

Teorema de Taylor

Prof. Doherty Andrade

Sumário

1	Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange	1
2	Exemplos	2
3	Exercícios	3
4	A Fórmula de Taylor	4
5	Observação	5

1 Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

O polinômio de Taylor de grau n é dado por, numa vizinhança de $x = a$,

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

A principal propriedade deste polinômio é que ele passa pelo ponto $(a, f(a))$ e possui as mesmas derivadas até ordem n que a função f .

Como veremos nos exemplos, o polinômio de Taylor de f desenvolvido numa vizinhança de $x = a$ aproxima a função nesta vizinhança.

Cada vez que aproximamos um valor desconhecido por outro conhecido é importante saber estimar o erro que se comete ao fazer esta aproximação. Isto é estimar o erro para melhorar a aproximação se necessário. Queremos encontrar $\epsilon > 0$ de tal forma que

$$|f(x) - p_m(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta),$$

onde p_m é o polinômio de Taylor de grau m numa vizinhança de $x = a$.

Teorema 1.1 (Teorema de Taylor) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com n derivadas contínuas e $f^{(n+1)}$ definida em todo (a, b) . Seja $x_0 \in [a, b]$ então existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

O Teorema de Taylor é uma extensão do teorema do Valor médio. Isto é se consideramos $m = 1$ teremos que

$$f(x) = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c)$$

Sua demonstração também segue a mesma idéia da demonstração do Teorema do Valor médio.

Demonstração: (Teorema 1.1:) Denotemos por

$$G(t) = f(x) - f(t) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k + A(x - t)^{n+1}$$

onde A é de tal forma que $G(x_0) = 0$. Portanto teremos que $G(x) = G(x_0) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (x, x_0)$ tal que $G'(c) = 0$. Derivando G encontramos

$$G'(t) = -f'(t) - \sum_{k=1}^n \frac{d}{dt} \left\{ \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x - t)^k \right\} - (n+1)A(x - t)^n$$

Lembrando das fórmulas das derivadas de um produto teremos que

$$G'(t) = -f'(t) + \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x - t)^k - \frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!} (x - t)^{k-1} \right\} - (n+1)A(x - t)^n$$

Note que o somatório anterior é telescópico, portanto

$$G'(t) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x - t)^n - (n+1)A(x - t)^n \Rightarrow \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n)!} (x - c)^n = (n+1)A(x - c)^n$$

Tomando $t = c$, segue que

$$A = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

Tomando $t = x_0$ e aplicando o fato que $G(x_0) = 0$ obtemos o resultado. $\square$

2 Exemplos

1. Determine o m de tal forma que a aproximação

$$e^x \approx \sum_{n=0}^m \frac{x^n}{n!},$$

para $x \in (0, 1)$, possua dois dígitos exatos.

O erro ao aproximar a exponencial pelo polinômio de Taylor está dado por

$$E_m = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} (x)^{m+1} = \frac{e^c}{(m+1)!} (x)^{m+1} \leq \frac{e}{(m+1)!}$$

Para ter dois dígitos exatos, devemos ter que $E_m \leq 0,005$. Para obter esta estimativa fazemos

$$\frac{e}{(m+1)!} \leq 0,005 \Rightarrow (m+1)! \geq 200e = 543.6563656 \geq 544$$

Como $6! = 720$ podemos tomar $m = 5$. Isto é para qualquer valor $x \in (0, 1)$ a expressão

$$\sum_{n=0}^5 \frac{x^n}{n!}$$

aproxima ao exponencial e^x com dois dígitos exatos. □

2) Encontre a vizinhança de $x = 0$ na qual o polinômio de Taylor de grau 2 aproxima a função $y = \cos(x)$ com dois dígitos exatos.

O polinômio de Taylor de grau 2 é dado por

$$p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 \Rightarrow p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

O erro que cometemos ao aproximar a função $f(x) = \cos(x)$ por $p_2(x)$ é

$$|\cos(x) - p_2(x)| = \left| \frac{f'''(c)}{6} x^3 \right| < \varepsilon.$$

Como $f'''(x) = \sin(x)$, encontramos que

$$\frac{|\sin(c)|}{6} a^3 \leq \varepsilon, \quad \forall |x| < a.$$

Queremos que $\frac{|\sin(c)|}{6} a^3 < 0,005$ isto é $|\sin(c)| a^3 < 0,03$. Tomando $a = 0.4$ temos que $|\sin(c)| a^3 \leq 0.0256$.

Portanto, no intervalo $[-0.4, 0.4]$ a função $\cos(x)$ é aproximada por $p_2(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2$ com dois dígitos exatos. □

3 Exercícios

1. Calcule o polinômio de Taylor de grau 5 numa vizinhança de $x = 0$ das seguintes funções

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = \cos(x), \quad f(x) = \ln(1+x), \quad f(x) = e^{x^2}$$

Resp: a) $p(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$, b) $p(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$, c) $p(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5}$ d) $p(x) = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2}$

2. Encontre o polinômio de Taylor de grau 5 da função $f(x) = xe^5$ **Resp:** $p(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{24}$.

4 A Fórmula de Taylor

Primeiramente vamos nos concentrar no caso de $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável. O polinômio de Taylor de f no ponto $a \in I$ é o polinômio $p(x) = \sum_0^n a_k x^k$ de grau menor do que ou igual a n tal que as suas derivadas no ponto $x = 0$ coincidam com as derivadas de mesma ordem de f no ponto $x = a$. Como $p^{(k)}(0) = k!a_k$ segue que o polinômio de Taylor é dado por

$$p(x) = \sum_0^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} x^k.$$

Teorema 4.1 (Fórmula de Taylor com resto infinitesimal) *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ n vezes derivável no ponto $a \in I$. A função definida por $r : J \rightarrow \mathbb{R}$ onde J é o intervalo*

$$J = \{h \in \mathbb{R}; a + h \in I\}$$

pela igualdade

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + r(h)$$

satisfaz

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0.$$

Reciprocamente, se $p(h)$ é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r(h) = f(h) - p(h)$ cumpre

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h^n} = 0,$$

então $p(h)$ é o polinômio de Taylor de f em a .

Teorema 4.2 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivável $n + 1$ vezes em (a, b) com $f^{(n)}$ contínua em $[a, b]$. Existe $c \in (a, b)$ tal que*

$$f(b) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(b - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{(n+1)}.$$

Tomando $b = x$, obtemos

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - a)^{(n+1)}.$$

Teorema 4.3 (Fórmula de Taylor com resto integral) *Se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ possui a $n + 1$ -ésima derivada contínua no intervalo de extremos a e $a + h$ pertencentes a I , então*

$$f(a + h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n)!}h^n + h^{n+1} \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{(n)!} f^{(n+1)}(a + th) dt.$$

Demonstração: Pelo Teorema fundamental do Cálculo, temos

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)dt.$$

Integrando por partes, com $u = f'(t)$, $v = -(x - t)$, $du = f^{(2)}(t)dt$, $dv = dt$ obtemos

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \int_a^x (x - t)f^{(2)}(t)dt.$$

Repetindo o argumento na integral acima, fazendo $u = f'$, $v = -\frac{(x-t)^2}{2}$, $du = f^{(3)}$, $dv = (x - t)dt$. Disto resulta que

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \int_a^x \frac{(x - t)^2}{2!}f^{(3)}(t)dt$$

Repetimos o processo e usando indução matemática, obtemos o teorema. □

5 Observação

Seja I um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é analítica em I se para cada $c \in I$ existe uma sequência de reais (a_n) e $\delta > 0$ tal que

$$f(x) = \sum a_n(x - c)^n$$

para todo x com $|x - c| < \delta$.

A série de Taylor, em alguns casos, é a série acima. Veremos mais sobre isto adiante.

Uma série de potências é uma expressão da forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Como exemplo simples, tomemos a seguinte série

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

Note que seus termos formam uma progressão geométrica. Assim, fica fácil determinar o valor da sua soma.

Ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1 - x} \quad (*)$$

x pertence ao intervalo $[-1,1)$.

Note que podemos usar esta série para determinar a soma de outras. Vejamos um exemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{(2n)}$$

$y = x^2$ e usando (*) obtemos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^{(2n)} = \frac{1}{1 - y^2}$$

Note que a série $\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n$ também pode ser calculada usando a igualdade (*), para isto basta tomar $-x$ no lugar de x para obter

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{x + 1}$$

Vejamos algumas séries importantes;

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \frac{1}{x + 1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!} = \sin(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n)}}{(2n)!} = \cos(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n+1)} x^n}{n} = \ln(x + 1)$$