Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

O método de Newton-Raphson

Prof. Doherty Andrade

Resumo: Nestas notas vamos apresentar os fundamentos teóricos do método de Newton-Raphson.

Sumário

1 Introdução

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais eficientes para a solução numérica de $f(x) = 0$. Como veremos, esse método possui ordem de convergência 2.

Suponha que $f(x)$ tenha uma raiz simples no intervalo $[a, b]$ e que f seja de classe C^2 em $[a, b]$. Dado $x_n \in (a, b)$, usando o desenvolvimento de Taylor, podemos escrever

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2!}f''(\xi_n)(x - x_n)^2,$$

onde ξ_n está entre x e x_n. Se α é a solução, então

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(\alpha - x_n) + \frac{1}{2!}f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2,$$

onde ξ_n está entre α e x_n.

Supondo que x_n esteja suficientemente próximo de α, podemos desprezar o resto $\frac{1}{2!}f''(\xi_n)(\alpha - x_n)^2$, donde obtemos uma aproximação para α

$$\alpha \approx x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

desde que $f'(x_n) \neq 0$.

Obtemos assim o método de Newton-Raphson que nos dá x_{n+1} como uma aproximação para a raiz α por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, n \geq 0. \tag{1.1}$$

Note que o método de Newton-Raphson é um método iterativo de passo 1 e que para ser iniciado necessitamos da aproximação inicial x_0.

A função

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \tag{1.2}$$

é chamada de função de iteração para o método de Newton-Raphson. Como $\varphi'(\alpha) = 0$ e $\varphi'(x)$ é contínua, segue que existe uma vizinhança de α em que $|\varphi'(x)| \leq k < 1$, onde $0 \leq k < 1$. O que mostra que $\varphi(x)$ é uma contração em alguma vizinhança de α. Isto explica porque o método de Newton-Raphson funciona.

2 Método prático

Uma maneira prática para usar o método de Newton-Raphson é utilizar uma tabela como mostrado abaixo, tabela 1.

Nesse exemplo, determinamos uma aproximação para a solução da equação $4\cos(x) - e^x = 0$ localizada em $[0, 1]$, tomamos $x_0 = 0.9$ como aproximação inicial.

Tabela 1: Modelo de tabela para Newton-Raphson

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$\|x_{k+1} - x_k\|$
0	0.9	0.02683676	-5.59291075	–
1	0.904798353	-0.00005693	-5.61663586	0.004798353
2	0.904788217	0	-5.61658576	0.000010136
3	0.9047882179	-	-	-

3 Interpretação Gráfica

A reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto $(x_k, f(x_k))$ cruza o eixo OX no ponto x_{k+1} dado por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Isso justifica o outro nome do método de Newton-Raphson: o método das tangentes.

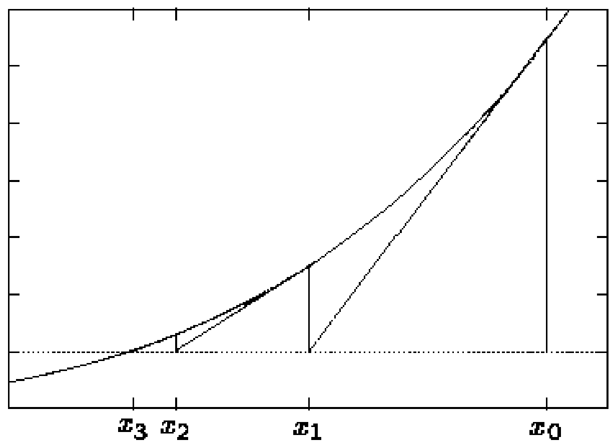

Figura 1: Interpretação gráfica

4 Ordem de convergência

Agora mostraremos que a convergência no método de Newton-Raphson é de ordem 2.

Suponha que f seja de classe C^2 em (a, b) e que tenha raiz simples $\alpha \in [a, b]$. Usando a expansão em Taylor em torno de algum ponto x_k temos:

$$f(x) = f(x_k) + (x_k - \alpha)f'(x_k) + \frac{1}{2}(x - x_k)^2 f''(\xi_k)$$

onde ξ_k é algum ponto entre x_k e α.

Tomando $x = \alpha$, reduzimos a expressão acima

$$0 = f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) + \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 f''(\xi_k)$$

onde ξ_k é algum ponto entre x_k e α. Dividindo por $f'(x_k)$ obtemos

$$0 = \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + (\alpha - x_k) + \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}.$$

Substituindo $\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)} - x_k$ por $-x_{k+1}$, tem-se

$$0 = -x_{k+1} + \alpha + \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}.$$

Reagrupando,

$$x_{k+1} - \alpha = \frac{1}{2}(\alpha - x_k)^2 \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)}.$$

Tomando o módulo e fazendo $k \to \infty$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|x_{k+1} - \alpha|}{|\alpha - x_k|^2} = \frac{1}{2} \lim_{k\to\infty} \left| \frac{f''(\xi_k)}{f'(x_k)} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{f''(\alpha)}{f'(\alpha)} \right| \neq 0.$$

O que mostra que a convergência no método de Newton-Raphson é quadrática.

Referências

[1] DE FIGUEIREDO, D. G., **Análise I**. Rio de Janeiro: L.T.C., 1995.

[1] S. D. CONTE. *Elementary Numerical Analysis*. MacGraw-Hill, 1965.

[2] K. ATKINSON. *An Introduction to Numerical Analysis*. John Willey& Sons, New York, 1983.