Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

Determinando raízes da equação polinomial de terceiro grau

Doherty Andrade
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática - 87020-900 Maringá-PR, Brazil

Sumário

Resumo: É pouco usual o professor do ensino fundamental e do ensino médio exigirem a utilização de fórmula para a obtenção de soluções de uma equação polinomial do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. No entanto, muitos alunos têm curiosidada em saber se uma tal fórmula existe e se é de fácil utilização.

Embora as calculadoras mais simples já apresentem funções para esse problema e pensando nesses alunos, apresentamos um pequeno texto com esta fórmula.

1 História

O problema de encontrar raízes de um polinômio é antigo. Já por volta de 1600 AC os babilônios possuíam tabelas que permitiam resolver equações quadráticas. Os gregos antigos resolviam equações quadráticas por meio de construções geométricas, não existia sinal algum de formulação algébrica até 100 DC. Os gregos também tinham métodos aplicáveis a equações cúbicas envolvendo interseção de cônicas.

A solução algébrica da cúbica era desconhecida. Em 1494, Pacioli em sua “Summa Arithmetica"observa que a solução das equações $x^3 + mx = n$ e $x^3 + n = mx$ eram impossíveis.

Em Bolonha, durante a Renascença, os matemáticos descobriram que a equação geral da cúbica poderia ser reduzida aos três tipos básicos: $x^3+px=q$, $x^3=px+q$ e $x^3+q=px$. A separação em casos foi necessário pois eles não conheciam números negativos.

Scipio del Ferro resolveu todos os três casos e certamente passou o seu método a um estudante, Fior. Nicollo Fontana (ou Tartaglia) em 1535 redescobriu o método. Fontana usou o seu método numa competição pública com Fior, mas recusou-se a revelar os detalhes. Finalmente ele foi convencido pelo físico Girolano Cardano a revelar o segredo, mas com a condição de Cardano não revelar a mais ninguém. Quando a "Artis Magnae"de Cardano apareceu em 1545 ela continha uma completa discussão da solução de Fontana. Continha também o método de Ludovico Ferrari, discípulo de Cardano, para resolver a equação de quarto grau por redução a uma cúbica. Girolano sentiu-se desobrigado de cumprir o trato com Tartaglia pois descobriu que o seu método de solução já era conhecido. A solução de Fontana para $x^3+px=q$ é

$$x=\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{p^3}{27}+\frac{q^2}{4}}}.$$

Segue que polinômios de grau 3 com coeficientes nos números complexos também tem suas raízes expressas por meio de radicais.

A equação polinomial geral do quarto grau pode ser reduzida, via mudança de variáveis, para

$$x^4+px^2+qx+r=0,$$

e em seguida reduzida, com u, v, w complexos convenientes, para a forma

$$(x^2+\frac{u}{2})^2-(vx+w)^2=0.$$

Comparando obtemos que

$$\begin{aligned} p &= u-v^2, \\ q &= -2vw, \\ r &= \frac{u^2}{4}-w^2. \end{aligned}$$

Substituindo em $r=\frac{u^2}{4}-w^2$ obtemos, após uma conta fácil,

$$v^6+2pv^4+(p^2-4r)v^2-q^2=0,$$

que é uma equação cúbica em v^2 e as raízes desta equação são determinadas explicitamente por meio de radicais.

Assim, todas as equações de grau menor ou igual a 4 podem ser resolvidas por meio de radicais. Logo, é natural perguntar como a equação de grau 5 poderia ser resolvida. Muitos matemáticos tentaram em vão, por exemplo, Euler e Lagrange. O sentimento geral era que a equação do quinto grau não poderia ser resolvida por radicais. Ruffini em 1813 tentou dar uma prova desta impossibilidade, mas coube a Abel em 1824 provar que a equação geral do quinto grau, é em geral, insolúvel por radicais.

O problema agora era encontrar uma maneira de decidir se uma dada equação de grau 5 poderia ser resolvida por radicais. Em 1832 Evariste Galois, um jovem matemático francês, morre num duelo, mas deixa um belissímo critério para decidir se uma equação de quinto grau é ou não solúvel por radicais.

Para finalizar esta seção faremos um pequeno comentário sobre a bibliografia. Veja abaixo a lista. Em Hasse temos uma prova diferente para o Teorema fundamental da Álgebra e em Hardy temos a prova dada por Gauss. Em Stewart temos uma prova do Teorema Fundamental da Ágebra que usa a teoria de Galois, esta prova é devido a Legendre. Kuhn apresenta uma prova diferente e um procedimento numérico para localizar as raízes de um polinômio com coeficientes nos números complexos.

Referências dessa seção

[1] G. Cardano. Artis Magnae, sie de regulis algebraicis. T. R. Witmer, trans. ed (1968). MIT Press, Cambridge, Mas.
[2] W. K. Clifford. Mathematical Papers. Chelsea (1968), New York.
[3] C. Feferman. A easy proof of the fundamental theorem of algebra. Am. Monthly 74, 854-55
[4] C. F. Gauss. Disquisitiones Arithmeticae. A.A. Clarke, Trans. (1966) Yale Univ. Press. New Haven.
[5] H. Hasse. Number Theory. Springer Verlag (1978), New York.
[6] G. H. Hardy. A course of pure mathematics. Cambridge (1966).
[7] L. H. Jacy Monteiro. Elementos de Álgebra. LTC (1978), São Paulo.
[8] H. W. Kuhn. A new proof of the fundamental theorem of algebra. Mathematical Programming studies 1, 148-158.
[9] E. C. Titchmarsh. The theory of functions. Oxford (1960).
[10] I. Stewart. Galois Theory. Chapman and Hall (1973), London.

2 Fórmula para a equação de grau 3

Considermos a equação cúbica dada por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{1}$$

Fazendo

$$x = t - \frac{b}{3a}, \tag{2}$$

obtemos

$$t^3 + pt + q = 0, \tag{3}$$

onde

$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \tag{4}$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}. \tag{5}$$

Escrevendo

$$t = u + v \tag{6}$$

a equação (3) fica como

$$(u^3 + v^3 + q) + (3uv + p)(u + v) = 0, \tag{7}$$

que tem uma solução dada por

$$u^3 + v^3 = -q \tag{8}$$

$$u^3v^3 = \frac{-p^3}{27}. \tag{9}$$

Logo, devemos achar números u^3 e v^3 tais que a soma seja $S = u^3 + v^3 = -q$ e o produto $P = u^3v^3 = \dfrac{-p^3}{27}$, cuja solução vem da equação do segundo grau em Y

$$Y^2 - SY + P = 0,$$

ou seja,

$$Y_+ = \frac{S + \sqrt{S^2 - 4P}}{2} = -\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}} \tag{10}$$

$$Y_- = \frac{S - \sqrt{S^2 - 4P}}{2} = -\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}. \tag{11}$$

Façamos $Y_+ = u^3$ e $Y_- = v^3$. Segue que $u = \sqrt[3]{Y_+}$ e $v = \sqrt[3]{Y_-}$.

Substituindo (10) e (11) em (6) obtemos

$$t_1 = u + v = \sqrt[3]{Y_+} + \sqrt[3]{Y_-}.$$

Ou seja,

$$t_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}. \tag{12}$$

Portanto, **uma** solução da equação inicial (1) é

$$x_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}} - \frac{b}{3a}. \tag{13}$$

Note que esta raiz pode ser complexa, pois o valor $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$ pode ser negativo.

Tendo obtido uma solução x_1, podemos determinar as duas restantes x_2 e x_3 fazendo a divisão do polinômio original por $x - x_1$. Em seguida, obter a solução da equação de segundo grau.

Exemplos: (a) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ tem raizes 1,2 e 3.

(b) $2x^3 - 22 * x - 12 = 0$

3 Procedimento no Maple

O procedimento denominado **terceiro** foi programado em Maple. Nesse procedimento basta você digitar "terceiro();"que o Maple vai solicitar os coeficientes a, b, c e d da equação do terceiro grau $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ e apresentar em seguida uma solução.

```
> terceiro := proc() local  OK, A, B, C, D,Delta,r,p,q;
 printf(`Programando - equacoes do terceiro grau\n`);
 printf(`Entre com o coeficiente a\n`);
 A := scanf(`%a`)[1];
 printf(`Entre com o coeficiente b\n`);
 B := scanf(`%a`)[1];
 printf(`Entre com o coeficiente c\n`);
 C := scanf(`%a`)[1];
 printf(`Entre com o coeficiente d\n`);
 D := scanf(`%a`)[1];
 p:=C/A-B^2/(3*A^2):
```

```
q:=2*B^3/(27*A^3)-B*C/(3*A^2)+D/A:
Delta:=q^2+4*p^3/27:
r:=(-q/2+1/2*sqrt(Delta))^(1/3)+(-q/2-1/2*sqrt(Delta))^(1/3)-B/(3*A):
print(r);
end:
```

Como exemplo, vamos calcular uma raiz da equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$. Note que as raizes sao 1, 2 e 3.

Para usar o procedimento, basta digitar o comando e informar as informações que o procedimento solicita:

```
> terceiro();
```

Referências

[1] de Figueiredo, D. G., Análise I. L.T.C. Rio de Janeiro, 1995.

[2] L. H. Jacy Monteiro. Elementos de Álgebra. LTC (1978), São Paulo.