



APLICAÇÕES DE INTEGRAÇÃO

Volumes

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadora:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova

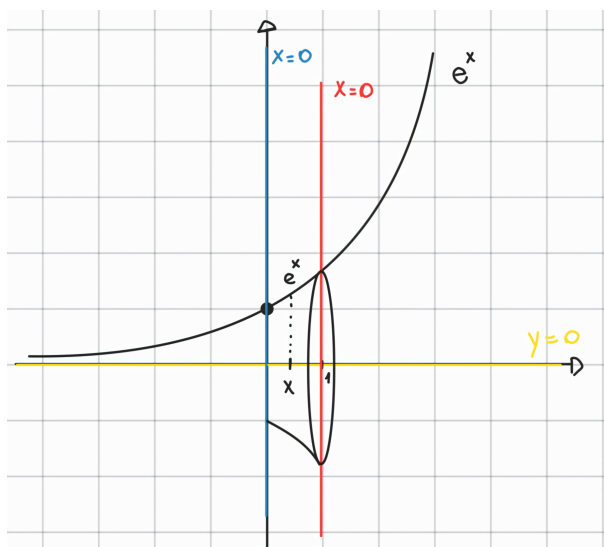
Como usar:

Seja S um sólido que está entre $x = a$ e $x = b$. Se a área da secção transversal de S no plano P_x , passando por x e perpendicular ao eixo x , é $A(x)$, onde A é uma função contínua, então o **volume** de S é:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n A(x_i^*) \Delta x = \int_a^b A(x) dx$$

Lembrando que $A(x)$ é a área de uma secção transversal móvel obtida pelo fatiamento passando por x perpendicular ao eixo x .

Exemplo 1: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pela curva $y = e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$; ao redor do eixo x .



Através da figura é perceptível que o raio de uma secção transversal desse sólido é $r = e^x$, sabemos que essa secção é circular, então podemos expressar sua área da seguinte maneira:

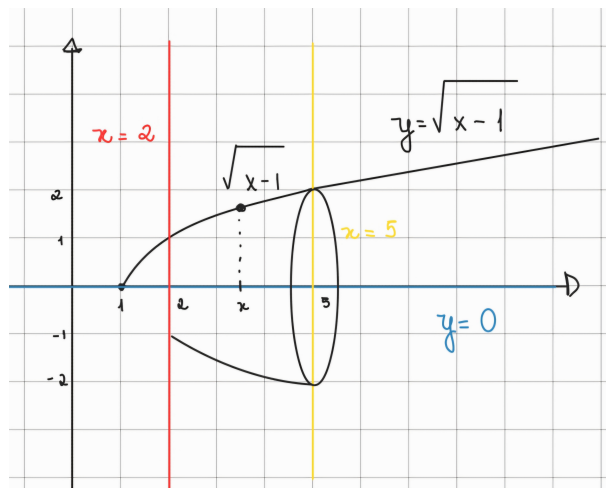
$$A = \pi r^2 = \pi(e^x)^2 = \pi e^{2x}$$

Devemos calcular o volume deste sólido no intervalo de $x = 0$ até $x = 1$, então:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 A(x) \, dx = \int_0^1 \pi e^{2x} \, dx \\ &= \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{e^0}{2} \right) \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi(e^2 - 1)}{2} \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido é $\frac{\pi(e^2 - 1)}{2}$.

Exemplo 2: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pela curva $y = \sqrt{x-1}$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 5$; ao redor do eixo x .



Através da figura concluimos que o raio da secção transversal do sólido é $r = \sqrt{x-1}$, como sabemos que a secção é circular, podemos expressar sua área como:

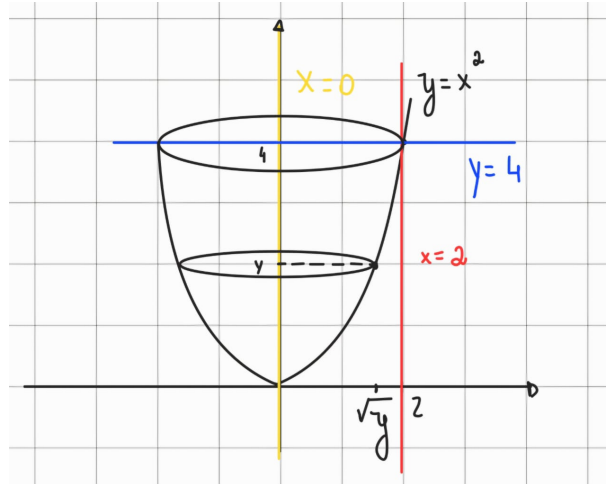
$$A = \pi r^2 = \pi(\sqrt{x-1})^2 = \pi(x-1)$$

Devemos calcular o volume do sólido no intervalo de $x = 2$ até $x = 5$, então:

$$\begin{aligned} V &= \int_2^5 A(x) \, dx = \int_2^5 \pi(x-1) \, dx \\ &= \pi \int_2^5 x-1 \, dx = \pi \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_2^5 \\ &= \pi \left(\frac{25}{2} - 5 - \frac{4}{2} + 2 \right) = \pi \left(\frac{21}{2} - \frac{6}{2} \right) \\ &= \frac{15\pi}{2} \end{aligned}$$

Portanto, o volume do sólido é $\frac{15\pi}{2}$.

Exemplo 3: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pela curva $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$, $y = 4$, $x = 0$; ao redor do eixo y .



Pela figura, podemos perceber que, através da rotação, obtemos um sólido em que o raio da secção circular é $r = \sqrt{y}$, então podemos expressar a área desta como:

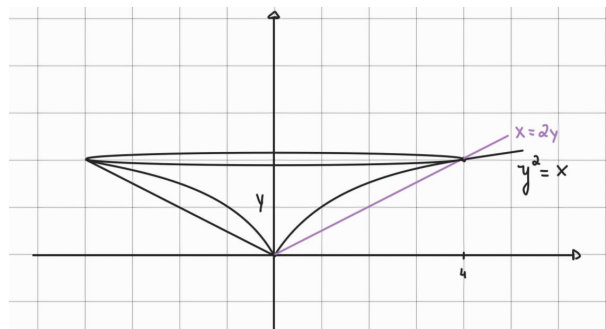
$$A = \pi r^2 = \pi(\sqrt{y})^2 = \pi y$$

E é pedido o volume do sólido no intervalo de 0 até 4, então:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^4 A(x) \, dx = \int_0^4 \pi y \, dy \\ &= \frac{\pi y^2}{2} \Big|_0^4 = \frac{16\pi}{2} - \frac{0}{2} = 8\pi. \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido é 8π .

Exemplo 4: Encontre o volume do sólido obtido pela rotação da região limitada pela curva $y^2 = x$, $x = 2y$, ao redor do eixo y .



Neste sólido, a secção é circular e pode ser expressa como $A = A_{\text{externa}} - A_{\text{interna}}$. Temos que o raio da área externa é $2y$ e sua área é $A_{\text{ext}} = \pi(2y)^2 \Rightarrow A_{\text{ext}} = \pi \cdot 4y^2$. Já na secção

circular mais interna temos que o raio é y^2 e sua área é $A_{int} = \pi(y^2)^2 \Rightarrow A_{int} = \pi \cdot y^4$.

Logo a área da secção circular do sólido é $A = \pi \cdot 4y^2 - \pi \cdot y^4 \Rightarrow A = \pi(4y^2 - y^4)$.

Temos também que o intervalo em que devemos calcular o volume do sólido é de $y = 0$ até $y = 2$ já que é onde as curvas se interceptam. Então, podemos expressar o volume como:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi(4y^2 - y^4) \, dy = \pi \int_0^2 (4y^2 - y^4) \, dy \\ &= \pi \left(\frac{4}{3}y^3 - \frac{y^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \pi \left(\frac{4}{3} \cdot 8 - \frac{32}{5} \right) \\ &= \pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = \pi \left(\frac{160 - 96}{15} \right) \\ &= \frac{64}{15}\pi. \end{aligned}$$

Logo, o volume do sólido é $\frac{64}{15}\pi$.

Referências

- [1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5^a edição, 2001.
- [2] STEWART, James. *Cálculo, Volume 1*. Editora Cengage Learning, 7^a edição, 2013.