



REGRAS DE DIFERENCIAÇÃO

Taxas Relacionadas

Preceptora:	Isadora Honório Guimarães
Coordenadoras:	Patrícia Hilário Tacuri Córdova Claudete Matilde Webler Martins

Quando e como usar: *Em um problema de taxas relacionadas a ideia é computar a taxa de variação de uma grandeza em termos da taxa de variação da outra. O procedimento é achar uma equação que relacione as duas grandezas e então usar a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados em relação ao tempo. Estratégia para a resolução:*

- 1- *Leia cuidadosamente o problema.*
- 2- *Se possível, faça um diagrama.*
- 3- *Introduza a notação. Atribua os símbolos para todas as grandezas que são funções do tempo.*
- 4- *Expresse a informação dada e a taxa requerida em termos de derivadas.*
- 5- *Escreva uma equação que relacione as várias grandezas do problema. Se necessário, use a geometria da situação para eliminar uma das variáveis por substituição.*
- 6- *Use a Regra da Cadeia para diferenciar ambos os lados da equação em relação a t .*
- 7- *Substitua a informação dada dentro da equação resultante e resolva-a para a taxa desconhecida.*

Exemplo 1: A superfície de uma esfera aumenta a uma razão de $4\pi \text{ cm}^2/\text{s}$. Determine a velocidade com qual o raio da esfera está aumentando quando o raio for 10 cm.

Seja r cm e $S \text{ cm}^2$ o raio e a superfície desta esfera depois de t segundos, respectivamente. Então, a área da superfície dessa esfera é:

$$S = 4\pi r^2$$

Diferenciando ambos os lados em relação a t :

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \quad (1)$$

Como a área da superfície aumenta a uma razão de $4\pi \text{ cm}^2/\text{s}$:

$$\frac{dS}{dt} = 4\pi \quad (2)$$

De (1) e (2), temos:

$$4\pi = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{4\pi}{8\pi r} = \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi}$$

Portanto, quando $r = 10$, $\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2 \cdot 10} = \frac{1}{20} \text{ cm/s}$.

Exemplo 2: O volume de uma bolha aumenta a uma razão de $40\text{cm}^3/\text{s}$. Determine a velocidade com a qual a área da superfície desta bolha aumenta quando o raio é 4 cm.

Seja $r \text{ cm}$, $S \text{ cm}^2$ e $V \text{ cm}^3$ o raio, a área da superfície e o volume desta bolha depois de t segundos, respectivamente. Então:

$$S = 4\pi r^2, V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Diferenciando ambos os lados em relação a t :

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \quad (3)$$

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \quad (4)$$

Como o volume aumenta a uma razão de:

$$\frac{dV}{dt} = 40 \quad (5)$$

De (4) e (5):

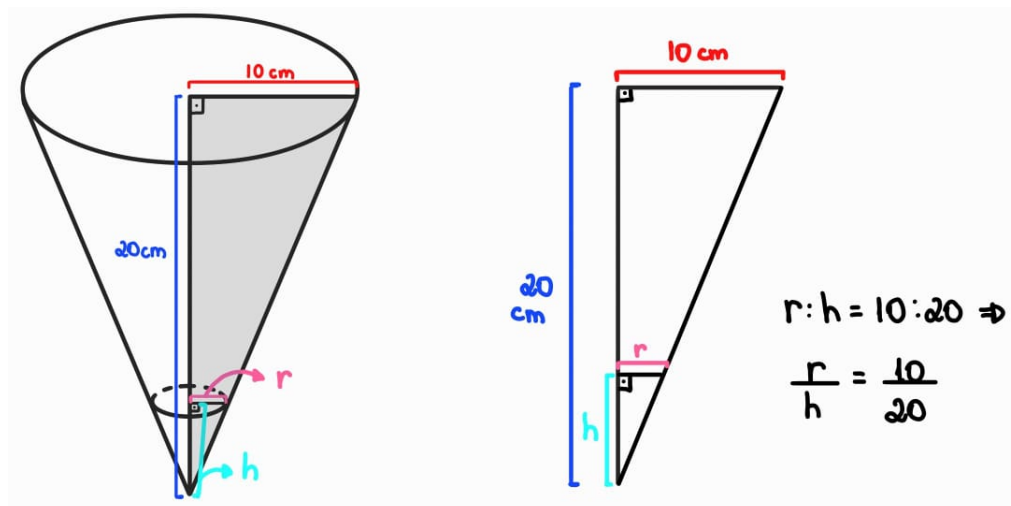
$$40 = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{10}{\pi r^2} \quad (6)$$

De (3) e (6):

$$\frac{dS}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{10}{\pi r^2} \Rightarrow \frac{dS}{dt} = \frac{80}{r}$$

Portanto, quando $r = 4$, $\frac{dS}{dt} = \frac{80}{4} = 20 \text{ cm}^2/\text{s}$.

Exemplo 3: A água é despejada a uma razão de $3 \text{ cm}^3/\text{s}$ em um recipiente cônico cuja base tem um raio de 10 cm no ponto mais largo e uma profundidade de 20 cm. Determine a velocidade com a qual a altura da água está subindo quando a água possui profundidade de 6 cm.



Seja r cm, h cm e V cm³/s o raio da água na superfície, a altura da água e a quantidade da água depois de t segundos, respectivamente.

Como $\frac{r}{h} = \frac{10}{20} \Rightarrow r = \frac{1}{2}h$; portanto:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{1}{4}h^2 \cdot h = \frac{1}{12}\pi h^3$$

Diferenciando ambos os lados em relação a t , temos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \quad (7)$$

Como a água é jogada a uma razão de 3 cm³/s, então:

$$\frac{dV}{dt} = 3 \quad (8)$$

De (7) e (8):

$$3 = \frac{1}{4}\pi h^2 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{3}{\frac{\pi h^2}{4}} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{dt} = 3 \cdot \frac{4}{\pi h^2} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = \frac{12}{\pi h^2}$$

Portanto, quando $h = 6$, $\frac{dh}{dt} = \frac{12}{\pi \cdot 6^2} = \frac{12}{36\pi} = \frac{1}{3\pi}$ cm/s.

Referências

- [1] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um curso de cálculo: volume 1*. Rio de Janeiro. LTC–Livros Técnicos e Científicos. 5ª edição, 2001.
- [2] STEWART, James. *Cálculo*, Volume 1. Editora Cengage Learning, 7ª edição, 2013.