^2 = 1 \Rightarrow a = 1,$$

$$b^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow b = \frac{1}{2}.$$

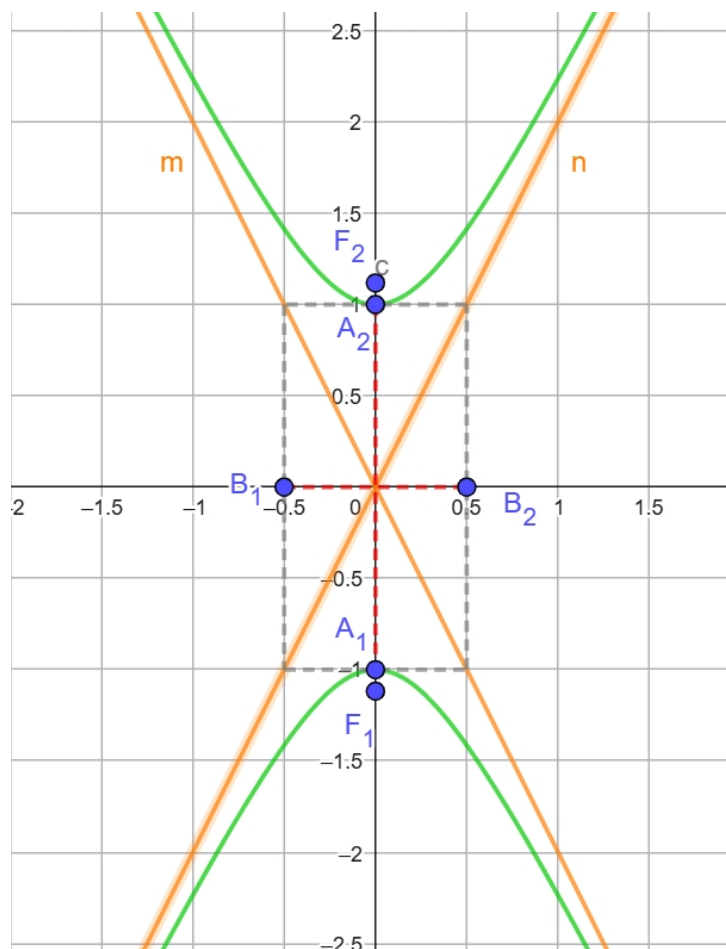
Os vértices são $A_1 = (0, -a) = (0, -1)$ e $A_2 = (0, a) = (0, 1)$. O valor de c é dada pela igualdade

$$c^2 = a^2 + b^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow c = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Logo, os focos são $F_1 = (0, -c) = (0, -\frac{\sqrt{5}}{2})$ e $F_2 = (0, c) = (0, \frac{\sqrt{5}}{2})$. A excentricidade é igual a

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

As equações das assíntotas são $y = \pm \frac{a}{b}x$, ou seja, $y = \pm 2x$. Podemos reescrevê-las como $m : 2x + y = 0$ e $n : 2x - y = 0$.



117) Em cada um dos itens, determine uma equação da hipérbole com centro na origem que satisfaça as condições dadas. Esboce o gráfico.

a) Focos $F(\pm 5, 0)$, vértices $A(\pm 3, 0)$;

Solução: Uma vez que a ordenada dos focos é nula, o eixo transversal (real) está sobre o eixo Ox . Então a equação da hipérbole é da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como o centro da hipérbole é a origem $C = (0, 0)$, temos que

$$a = d(C, A) = \sqrt{(\pm 3 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Logo, $a^2 = 9$. Além disso,

$$c = d(C, F) = \sqrt{(\pm 5 - 0)^2 + (0 - 0)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Fazendo $c^2 = 25$, temos que

$$25 = a^2 + b^2 = 9 + b^2 \Rightarrow b^2 = 16.$$

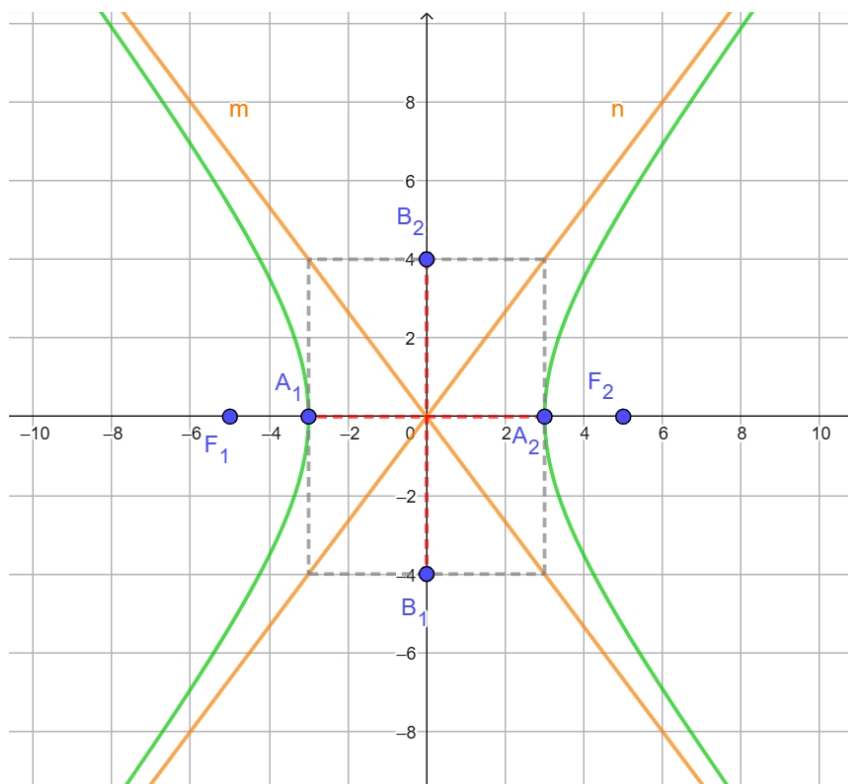
Portanto, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Neste caso, as equações das assíntotas é da forma $y = \pm \frac{b}{a}x$. Como $b = 4$ e $a = 3$, então

$$y = \pm \frac{4}{3}x.$$

De outro modo, podemos escrever as equações das assíntotas como $m : 4x + 3y = 0$ e $n : 4x - 3y = 0$.



- b) Focos $F(0, \pm 4)$, eixo transverso de medida 2;

Solução: O eixo transverso é o segmento A_1A_2 , que tem medida $2a$, em que $A_1 = (0, -a)$ e $A_2 = (0, a)$ são os vértices da hipérbole sobre a reta focal.

Como $2a = 2$, segue que $a = 1$. Portanto, os vértices são:

$$A_1 = (0, -1) \text{ e } A_2 = (0, 1).$$

Considerando o centro $C = (0, 0)$, temos

$$c = d(C, F) = \sqrt{(0 - 0)^2 + (\pm 4 - 0)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

Como o eixo transversal está sobre a reta focal, que é o eixo dos Oy , a equação da hipérbole é da forma

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Usando a relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos que

$$16 = 1 + b^2 \Rightarrow b^2 = 15.$$

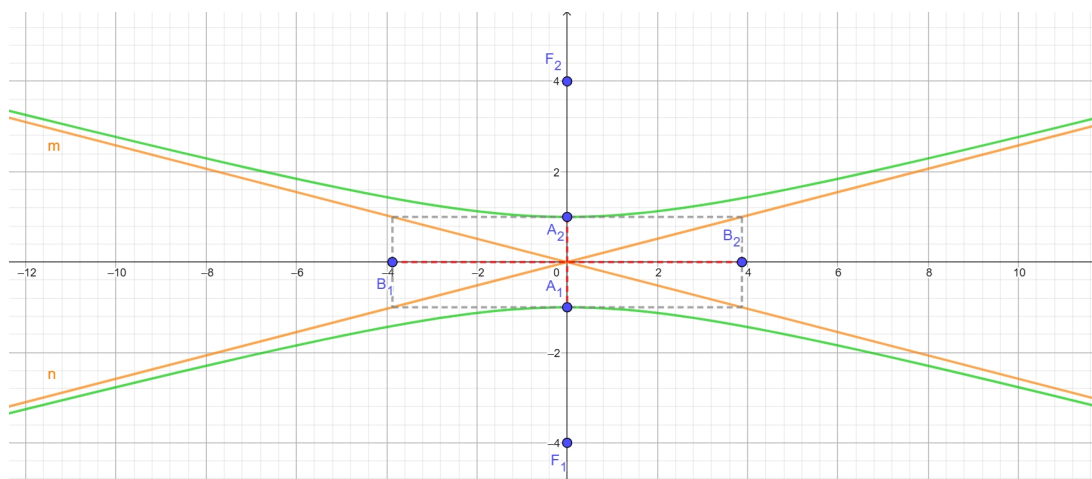
Portanto,

$$y^2 - \frac{x^2}{15} = 1$$

é a equação desta hipérbole. Neste caso, as equações das assíntotas são

$$y = \pm \frac{a}{b}x = \pm \frac{1}{\sqrt{15}}x,$$

ou seja, $m : x + \sqrt{15}y = 0$ e $n : x - \sqrt{15}y = 0$.



- c) Vértices $A(\pm 4, 0)$ e equações das retas assíntotas $y = \pm \frac{1}{4}x$;

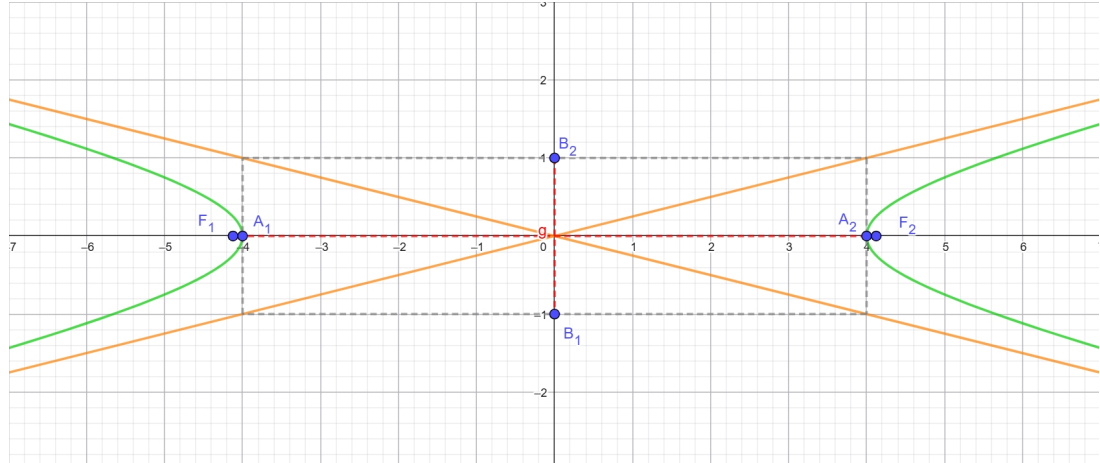
Solução: Observe que os vértices estão sobre o eixo Ox . Logo, o eixo transversal (ou real) também está e $a = 4$. Neste caso, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Como as equações das assíntotas são dadas por $y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \frac{1}{4}x$, concluímos que $b = 1$. Assim, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{16} - y^2 = 1.$$

Para esboçar o gráfico, precisamos determinar as coordenadas dos focos, que são da forma $(\pm c, 0)$. Como $c^2 = a^2 = b^2$, temos que $c^2 = 17$. Portanto, $c = \sqrt{17}$ e os focos são $F_1 = (-\sqrt{17}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{17}, 0)$.



- 118) Considere a hipérbole de vértices $A_1 = (5, -1)$ e $A_2 = (5, 5)$, e excentricidade 2. Determine sua equação e faça o seu gráfico.

Solução: Pelas coordenadas dos vértices, sabemos que o eixo transversal é paralelo ao eixo Oy , ou seja, a equação da hipérbole é da forma:

$$\frac{(y - k)^2}{a^2} - \frac{(x - h)^2}{b^2} = 1,$$

em que $C = (h, k)$ é seu centro.

Sabemos que o centro da hipérbole é o ponto médio de A_1A_2 , ou seja,

$$C = \left(\frac{5+5}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = (5, 2).$$

É imediato que

$$a = d(C, A_1) = \sqrt{(5-5)^2 + (-1-2)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Além disso, a excentricidade é dada por

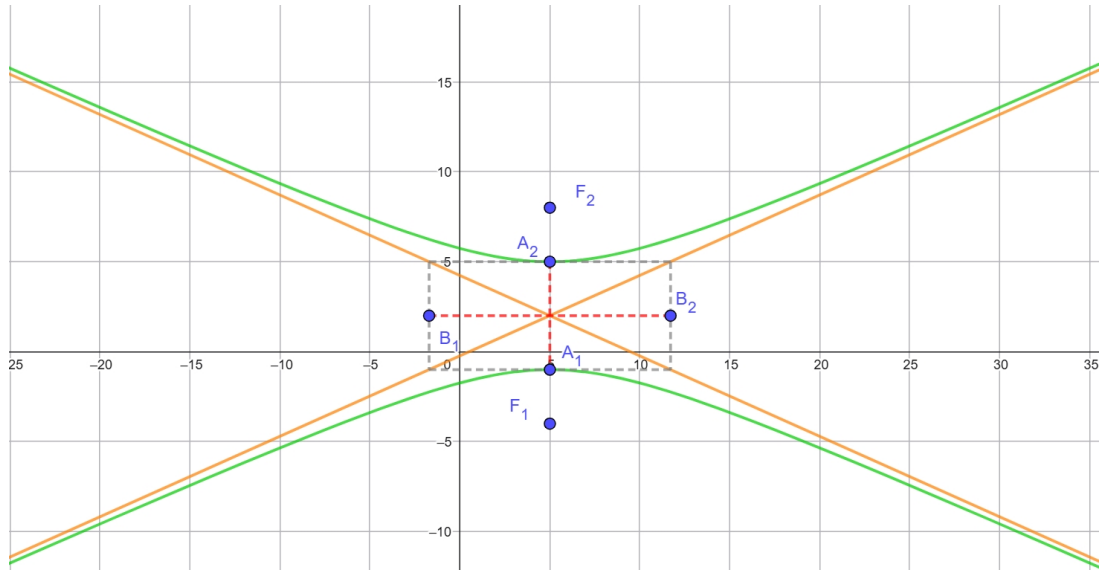
$$2 = e = \frac{c}{a} = \frac{c}{3} \Rightarrow c = 6.$$

Portanto, os focos são $F_1 = (5, 2 - c) = (5, -4)$ e $F_2 = (5, 2 + c) = (5, 8)$. Da relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos

$$b^2 + 9 = 36 \Rightarrow b^2 = 27.$$

Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{(y-2)^2}{9} - \frac{(x-5)^2}{27} = 1.$$



- 118) Considere a hipérbole de centro $C(5, 1)$, um foco $F(9, 1)$ e eixo conjugado (ou imaginário) medindo $4\sqrt{2}$.

Solução: Uma vez que o centro e um dos focos estão sobre a reta $y = 1$, o eixo transversal (ou real) é paralelo ao eixo Ox . Lembrando que o centro da hipérbole é $C = (5, 1)$, a equação da hipérbole é da forma

$$\frac{(x-5)^2}{a^2} - \frac{(y-1)^2}{b^2} = 1.$$

Sabemos que o eixo conjugado é paralelo ao eixo Oy e mede

$$2b = 4\sqrt{2},$$

ou seja, $b = 2\sqrt{2}$. Além disso,

$$c = d(F, C) = \sqrt{(9-5)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{16} = 4.$$

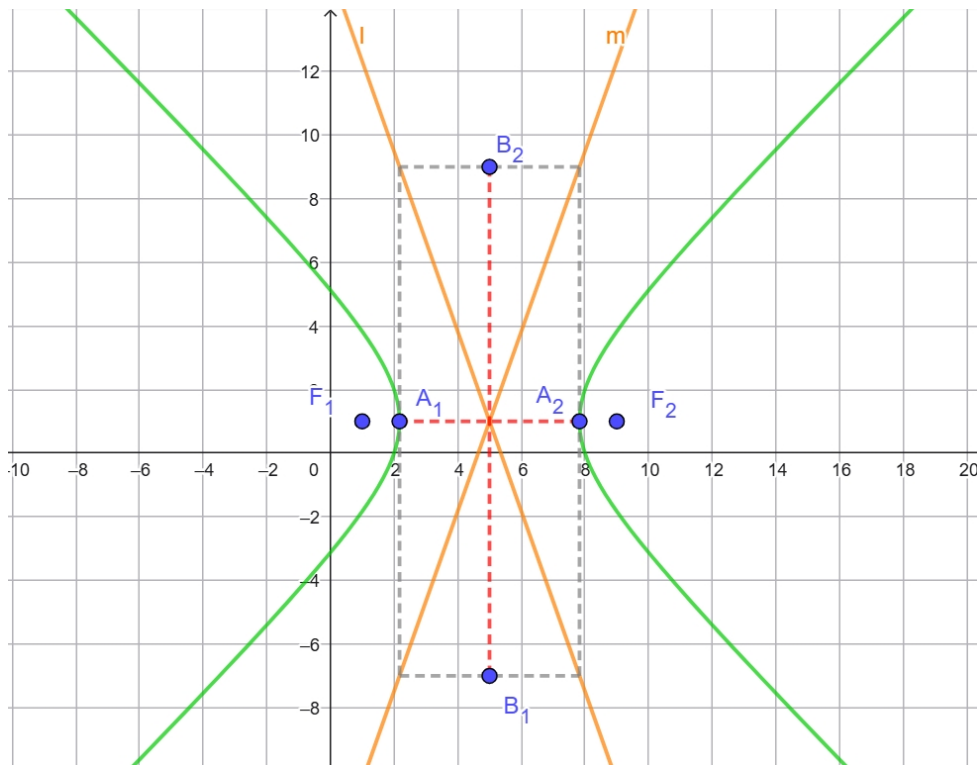
Portanto, da relação $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $a^2 = 16 - 8 = 8$. Logo, a equação da hipérbole é:

$$\frac{(x-5)^2}{8} - \frac{(y-1)^2}{8} = 1.$$

Os vértices são:

$$A_1 = (5 - a, 1) = (5 - 2\sqrt{2}, 1), \quad A_2 = (5 + a, 1) = (5 + 2\sqrt{2}, 1).$$

O outro foco tem coordenadas $F_1 = (5 - c, 1) = (1, 1)$.



120) Obtenha as equações paramétricas da hipérbole de equação dada nos itens a seguir.

a) $x^2 - 4y^2 = 4$;

Solução: Reduz-se à forma reduzida dividindo tudo por 4:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1.$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\sec^2(\theta) - \tan^2(\theta) = 1$, existe $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ tal que $\frac{x}{2} = \sec(\theta)$ e $y = \tan(\theta)$. Portanto, temos as seguintes equações paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2 \sec(\theta) \\ y = \tan(\theta), \end{cases}$$

com $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

b) $3y^2 - x^2 - 9 = 0$;

Solução: A forma reduzida desta equação é:

$$\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{9} = 1.$$

Repetindo a ideia do item anterior, obtemos

$$\begin{cases} x = 3 \tan(\theta) \\ y = \sqrt{3} \sec(\theta) \end{cases},$$

para todo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

c) $9x^2 - 25y^2 - 18x - 50y - 241 = 0$;

Solução: Podemos reescrever a equação acima como:

$$\begin{aligned} 9(x^2 - 2x) - 25(y^2 + 2y) &= 241 \\ 9(x-1)^2 - 9 - 25(y+1)^2 + 25 &= 241 \\ 9(x-1)^2 - 25(y+1)^2 &= 225 \\ \frac{(x-1)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{9} &= 1. \end{aligned}$$

Fazendo

$$\begin{cases} \frac{x-1}{5} = \sec(\theta) \\ \frac{y+1}{3} = \tan(\theta), \end{cases}$$

temos as equações paramétricas

$$\begin{cases} x = 1 + 5 \sec(\theta) \\ y = -1 + 3 \tan(\theta) \end{cases},$$

para todo $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

121) Nos itens a seguir, obtenha uma equação geral da hipérbole dada por equações paramétricas, em que $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

a) $\begin{cases} x = 4 \sec(\theta) \\ y = 2 \tan(\theta) \end{cases};$

Solução: Do sistema, obtemos que $\frac{x}{4} = \sec(\theta)$ e $\frac{y}{2} = \tan(\theta)$. Uma vez que $\sec^2(\theta) - \tan^2(\theta) = 1$, a equação reduzida desta hipérbole é

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

ou equivalentemente, $x^2 - 4y^2 - 16 = 0$.

$$\text{b) } \begin{cases} x = \tan(\theta) \\ y = 3 \sec(\theta) \end{cases} ;$$

Solução: Repetindo o argumento anterior, temos que

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{1} = 1$$

é a equação reduzida da hipérbole.

$$\text{c) } \begin{cases} x = 2 + 3 \tan(\theta) \\ y = 1 + 4 \sec(\theta) \end{cases} ;$$

Solução: Observe que

$$\frac{x-2}{3} = \tan(\theta) \quad \text{e} \quad \frac{y-1}{4} = \sec(\theta).$$

Uma vez que $\sec^2(\theta) - \tan^2(\theta) = 1$, a equação desta hipérbole é dada por:

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x-2)^2}{9} = 1.$$

122) Determine uma equação da hipérbole com focos nos vértices da elipse

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

e vértices nos focos dessa elipse.

Solução: Pela equação reduzida da elipse, seu eixo maior está sobre o eixo Ox com medida igual a $2a = 10$, uma vez que $a^2 = 25$. Além disso, seu eixo menor tem medida $2b = 6$, pois $b^2 = 9$. Logo,

$$a = 5 \quad \text{e} \quad b = 3.$$

Da relação $c^2 = a^2 - b^2$, temos que $c^2 = 16$, ou seja, $c = 4$. Como a elipse tem centro na origem do sistema de coordenadas, seus vértices são

$$A_1 = (-5, 0), \quad A_2 = (5, 0), \quad B_1 = (0, -3), \quad B_2 = (0, 3),$$

e seus focos são $F_1 = (-4, 0)$ e $F_2 = (4, 0)$.

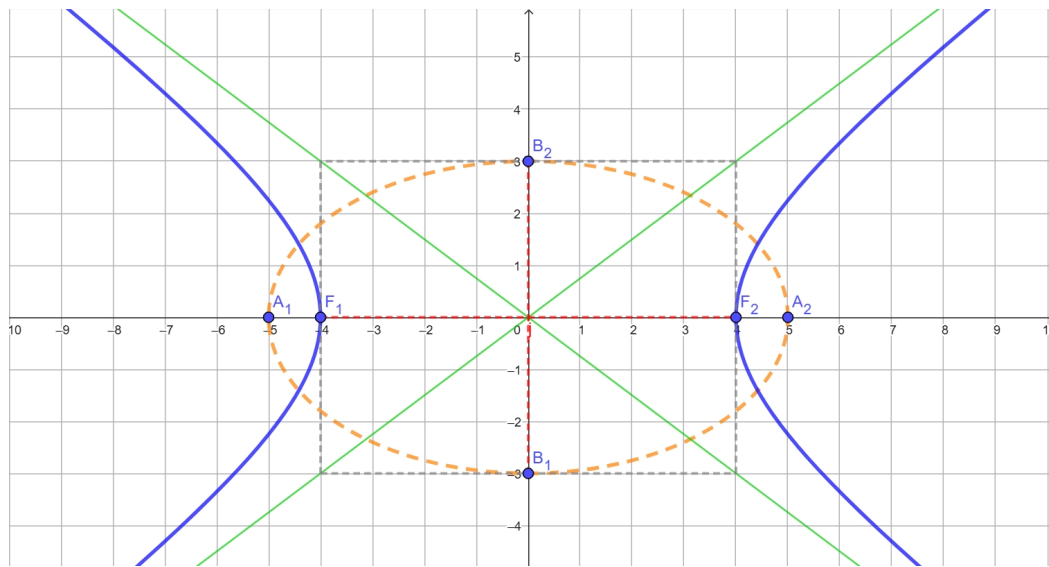
Por hipótese, a hipérbole tem seus focos em $(-5, 0)$ e $(5, 0)$, e seus vértices em $(-4, 0)$ e $(4, 0)$. Vamos renomear

$$\mathbf{A}_1 = (-4, 0), \quad \mathbf{A}_2 = (4, 0), \quad \mathbf{F}_1 = (-5, 0), \quad \mathbf{F}_2 = (5, 0).$$

Portanto, o eixo transversal (real) e a reta focal da hipérbole está sobre o eixo Ox , com $a = 4$ e $c = 5$. Da relação na hipérbole $c^2 = a^2 + b^2$, concluímos que $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9$. Logo, $b = 3$ e o eixo conjugado (imaginário) da hipérbole tem medida $2b = 6$.

Logo, a equação da hipérbole é

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$



123) Determine uma equação da elipse com focos nos vértices da hipérbole

$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$$

e vértices nos focos dessa hipérbole.

Solução: Pela equação da hipérbole, seu eixo transversal está sobre o eixo Oy com medida $2a = 4$, pois $a^2 = 4$. O eixo conjugado mede $2b = 2\sqrt{5}$, pois $b^2 = 5$. Como a hipérbole está centrada na origem, seus vértices são $A_1 = (0, -2)$ e $A_2 = (0, 2)$.

Uma vez que $c^2 = a^2 + b^2 = 9$, temos $c = 3$. Assim, os focos da hipérbole são $F_1 = (0, -3)$ e $F_2 = (0, 3)$. Renomeando os pontos, a elipse deve ter seus vértices em

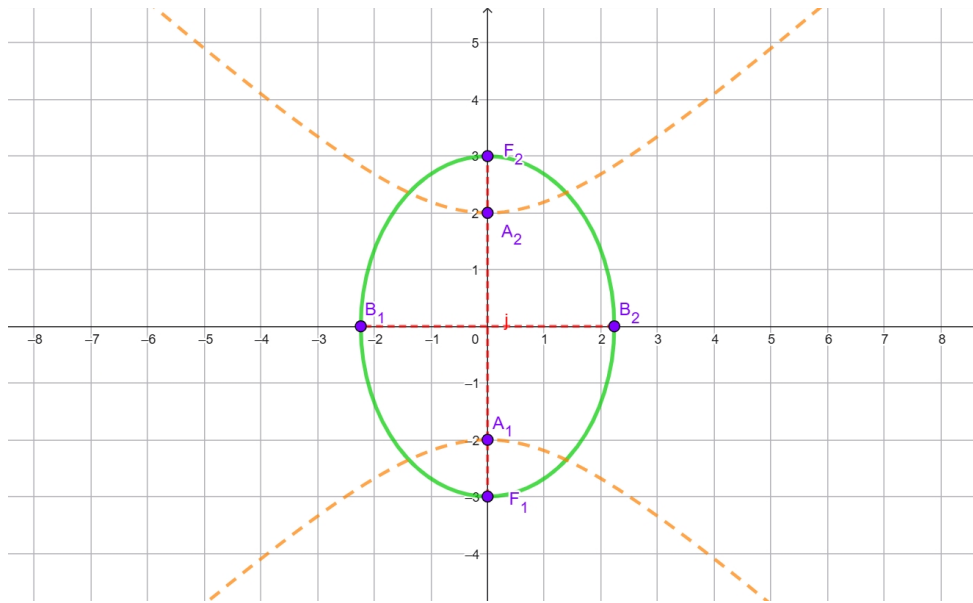
$$\mathbf{A}_1 = (0, -3) \quad \text{e} \quad \mathbf{A}_2 = (0, 3),$$

e seus focos em

$$\mathbf{F}_1 = (0, -2) \quad \text{e} \quad \mathbf{F}_2 = (0, 2).$$

Logo, $a = 3$, $c = 2$ e, pela relação $c^2 = a^2 - b^2$, temos $b = \sqrt{5}$. Portanto, a elipse tem equação

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1.$$



124) Fixado um sistema ortogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$, esboce o gráfico das seguintes cônicas:

a) $G(x, y) = 4x^2 + y^2 - 3\sqrt{3}xy - 1 = 0;$

Solução: Esta cônica tem os coeficientes $A = 4$, $B = -3\sqrt{3}$, $C = 1$, $D = E = 0$ e $F = -1$. Como o discriminante é igual a $B^2 - 4AC = 27 - 16 > 0$, a cônica é do tipo hiperbólico, ou seja, uma hipérbole ou duas retas concorrentes. Para determinar o ângulo de rotação dessa cônica, utilizamos a igualdade

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A - C} = \frac{-3\sqrt{3}}{3} = -\sqrt{3}.$$

Assim, $2\theta = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, para $k \in \mathbb{Z}$. Escolhendo $k = 1$, obtemos

$$\theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ.$$

Fazemos então a mudança de coordenadas correspondente à rotação de 60° , temos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$x = \frac{1}{2}X - \frac{\sqrt{3}}{2}Y, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2}X + \frac{1}{2}Y.$$

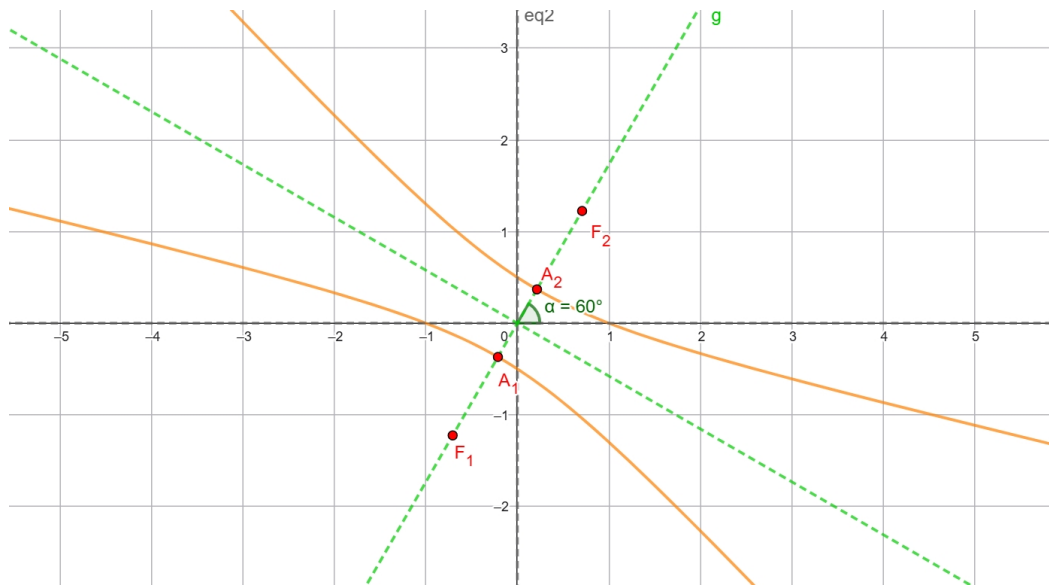
Substituindo essas expressões na equação $4x^2 + y^2 - 3\sqrt{3}xy - 1 = 0$, obtemos

$$-\frac{1}{2}X^2 + \frac{11}{2}Y^2 - 1 = 0,$$

que pode ser reescrito como

$$-\frac{X^2}{2} + \frac{Y^2}{\frac{2}{11}} = 1.$$

Portanto, a cônica é uma hipérbole com centro na origem e eixos principais obtidos por uma rotação de 60° .



b) $G(x, y) = x^2 - 6xy - 7y^2 - 10x - 30y + \frac{35}{4} = 0;$

Solução: Temos $A = 1$, $B = -6$, $C = -7$, $D = -10$, $E = -30$, $F = \frac{35}{4}$. O discriminante da parte quadrática é

$$B^2 - 4AC = 36 + 28 > 0.$$

Logo, a cônica é do tipo hiperbólico. Usaremos a fórmula da cotangente para eliminar o termo misto:

$$\cot(2\theta) = \frac{A - C}{B} = \frac{1 - (-7)}{-6} = \frac{8}{-6} = -\frac{4}{3}.$$

No triângulo retângulo, a hipotenusa é 5. Logo,

$$\cos(2\theta) = -\frac{4}{5}.$$

Aplicando as identidades de meio-ângulo para achar o seno e o cosseno de θ , temos:

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}};$$

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos(2\theta)}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{4}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{9}{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}.$$

As expressões para a rotação de eixos são:

$$x = X \cos \theta - Y \sin \theta = \frac{X - 3Y}{\sqrt{10}},$$

$$y = X \sin \theta + Y \cos \theta = \frac{3X + Y}{\sqrt{10}}.$$

Substituindo x e y na equação original da cônica, obtemos

$$2Y^2 - 8X^2 - 10\sqrt{10}X + \frac{35}{4} = 0.$$

Completando os quadrados para eliminar o termo linear, concluímos que

$$2(Y - 0)^2 - 8\left(X + \frac{5\sqrt{10}}{8}\right)^2 + 40 = 0.$$

Fazendo a mudança de variáveis para a translação $x = X + \frac{5\sqrt{10}}{8}$ e $y = Y$, resulta que

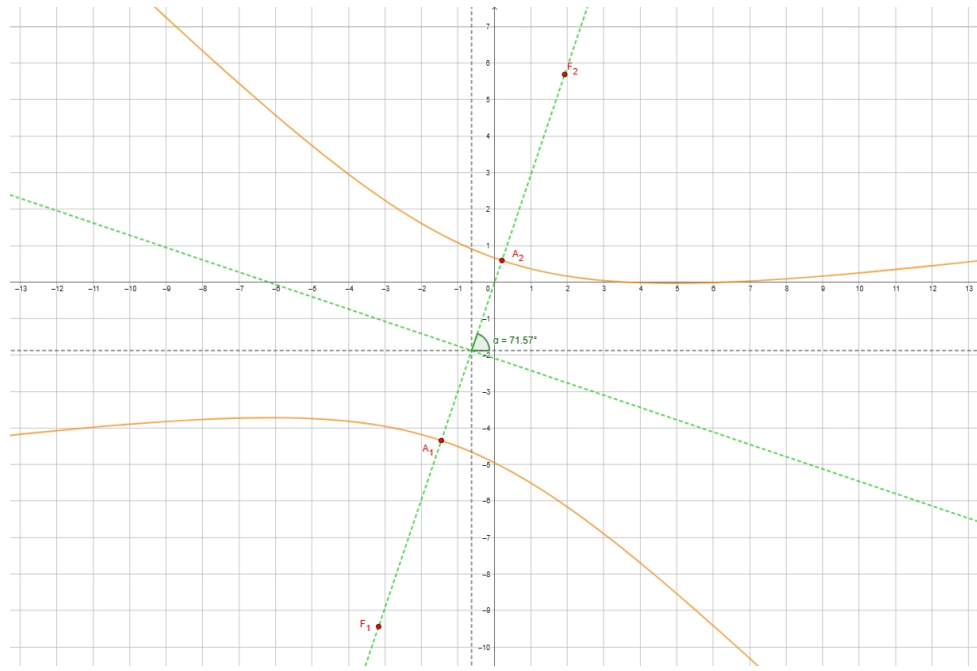
$$2y^2 - 8x^2 + 40 = 0.$$

Logo,

$$8x^2 - 2y^2 = 40,$$

ou seja,

$$\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1.$$



c) $G(x, y) = 3x^2 + 4xy + y^2 - 2x - 1 = 0$;

Solução: Vamos resolver este exercício de uma maneira alternativa, embora as abordagens anteriores possam ser aplicadas aqui.

Para $A = 3$, $B = 4$, $C = 1$, $D = -2$, $E = 0$ e $F = -1$, obtemos

$$B^2 - 4AC = 4 > 0,$$

de onde concluímos que esta equação representa a união de duas retas concorrentes ou uma hipérbole (não degenerada). Fazendo a mudança de coordenadas $x = u + h$ e $y = v + k$, e substituindo na equação original, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= 3(u + h)^2 + 4(u + h)(v + k) + (v + k)^2 - 2(u + h) - 1 \\ &= 3u^2 + 4uv + v^2 + (6h + 4k - 2)u + (4h + 2k)v + G(h, k), \end{aligned}$$

em que $G(h, k) = 3h^2 + 4hk + k^2 - 2h - 1$. Igualando os coeficientes de u e de v a zero, resulta no sistema linear

$$\begin{cases} 6h + 4k = 2 \\ 4h + 2k = 0 \end{cases},$$

cuja solução é $(h, k) = (-1, 2)$. Logo, fazendo $x = u - 1$ e $y = v + 2$, obtemos a equação

$$3u^2 + 4uv + v^2 = 0.$$

Para eliminar o termo uv , considere

$$\tan(2\theta) = \frac{B}{A-C} = 2 \Rightarrow 2\theta = \arctan(2) \Rightarrow \theta \approx 31,71^\circ.$$

Por uma rotação de ângulo θ , a nova equação da cônica é da forma

$$A'u^2 + C'v^2 = 0.$$

Os valores de A' e C' são as raízes do determinante:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 4\lambda - 1.$$

Resolvendo $\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$, encontramos $\lambda = 2 + \sqrt{5}$ e $\lambda = 2 - \sqrt{5}$. Uma vez que

$$\cos(2\theta) = \frac{A-C}{A'-C'} = \frac{2}{A'-C'} > 0,$$

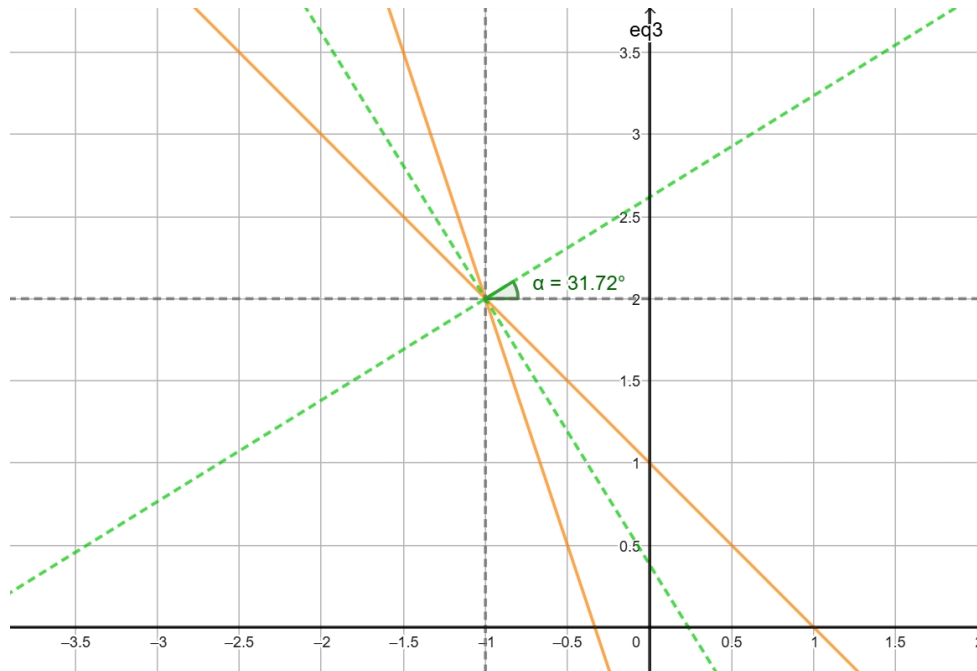
então $A' > C'$. Logo, $A' = 2 + \sqrt{5}$ e $C' = 2 - \sqrt{5}$. Portanto, a equação final da cônica é

$$(2 + \sqrt{5})u^2 + (2 - \sqrt{5})v^2 = 0,$$

que pode ser reescrita como $u^2 = (\sqrt{5} - 2)v^2$. Portanto,

$$u = \pm(\sqrt{5} - 2)v,$$

que representa as equações de duas retas concorrentes.



Observe que no sistema $O'uv$, essas retas se interceptam em $u = v = 0$. Uma vez que $x = u - 1$ e $y = v + 2$, concluímos que no sistema original Oxy , o ponto de interseção é $(-1, 2)$.

Referências Bibliográficas

- [1] Boulos, Paulo; Camargo, Ivan de. Geometria Analítica: um tratamento vetorial. São Paulo: Pearson, 2005.
- [2] Steinbruch, Alfredo; Winterle, Paulo. Geometria Analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.