

Propriedades das Funções Contínuas

Prof. Doherty Andrade

2005- UEM

Sumário

1	Seqüências	2
1.1	O Corpo dos Números Reais	2
1.2	Seqüências	5
1.3	Seqüências de Cauchy	8
2	Propriedades de Limites de Funções	10
2.1	Limites de Funções	10
3	Propriedades das Funções Contínuas	13
3.1	Continuidade	13
3.2	Propriedades	14
3.3	Continuidade Uniforme	19
3.4	Exercício	20

1

Seqüências

1.1 O Corpo dos Números Reais

Vamos rever algumas coisas que já sabemos sobre o corpo dos números reais.

Por corpo entendemos um conjunto \mathbb{K} munido de duas operações, chamadas adição e multiplicação, aqui indicadas por $+$ e \cdot , que satisfazem:

A1) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x + y \in \mathbb{K}$,

A2) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x + y = y + x$,

A3) se $x, y, z \in \mathbb{K}$, então $x + (y + z) = (x + y) + z$,

A4) existe $0 \in \mathbb{K}$ tal que $0 + x = x$,

A5) para cada $x \in \mathbb{K}$, existe um elemento denotado por $-x \in \mathbb{K}$ tal que $x + (-x) = 0$,

M1) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x \cdot y \in \mathbb{K}$,

M2) se $x, y \in \mathbb{K}$, então $x \cdot y = y \cdot x$,

M3) se $x, y, z \in \mathbb{K}$, então $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$,

M4) existe um elemento $1 \in \mathbb{K}$ tal que $1 \cdot x = x$,

M5) se $x \in \mathbb{K} - \{0\}$ então existe um elemento denotado por $\frac{1}{x} \in \mathbb{K}$ tal que $x \cdot (\frac{1}{x}) = 1$,

D) se $x, y, z \in \mathbb{K}$, então $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$.

Note que um corpo tem os elementos: 0 e 1.

Notemos que se $a \in \mathbb{K}$, podemos definir na para cada natural n indutivamente:

$$1 \cdot a = a \text{ e}$$

$$(n + 1) \cdot a = a + n \cdot a.$$

Pode acontecer que $p \cdot a = 0$ para algum $p \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{K} - \{0\}$. Se p é o menor natural para o qual $p \cdot 1 = 0$ dizemos que \mathbb{K} tem característica p . Se $p \cdot 1 \neq 0$ para todo $p \in \mathbb{N}$ dizemos que \mathbb{K} tem característica zero.

Considere \mathbb{Z}_3 o conjunto das classes residuais módulo 3. Defina as seguintes operações:

$$\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b} \text{ e } \bar{a} \cdot \bar{b} = \overline{a \cdot b}.$$

+	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	\times	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$
$\bar{2}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{0}$	$\bar{2}$	$\bar{1}$

Mostra-se que estas operações estão bem definidas e que este conjunto munido destas operações é um corpo.

Os axiomas da adição para corpo implicam na seguinte proposição cuja prova é deixada como exercício.

Proposição 1.1.1 *Os axiomas da adição implicam*

a) *se $x + y = x + z$, então $y = z$,*

- b) se $x + y = x$, então $y = 0$,
 c) se $x + y = 0$, então $y = -x$,
 d) $-(-x) = x$.

Os axiomas da multiplicação implicam na seguinte proposição cuja prova é deixada como exercício.

Proposição 1.1.2 *Os axiomas da multiplicação implicam*

- a) se $x \neq 0$ e $xy = xz$ então $y = z$,
 b) se $x \neq 0$ e $xy = x$ então $y = 1$,
 c) se $x \neq 0$ e $xy = 1$ então $y = \frac{1}{x}$,
 d) $x \neq 0$ então $\frac{1}{\frac{1}{x}} = x$.

Os axiomas de corpo implicam nas seguintes propriedades, a prova é deixada como exercício.

Proposição 1.1.3 *Os axiomas da multiplicação implicam*

- a) se $0 \cdot x = 0$,
 b) se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ então $xy \neq 0$,
 c) se $(-x)y = -(xy) = x(-y)$
 d) se $(-x)(-y) = xy$.

Definição 1.1.4 *Um corpo \mathbb{K} é ordenado se \mathbb{K} é um conjunto ordenado pela relação de ordem total \leq e esta ordem é compatível com as operações, isto é,*

- a) se $a \leq b$ então $a + c \leq b + c$, $\forall c \in \mathbb{K}$,
 b) se $a \leq b$ e $0 \leq c$ então $ac \leq bc$.

Outra forma equivalente de dizer que \mathbb{K} é corpo ordenado é: existe um conjunto P (chamado o conjuntos dos elementos positivos) tal que

1i) se $a \in \mathbb{K}$, então $a \in P$ ou $-a \in P$ ou $a = 0$,

2i) se $a, b \in P$, então $a + b \in P$,

3i) se $a, b \in P$, então $ab \in P$.

Se definimos a relação:

$$x \leq y \iff y - x \in P \cup \{0\},$$

então $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ é um corpo ordenado.

Note que dentro de um corpo ordenado há uma cópia de \mathbb{N} , \mathbb{Z} e \mathbb{Q} .

Um corpo ordenado \mathbb{K} é um corpo ordenado completo se vale o seguinte axioma (propriedade do supremo):

Propriedade do Supremo: Todo subconjunto não vazio $A \subseteq \mathbb{K}$ limitado superiormente tem um supremo.

Teorema 1.1.5 *Num corpo ordenado completo, \mathbb{N} não é limitado superiormente.*

Demonstração: De fato, suponha que seja limitado superiormente e seja $c = \sup \mathbb{N}$. Então, $c - 1$ não é cota superior de \mathbb{N} e assim existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $c - 1 < n$. Segue que $c < n + 1$ e assim c não é cota superior de \mathbb{N} , o que é absurdo. \square

Num corpo ordenado completo, a seguinte propriedade, chamada arquimediana vale:

Proposição 1.1.6 *Seja \mathbb{K} corpo ordenado completo. Se $x > 0$, então existe n natural tal que $x < n$.*

Demonstração: Suponha que em \mathbb{K} não vale esta propriedade. Então existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $n \leq x, \forall n$. Então o conjunto \mathbb{N} em \mathbb{K} deveria ser limitado por x e portanto teria um supremo x_0 . Logo, $x_0 - 1$ não seria uma cota superior para \mathbb{N} . Assim, existe N natural tal que $x_0 - 1 < N$ e assim x_0 seria menor do que $N + 1$, o que é absurdo. \square

Como consequência temos que entre dois elementos de um corpo ordenado completo \mathbb{K} existe um racional. Isto é, o conjunto dos racionais de \mathbb{K} é denso em \mathbb{K} .

Proposição 1.1.7 *Seja \mathbb{K} corpo ordenado completo. Então o conjunto dos racionais de \mathbb{K} é denso em \mathbb{K} .*

Demonstração: De fato, se $0 \leq x < y$ então existe n natural tal que

$$\frac{1}{y - x} < n$$

e assim

$$y - x > \frac{1}{n}.$$

Existe um menor natural m tal que $nx < m$ e então $x < \frac{m}{n}$ e $m - 1 \leq nx$.

Portanto,

$$\frac{m - 1}{n} \leq x$$

e como $x + \frac{1}{n} < y$, $\frac{m}{n} < y$, então ,

$$x < \frac{m}{n} < y.$$

\square

O seguinte teorema estabelece a unicidade do corpo dos reais. A prova da existência do isomorfismo será omitida.

Teorema 1.1.8 *Existe um corpo ordenado completo \mathbb{R} . Se R_1 e R_2 são corpos ordenados, então existe um isomorfismo de corpos ordenados entre eles, isto é, existe uma aplicação $\Psi : R_1 \rightarrow R_2$ bijetora que preserva a estrutura:*

- 1i) $\Psi(x + y) = \Psi(x) + \Psi(y)$,
- 2i) $\Psi(xy) = \Psi(x)\Psi(y)$,
- 3i) se $x < y$ então $\Psi(x) < \Psi(y)$.

Duas construções do corpo dos números reais conhecidas foram dadas por Dedekind e por Cantor. Dedekind desenvolveu sua construção dos reais em 1858, mas só a publicou em 1872. Neste mesmo ano, Cantor apresentou uma construção usando seqüências de Cauchy.

1.2 Seqüências

Uma seqüência (infinita) de números reais é uma função cujo domínio é o conjunto dos números naturais:

$$x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}.$$

É usual representar a imagem $x(n)$ por x_n . Também é usual representar uma seqüência por $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$ ou resumidamente por (x_n) .

Uma subsequência de uma seqüência (x_n) é a restrição de (x_n) a um subconjunto infinito N' de \mathbb{N} .

Definição 1.2.1 Dizemos que a seqüência (x_n) é:

- (a) limitada superiormente se existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leq M, \forall n$.
- (b) limitada inferiormente se existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $m \leq x_n, \forall n$.
- (c) limitada se existe $M \geq 0$ tal que $|x_n| \leq M, \forall n$.

Exemplos

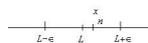
- a) $x_n = \frac{1}{n}$ é limitada, inferiormente por 0 e superiormente por 1.
- b) $x_n = (-1)^n$ é limitada, inferiormente por -1 e superiormente por 1.
- c) $x_n = n^2$ é limitada inferiormente por 0 e não é limitada superiormente.

Dizemos que as seqüências (x_n) e (y_n) são iguais se $x_i = y_i$ para todo i natural.

Dizemos que uma seqüência (x_n) converge para o número real L , se a diferença $|x_n - L|$, a partir de algum índice n_0 , puder ser feita tão pequena quanto desejado. Em termos matemáticos, dizemos isto com a seguinte definição

Definição 1.2.2 Dizemos que a seqüência (x_n) converge para o número real L , se dado um número $\epsilon > 0$ qualquer existe um número natural n_0 tal que

$$|x_n - L| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$



Usamos as notações

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \quad \text{ou} \quad x_n \rightarrow L,$$

para dizer que a seqüência (x_n) converge para L .

Se a seqüência não é convergente, dizemos que a seqüência é divergente.

Notemos que a seqüência $x_n = \frac{1}{n}$ converge para 0. De fato, dado o real $\frac{1}{\epsilon} > 0$ existe um número natural n_0 tal que $n_0 > \frac{1}{\epsilon}$. Assim, para todo $n \geq n_0$ temos que

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \epsilon.$$

Já a seqüência $x_n = (-1)^n$ não converge para real algum. Também, mas por outro motivo, a seqüência $x_n = n$ não converge.

Teorema 1.2.3 (Unicidade do limite) *Se uma seqüência é convergente, então o seu limite é único.*

Demonstração: Suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$. Então, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq n_0.$$

Logo,

$$|a - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $a = b$. Isto conclui a prova do teorema. \square

Como vimos nos exemplos, nem toda seqüência limitada é convergente.

• **Exemplo 1.2.4**

Dado um número natural $N \geq 0$, a seqüência definida por

$$x_{k+1} = \frac{1}{2} \left(x_{k-1} + \frac{N}{x_{k-1}} \right)$$

aproxima a raiz quadrada do número natural N já era conhecido pelos babilônios 17 séculos antes de cristo. Note que se o chute inicial for um número racional, então a seqüência gerada é composta apenas de numeros racionais. Assim, tomando $N = 2$, geramos uma seqüência de racionais que converge para o irracional $\sqrt{2}$.

Teorema 1.2.5 *Toda seqüência convergente é necessariamente limitada.*

Demonstração: Suponha que a seqüência (x_n) seja convergente e seja L o seu limite. Então, dado $\epsilon = 1$, existe um natural n_0 tal que

$$|x_n - L| < 1, \quad \forall n > n_0.$$

Logo, para $n > n_0$ os termos x_n são limitados

$$L - 1 < x_n < 1 + L.$$

O conjunto dos termos x_n com $n \leq n_0$, também é limitado pois é um conjunto finito. Isto mostra o teorema. \square

Teorema 1.2.6 *Toda subsequência de uma seqüência convergente, é convergente.*

Demonstração: De fato, Seja (x_n) uma seqüência convergente para a e (x_{n_k}) uma subsequência. Dado $\epsilon > 0$ existe n_0 tal que

$$|x_n - a| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Tomando $n_k \geq n_0$, temos

$$|x_{n_k} - a| < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

E assim segue o resultado. \square

•• **Exercício 1.2.7** *Verifique que a seqüência $x_n = \frac{n}{3n+1}$ converge para $\frac{1}{3}$.*

Podemos definir uma seqüência, ou listando os seus elementos ou informando a sua lei de formação.

Por exemplo a seqüência dada por

$$x_1 = 1, x_2 = 1, x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, n \geq 3.$$

Neste caso dizemos que a seqüência foi definida recursivamente. Esta é a seqüência de Fibonacci $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots)$. É exemplo de seqüência que não converge.

Como exemplo, escreva os elementos da seqüência

$$x_1 = 1, x_n = n \cdot x_{n-1}, n \geq 2.$$

Definição 1.2.8 *Dizemos que a seqüência (x_n) é crescente se verifica $x_n \leq x_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ natural.*

Dizemos que a seqüência (x_n) é decrescente se verifica $x_n \geq x_{n+1}$ para todo $n \geq 1$ natural.

Chamamos de seqüência monótona toda seqüência que é crescente ou decrescente.

O seguinte resultado estabelece uma relação entre os conceitos de seqüência monótona e seqüência convergente.

Teorema 1.2.9 *Toda seqüência monótona e limitada é convergente.*

Demonstração: Seja a seqüência (x_n) . Podemos supor que a seqüência é monótona crescente. Como (x_n) é limitada, segue que o conjunto $X = \{x_n, n \geq 1\}$ é limitado. Logo, pelo axioma do supremo, X possui supremo L . Dado $\epsilon > 0$, segue que $L - \epsilon$ não é supremo de X e assim existe n_0 tal que

$$x_{n_0} > L - \epsilon.$$

Como a seqüência é crescente, segue que

$$x_n \geq x_{n_0} > L - \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

Donde,

$$0 \leq L - x_n < \epsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

O que mostra que a seqüência é convergente. \square

Uma prova análoga pode ser feita para provar que o ínfimo é o limite de uma seqüência decrescente limitada inferiormente. Deixamos essa parte como exercício.

Note que toda seqüência monótona convergente é limitada, pois já provamos que toda seqüência convergente é limitada.

1.3 Seqüências de Cauchy

Uma seqüência é chamada seqüência de Cauchy se a partir de algum índice n_0 os seus termos estão tão próximos, entre si, quanto desejado. Em termos matemáticos,

Definição 1.3.1 Dizemos que uma seqüência (x_n) é de Cauchy se dado $\epsilon > 0$ existe n_0 natural tal que se $m, n \geq n_0$ então tem-se

$$|x_n - x_m| < \epsilon.$$

Lema 1.3.2 Toda seqüência de Cauchy é limitada.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy. Dado $\epsilon = 1$ existe n_0 natural tal que

$$|x_n - x_m| < 1, \quad \forall m, n \geq n_0.$$

Tomando $m = n_0$ temos

$$x_{n_0} - 1 < x_n < 1 + x_{n_0}, \quad \forall n \geq n_0,$$

isto é, o conjunto dos termos $x_n, n \geq n_0$ é limitado. Os termos anteriores a n_0 são em quantidade finita e portanto limitados. Segue que a seqüência é limitada. \square

Lema 1.3.3 Toda seqüência convergente é de Cauchy.

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência convergente e suponha que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Então, para cada $\epsilon > 0$ dado existe n_0 natural tal que

$$|x_n - a| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n > n_0.$$

Sejam $m, n \geq n_0$, então temos

$$|x_m - x_n| = |x_m - a - x_n + a| \leq |x_m - a| + |x_n - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto mostra que a seqüência (x_n) é de Cauchy. \square

Teorema 1.3.4 *Se uma seqüência de Cauchy tem uma subseqüência convergente, então a seqüência é convergente.*

Demonstração: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy e (x_{n_k}) subseqüência de (x_n) . Por hipótese, existe a tal que $x_{n_k} \rightarrow a$. Logo, dado $\epsilon > 0$ existe n_0 natural tal que se $n_k > n_0$ então

$$|x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Por outro lado, como a seqüência é de Cauchy, para o $\epsilon > 0$ dado existe n_1 natural tal que se $m, n > n_1$, então

$$|x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Tomemos $N = \max\{n_0, n_1\}$ e $m, n_k > N$, então

$$|x_m - a| \leq |x_m - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Isto conclui a prova do teorema. \square

Teorema 1.3.5 *Em \mathbb{R} toda seqüência de Cauchy é convergente.*

A prova desse importante resultado depende do Teorema de Bolzano-Weierstrass,

Teorema 1.3.6 (Bolzano-Weierstrass) *Toda seqüência limitada do \mathbb{R} possui uma subseqüência convergente.*

Um corpo em que toda seqüência de Cauchy é convergente é chamado de corpo completo, assim o Teorema 1.3.5 diz que o espaço \mathbb{R} é completo.

Quando introduzimos o corpo dos números reais assumimos o axioma do supremo: **todo subconjunto de \mathbb{R} não-vazio e limitado superiormente tem um supremo**. Isto é equivalente a \mathbb{R} ser um corpo completo. Temos assim duas formulações equivalentes para corpo completo.

Demonstração do Teorema 1.3.5: Seja (x_n) uma seqüência de Cauchy em \mathbb{R} . Como já vimos, o conjunto $X = \{x_k, k \in \mathbb{N}\}$ é limitado em \mathbb{R} . Pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, existe uma subseqüência (x_{n_k}) convergente para $a \in \mathbb{R}$. Segue que a seqüência (x_n) é também convergente para a . \square

Podemos resumir o resultado Teorema 1.3.5 com o seguinte corolário.

Corolário 1.3.7 *\mathbb{R} é um corpo completo.*

2

Propriedades de Limites de Funções

2.1 Limites de Funções

Na secção anterior já provamos que \mathbb{R} é completo. Mas para facilitar a linguagem, em todo esse texto admitiremos o seguinte axioma:

Axioma 2.1.1 (Completude do conjunto dos reais) *Todo subconjunto dos reais limitado superiormente admite um supremo.*

Desse axioma, concluímos que todo subconjunto dos reais limitado inferiormente admite um ínfimo.

Definição 2.1.2 (Pontos de acumulação) *Seja $X \subset \mathbb{R}$. Dizemos que um ponto $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto X quando todo intervalo de centro a contém algum ponto de X , diferente de a . Em outras palavras,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in X; 0 < |x - a| < \epsilon.$$

O conjunto de todos os pontos de acumulação de X será denotado por X' , chamado o derivado do conjunto X .

Um ponto que não é de acumulação é chamado isolado.

Um ponto de acumulação pode ou não pertencer ao conjunto.

Se $X = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots\}$, então 0 é o único ponto de acumulação. Todos os demais são isolados.

Teorema 2.1.3 *Seja $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. São equivalentes:*

a) *a é ponto de acumulação de X .*

b) *existe uma sequência (x_k) de pontos de X , como $x_k \neq a$, tal que $\lim x_k = a$.*

c) *todo intervalo aberto de centro a contém uma infinidade de pontos de X .*

Teorema 2.1.4 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$ um ponto de acumulação de X . Então,*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$0 < |x - a| < \delta, x \in X$$

implica que

$$|f(x) - b| < \epsilon.$$

Note que o limite quando existe é único. De fato, se b e b' são limites, então dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$ tem-se

$$|f(x) - b| < \epsilon, \quad |f(x) - b'| < \epsilon.$$

Logo, temos

$$|b - b'| \leq |f(x) - b| + |f(x) - b'| < 2\epsilon.$$

Como ϵ é arbitrário, segue que $b = b'$.

Teorema 2.1.5 (Propriedades de limites de funções) *Sejam $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função, $a \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X e $c \in \mathbb{R}$. Suponha que*

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L, \quad e \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = M.$$

Então, valem as seguintes propriedades:

- (1). $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot L$.
- (2). *Regra da Soma:* $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.
- (3). *Regra do Produto:* $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$.
- (4). *Regra do Quociente:* $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$, desde que $M \neq 0$.
- (5). *Regra da Potência:* $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{\frac{r}{s}} = L^{\frac{r}{s}}$.

Observação 2.1.6 *O limite de polinômio e limite de funções racionais decorrem das propriedades acima.*

Observe que a função pode não estar definida no ponto a e muitas vezes não está, pois como a é apenas um ponto de acumulação de X pode ocorrer que $a \notin X$.

• Exemplo 2.1.7

1. Seja $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $\forall x \neq 1$. Notemos que f não está definida em $x = 1$. Queremos investigar o limite $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. Como $x \neq 1$, podemos escrever $f(x)$ como

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2$.

Você pode fazer um desenho e ver graficamente que isto de fato ocorre.

2. Seja $f(x) = \sqrt{x - 2}$, $\forall x \geq 2$. Queremos investigar o limite $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. Por inspeção, vemos que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 0$. Para provar isto, tomemos $\epsilon > 0$ e devemos encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < |x - 2| < \delta$ implica $|f(x) - 0| < \epsilon$. De fato,

$$|f(x) - 0| = |\sqrt{x - 2} - 0| = |\sqrt{x - 2}| < \epsilon \Leftrightarrow (x - 2) < \epsilon^2.$$

Logo, basta tomar $\delta < \epsilon^2$.

Teorema 2.1.8 (Teorema do Confronto ou Sanduíche) *Seja $f, g, h : X \rightarrow \mathbb{R}$ e a ponto de acumulação de X . Suponha que $f(x) \leq g(x) \leq h(x), \forall x \in X$. Se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$, então $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$.*

Demonstração: Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < |x - a| < \delta$, então

$$|f(x) - L| < \epsilon \text{ e } |h(x) - L| < \epsilon.$$

Segue que

$$L - \epsilon < f(x) < \epsilon + L \text{ e, } L - \epsilon < h(x) < \epsilon + L.$$

Donde, para x tal que $0 < |x - a| < \delta$, tem-se

$$L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < \epsilon + L.$$

Isto é, $|g(x) - L| < \epsilon$, para x tal que $0 < |x - a| < \delta$. □

Definição 2.1.9 *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a é um ponto aderente a X se existe uma sequência (x_n) de pontos de X que converge para a . Dizemos que o conjunto X é fechado se contém todos os seus pontos de aderência.*

Ao conjunto de todos os pontos de aderência de X chamamos de o fecho de X e denotamos por \overline{X} . Note que todo ponto de acumulação de X é também um ponto de aderência de X .

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto, se for limitado e fechado. Os intervalos $[a, b]$ são conjuntos compactos de \mathbb{R} .

Observação 2.1.10 (Limites Fundamentais)

Os seguintes limites são chamados de fundamentais:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

3

Propriedades das Funções Contínuas

As funções contínuas possuem inúmeras propriedades importantes. Vamos estudar aqui as propriedades mais elementares. No momento, ainda não temos maturidade para estudar algumas delas, mas devemos insistir para adquirir essa maturidade.

Em todo esse texto admitiremos o seguinte axioma:

Axioma 3.0.11 (Completeness of the real numbers) *Todo subconjunto dos reais limitado superiormente admite um supremo.*

Desse axioma, concluímos que todo subconjunto dos reais limitado inferiormente admite um ínfimo.

3.1 Continuidade

Definição 3.1.1¹ *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em $a \in X$ quando*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0; |x - a| < \delta, x \in X \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Ou equivalentemente, conforme provaremos mais tarde, dizemos que f é contínua em a quando

- a) f está definida em a , e
- b) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

• Exemplo 3.1.2

- a) Se $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é linear ou afim, então é contínua em todos os pontos do domínio.
- b) Dizemos que $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitziana se existe $K \geq 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|,$$

para todo par $x, y \in X$. Toda função Lipschitziana é contínua.

Demonstre isso.

Teorema 3.1.3 (Construção de funções contínuas) *Sejam $f, g : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $a \in X$. Se f e g são contínuas em a , então valem:*

- a) kf é contínua em a
- b) $(f + g)$ é contínua em a
- c) $f \cdot g$ é contínua em a
- d) Se $g(a) \neq 0$, então $\frac{f}{g}$ é contínua em a .

¹aqui supõe-se implicitamente que $a \in X$ seja um ponto de acumulação de X .

Teorema 3.1.4 (Continuidade da função composta) *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $Y \subset \mathbb{R}$, e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funções. Suponha que $f(X) \subset Y$ e assim $(g \circ f)$ está definida em X . Se f é contínua em $a \in X$ e g contínua em $b = f(a)$, então $(g \circ f)$ é contínua em $a \in X$.*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, devemos provar que existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ implica que

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon.$$

Como g é contínua em $b = f(a)$ existe $\gamma > 0$ tal que para $y \in Y$ e $|y - b| < \gamma$ tem-se

$$|g(y) - g(b)| < \epsilon.$$

Como f é contínua em a existe, para $\gamma > 0$ dado, um $\delta > 0$ tal que para $x \in X$ e $|x - a| < \delta$ tem-se

$$|f(x) - f(a)| < \gamma.$$

Logo,

$$|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(a)| < \epsilon,$$

que é o que queríamos. □

3.2 Propriedades

Definição 3.2.1 *Seja $X \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que a é um ponto aderente a X se existe uma sequência (x_n) de pontos de X que converge para a . Dizemos que o conjunto X é fechado se contém todos os seus pontos de aderência.*

Dessa definição, concluímos que se X é fechado e $a \in X$, então existe uma sequência (x_n) de elementos de X tal que $x_n \rightarrow a$.

Ao conjunto de todos os pontos de aderência de X chamamos de o fecho de X e denotamos por \overline{X} . Note que todo ponto de acumulação de X é também um ponto de aderência de X .

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é dito compacto, se for limitado e fechado. Os intervalos $[a, b]$ são conjuntos compactos de \mathbb{R} .

Teorema 3.2.2 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Então, f é contínua em a se, e somente se, para toda sequência $(x_k) \in X$ tal que $x_k \rightarrow a$ tem-se $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.*

Demonstração: \implies] Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$ tem-se $|f(x) - f(a)| < \epsilon$. Como $\lim x_n = a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in (a - \delta, a + \delta) \cap X$, para todo $n > n_0$. Logo,

$$|f(x_n) - f(a)| < \epsilon, \quad \forall n > n_0.$$

Isto é, $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k) = f(a)$.

\impliedby] Reciprocamente, se f não é contínua em a , então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $k \in \mathbb{N}$ podemos obter $x_k \in X$ com $|x_k - a| < \frac{1}{k}$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \epsilon$. Então, temos $x_k \rightarrow a$ sem que $\lim f(x_k) = f(a)$. O que é absurdo. □

O teorema acima nos diz que uma função é contínua se, e somente se, leva seqüências convergentes em seqüências convergentes.

Teorema 3.2.3 *Seja $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $c \in (a, b)$. Suponha que $f(c) > 0$. Então, existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (c - \delta, c + \delta)$ então $f(x) > 0$.*

Demonstração: Como f contínua em $c \in (a, b)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $V_\delta = |x - c| < \delta$, então $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Donde segue que $-\epsilon < f(x) - f(c) < \epsilon$. Isto é,

$$f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon, \forall x \in V_\delta.$$

Para $\epsilon < f(c)$ dado, existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$0 < f(x) < f(c) + \epsilon, \forall x \in V_{\delta_0},$$

assim $f(x) > 0$ para todo $x \in V_{\delta_0}$. □

Vale um resultado análogo para $f(c) < 0$. Deixamos esta parte como exercício.

Um intervalo compacto é um intervalo limitado e fechado $I = [a, b]$. Uma seqüência de intervalos compactos I_k é dita encaixada se $I_{k+1} \subseteq I_k$, para todo k natural. O próximo resultado, é uma importante ferramenta muito utilizada na prova de outros resultados.

Teorema 3.2.4 (Intervalos encaixados) *Seja (S_k) uma seqüência de intervalos compactos encaixados de \mathbb{R} . Então, a interseção deles é não vazia, isto é,*

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} S_k \neq \emptyset.$$

Demonstração: Seja (I_k) uma seqüência de intervalos compactos $I_k = [a_k, b_k]$. Sejam

$$A = \{a_k, k \in \mathbb{N}\}$$

$$B = \{b_k, k \in \mathbb{N}\}.$$

Como a seqüência é encaixada cada elemento de B é um limite superior para A . Seja $a = \sup A$, (estamos admitindo que todo subconjunto limitado superiormente dos reais admite um supremo) então $a_k \leq a \leq b_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Segue que $a \in I_k, \forall k \in \mathbb{N}$, provando que a interseção é não vazia. □

Como aplicação podemos agora provar que \mathbb{R} é não enumerável.

Corolário 3.2.5 \mathbb{R} é não enumerável.

Demonstração: Basta provar que $[0, 1]$ é não enumerável. Se fosse enumerável, tomaríamos $f : \mathbb{N} \rightarrow [0, 1]$ sobrejetora, então $f(1)$ não está em pelo menos um dos intervalos $[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$. Seja I_1 este intervalo. Quebrando este intervalo em três outros subintervalos congruentes, pelo menos um deles não contém $f(2)$. Denote este intervalo por I_2 . Continuando desta maneira, obtemos uma seqüência de intervalos compactos encaixados (I_k) tal que $f(k) \in I_k^c, \forall k \in \mathbb{N}$, onde I_k^c é o complementar de I_k . Segue que

$$f(\mathbb{N}) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k^c = \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} I_k\right)^c.$$

Isto contradiz a hipótese que f é sobrejetora porque a interseção da seqüência (I_k) é não vazia. □

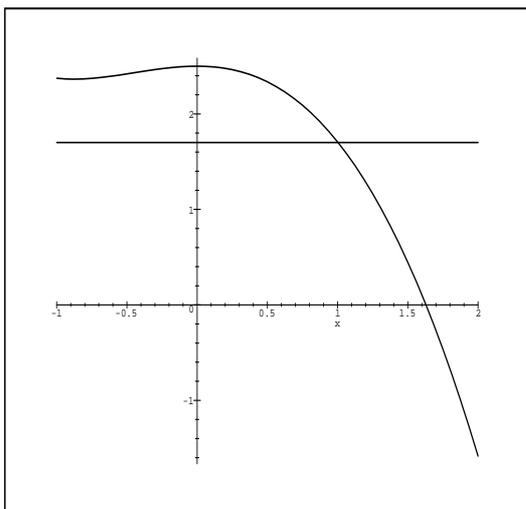


Figura 3.1: Ilustração do Teorema do valor intermediário

Teorema 3.2.6 (Teorema do valor intermediário) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Seja $d \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) < d < f(b)$. Então, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração: Seja $g(x) = f(x) - d, x \in [a, b]$. É claro que g é contínua, $g(a) < 0$ e $g(b) > 0$. Sejam $a_1 = a, b_1 = b$ e $m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$. Notemos que $g(m_1)$ ou é igual a 0, ou maior do que 0 ou é menor do que 0. Se for igual a 0, então tomamos $c = m_1$ e a prova está terminada.

Se $g(m_1) > 0$, defina $a_2 = a_1$ e $b_2 = m_1$. Se $g(m_1) < 0$, então defina $a_2 = m_1$ e $b_2 = b_1$. Em cada caso, temos $g(a_2) < 0$ e $g(b_2) > 0$. Novamente seja $m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$. Calcule $g(m_2)$. Se $g(m_2)$ valor for igual a 0, o resultado está provado com $c = m_2$. Se $g(m_2) > 0$ seja $a_3 = a_2$ e $b_3 = m_2$. Se $g(m_2) < 0$ seja $a_3 = m_2$ e $b_3 = b_2$. De novo, em cada caso, $g(a_3) < 0$ e $g(b_3) > 0$.

Continuando dessa maneira, ou encontramos uma solução após um número finito de passos ou encontramos uma sequência $[a_n, b_n]$ de intervalos compactos encaixados tal que

$$b_n - a_n = \frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}, \quad g(a_n) < 0, \quad g(b_n) > 0.$$

Segue do Teorema dos intervalos encaixados segue que existe $c \in (a, b)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Do Teorema 3.2.2 segue que $g(a_n) \rightarrow g(c)$ e $g(b_n) \rightarrow g(c)$.

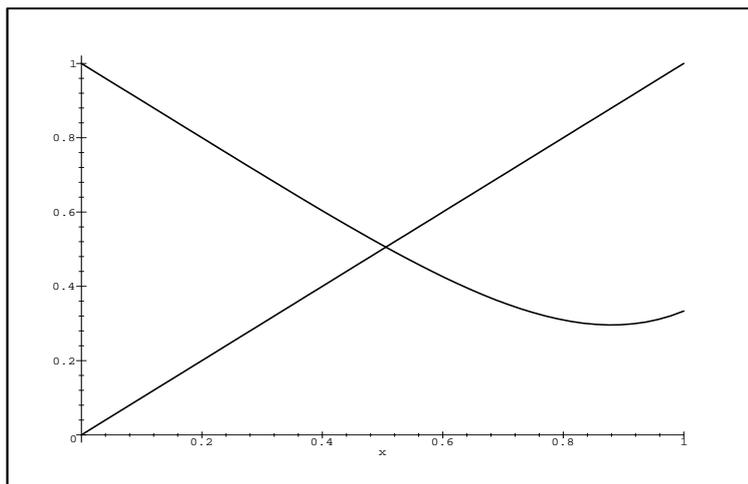
Como $g(c) \leq 0 \leq g(c)$ segue que $g(c) = 0$ e portanto $f(c) = d$. \square

O seguinte teorema é um resultado simples sobre existência de ponto fixo.

Teorema 3.2.7 *Toda aplicação contínua $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ tem pelo menos um ponto fixo.*

Demonstração: Defina a seguinte aplicação $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - x$. Assim g mede a distância orientada entre x e sua imagem $f(x)$. Um ponto fixo de f é um ponto x onde $g(x) = 0$. Se um dos extremos do intervalo é ponto fixo nada temos a provar. Então suponha que nenhum deles seja ponto fixo. Como $f(a)$ e $f(b)$ estão no intervalo $[a, b]$ segue que $a < f(a)$ e $f(b) < b$ e portanto $g(a) > 0$ e $g(b) < 0$. Como g é contínua, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$ e portanto $f(x_0) = x_0$. \square

O teorema acima pode ser visualizado no gráfico.



O ponto fixo ocorre onde $y = x$ e $f(x)$ se cruzam.

Teorema 3.2.8 *Toda aplicação contínua de um círculo na reta tem um par de pontos diametralmente opostos com mesma imagem.*

Demonstração: Seja $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua do círculo C na reta \mathbb{R} . Se x e x' são pontos diametralmente opostos sobre C , defina $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = f(x) - f(x')$. Como f é contínua, então g também é. Além disso,

$$g(x') = f(x') - f(x) = -(f(x) - f(x')) = -g(x).$$

Segue que g tem sinais opostos em x e em x' ou é zero em x e x' . Se $g(x) = 0$, então $f(x) = f(x')$. No outro caso, como g é contínua existe um ponto x_0 tal $g(x_0) = 0$, isto é, $f(x_0) = f(x'_0)$. \square

O mesmo resultado vale para a esfera. Prove isto. Tomando a Terra como uma esfera, e a função como temperatura, então em cada instante, existem pontos diametralmente opostos na terra com a mesma temperatura.

Teorema 3.2.9 *Seja $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ contínua não constante. Então, $f(I)$ é um intervalo.*

Demonstração: Lembramos que um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é um intervalo, se e somente, se satisfaz às seguintes propriedades:

- i) S contém mais do que um ponto;
 2i) se $x_1, x_2 \in S$ e $x \in (x_1, x_2)$, então $x \in S$.

Vamos provar que $f(I)$ satisfaz às propriedades acima.

Como f não é constante, sua imagem $f(I)$ tem mais que um ponto. Sejam $y_1, y_2 \in f(I)$. Segue que existem $x_1, x_2 \in I$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Suponha, para fixar as idéias que $x_1 < x_2$. Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ podemos aplicar o o teorema do valor intermediário, assim dado $y \in (y_1, y_2)$ existe $x \in (x_1, x_2)$ tal que $f(x) = y$. Verificando que $f(I)$ satisfaz à segunda condição. Logo, $f(I)$ é um intervalo. \square

O teorema de Bolzano-Weierstrass é um dos mais importantes resultados da Análise real.

Teorema 3.2.10 (Bolzano-Weierstrass) *Todo conjunto infinito limitado E do \mathbb{R} tem um ponto de acumulação.*

Demonstração: Como E é limitado, então está contido em algum intervalo compacto S . O intervalo S pode ser coberto por um número finito de subintervalo onde cada um deles tem dimensão igual a metade da dimensão de S . Pelo menos um desses subintervalos contém um subconjunto infinito E_1 de E . Seja S_1 este subintervalo contendo E_1 . Repetindo o processo com o conjunto infinito e limitado E_1 obtemos um subintervalo S_2 de dimensões igual a metade das dimensões de S_1 e que contém um subconjunto infinito E_2 de E_1 . Seguindo este procedimento construímos uma seqüência (S_k) de subintervalos compactos onde cada um contém um subconjunto infinito. Pelo teorema dos retângulos encaixados existe um elemento $a \in S_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Seja B a bola de centro a e raio $\epsilon > 0$ qualquer. Como as dimensões de cada S_k é 2^{-k} vezes as dimensões de S , então S_k estará dentro de B para k suficientemente grande. Assim, B contém um conjunto infinito de E e portanto a é um ponto de acumulação. \square

Teorema 3.2.11 *Seja $f : X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $K \subset X$ é compacto, então $f(K)$ é compacto.*

Demonstração: Primeiramente vamos provar que $f(K)$ é fechado. Seja $y \in \overline{f(K)}$. Então, $y = \lim y_k$, onde $y_k \in f(K)$. Logo, $y_k = f(x_k)$, onde $x_k \in K$. Como (x_k) é limitada, existe subsequência (x_{k_n}) tal que $x_{k_n} \rightarrow x \in K$. Logo,

$$y = \lim f(x_{k_n}) = f(x)$$

e assim, $y \in f(K)$.

Agora provaremos que $f(K)$ é limitado. De fato, se não fosse limitado, obteríamos uma seqüência (x_k) de elementos de K tal que $f(x_k) > k$. Logo, $(f(x_k))$ não admite subsequência convergente. Mas (x_k) tem subsequência convergente e $\lim x_k = x \in K$. Pela continuidade de f , temos

$$\lim f(x_{k_i}) = f(\lim x_{k_i}) = f(x),$$

uma contradição. \square

Corolário 3.2.12 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, $f(I)$ é um intervalo compacto.*

Demonstração: Já provamos que $f(I)$ é um intervalo e no teorema acima $f(I)$ compacto. Logo, $f([a, b]) = [c, d]$, para algum intervalo $[a, d]$. \square

Como caso particular do Teorema 3.2.11, temos o seguinte resultado importante em otimização de funções reais.

Teorema 3.2.13 *Seja K um conjunto compacto de \mathbb{R} e $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Então, f assume valores máximo e mínimo sobre o conjunto K , isto é, existem x_0 e $x_1 \in K$ tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \forall x \in K$.*

Demonstração: Sabemos que $f(K)$ é compacto e portanto é limitado e fechado. Como $f(K) \subset \mathbb{R}$ é fechado e limitado superiormente, então tem um máximo. Do mesmo modo $f(K)$ tem um mínimo. Então, existem x_0 e x_1 elementos de K tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$. \square

3.3 Continuidade Uniforme

Definição 3.3.1 *Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é uniformemente contínua sobre X se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - y| < \delta$ e $x, y \in X$, então*

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

A definição diz que o mesmo δ serve para cada par de pontos $x, y \in X$.

Teorema 3.3.2 *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, f é uniformemente contínua sobre $[a, b]$.*

Demonstração: A prova é por contradição. Se f não é uniformemente contínua sobre $[a, b]$, existe $\epsilon > 0$ para o qual não existe $\delta > 0$ com a propriedade $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$ para todos os pares $x_1, x_2 \in [a, b]$ com $|x_1 - x_2| < \delta$. Então, para cada $\delta = \frac{1}{n}$ existe um par de pontos $x_{1,n}, x_{2,n}$ de $[a, b]$ tal que

$$(3.1) \quad |x_{1,n} - x_{2,n}| < \frac{1}{n}, \quad \text{e} \quad |f(x_{1,n}) - f(x_{2,n})| \geq \epsilon.$$

Pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, o conjunto $S = \{x_{1,n}, x_{2,n}, n \in \mathbb{N}\}$ tem uma subsequência (x_{1,n_k}) convergente para $x_0 \in [a, b]$.

Como $|x_{1,n_k} - x_{2,n_k}| < \frac{1}{k_n}$ segue que $x_{2,n_k} \rightarrow x_0$.

Como f é contínua temos que $f(x_{1,n_k}) \rightarrow f(x_0)$ e $f(x_{2,n_k}) \rightarrow f(x_0)$. Assim, existe natural n_0 tal que se $n \geq n_0$ então

$$\begin{aligned} |f(x_{1,n_k}) - f(x_0)| &< \frac{\epsilon}{2}, \\ |f(x_{2,n_k}) - f(x_0)| &< \frac{\epsilon}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$|f(x_{1,n_k}) - f(x_{2,n_k})| \leq |f(x_{2,n_k}) - f(x_0)| + |f(x_{1,n_k}) - f(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

O que contradiz (3.1). \square

3.4 Exercício

1. Use o teorema do valor intermediário para provar que para cada $n \geq 1$ e $d > 0$ a equação $x^n = d$ tem uma solução.

2. A função $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1 - x^2$ é contínua. Portanto, assume máximo e mínimo. Determine esses pontos.

3. Mostre que a função $g(x) = x^3 + 2x, \forall x \in \mathbb{R}$, é estritamente crescente e conclua que possui inversa.

4. Verifique que a função $f(x) = x^2 + x - 1$ possui um ponto fixo.

5. Mostre que a função $g(x) = \sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Sugestão: use que $\sin(a) - \sin(b) = 2 \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$.