Resumo sobre o cálculo de volumes de sólidos de revolução

Prof. Doherty Andrade

4 de novembro de 2005

Sumário

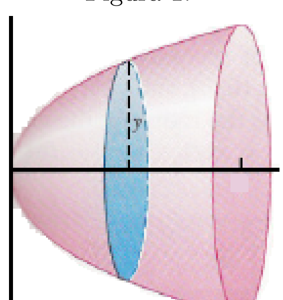
1 Volume por seções transversais

Se um sólido R tem seção transversal dada por $A(x)$ com $a \leq x \leq b$, o volume do sólido é dado por

$$V = \int_a^b A(x)dx \text{ - eixo OX} \tag{1}$$

Veja as figuras 1 e 2.

Figura 1:



Do mesmo modo, se um sólido R tem seção transversal dada por $A(y)$ com $c \leq y \leq d$, o volume do sólido é dado por

$$V = \int_c^d A(y)dy \quad - \text{eixo OY} \tag{2}$$

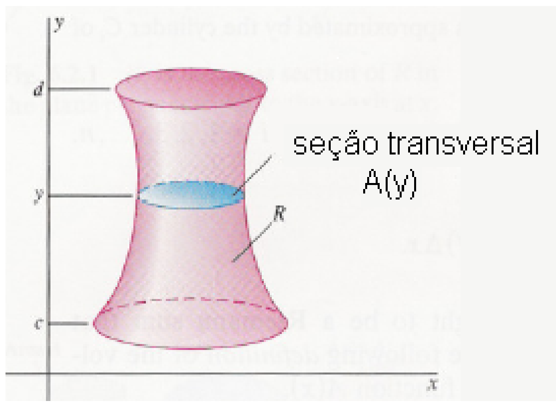


Figura 2:

2 Sólidos de revolução: discos e cascas

Seja a região R abaixo do gráfico de $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, o volume obtido pela rotação de R em torno de OX é dado por

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx \text{ - eixo OX} \tag{3}$$

Note que neste caso, a seção transersal é dada por $A(x) = \pi[f(x)]^2$, veja figura 3.

No caso de $x = g(y), c \leq y \leq d$, e rotação no eixo OY,veja figura 5, tem-se

$$V = \int_c^d \pi[g(y)]^2 dy \text{ - eixo OY} \tag{4}$$

Exemplo: determine o volume do sólido obtido pela revolução da região sob o gráfico de $y = \sqrt{x}$ e limitada pela reta $x = 2$.

$V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx = \pi \int_0^2 x dx = 2\pi$.

Exemplo: determine o volume do sólido obtido pela revolução da região limitada pelo gráfico de $y = x$ e pelas retas $y = 2$ e $x = 0$.

$V = \pi \int_0^2 [g(y)]^2 dy = \pi \int_0^2 y^2 dy = \frac{\pi}{3}$.

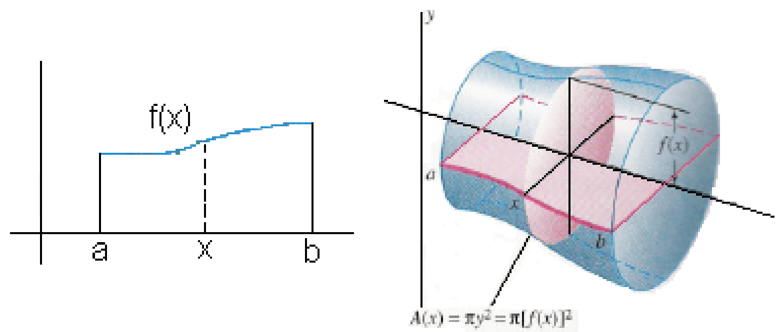


Figura 3:

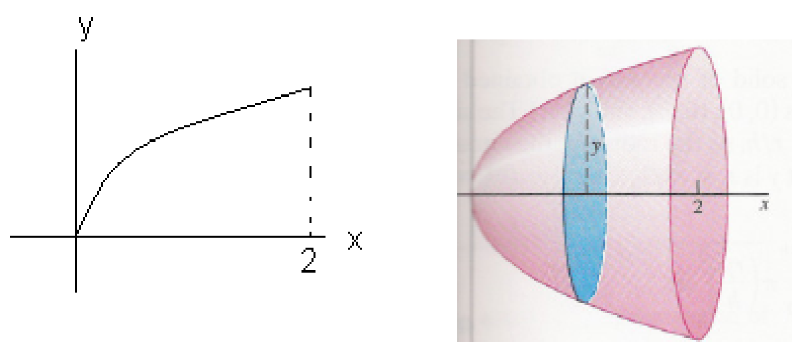


Figura 4: Figura 4

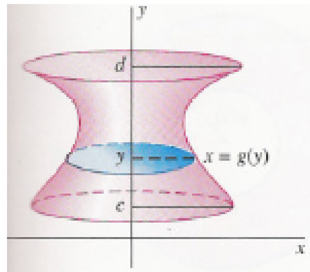
2.1 Revolução de região entre duas curvas

Considere a região R entre as curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e limitada pelas retas $x = a$ e $x = b$. Veja figura 6.

Queremos determinar o volume obtida pela rotação dessa região em torno do eixo OX. Podemos fazer isso, calculando cada um dos volumes e realizando a subtração, donde obtemos

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx \text{ - eixo OX} \tag{5}$$

Exemplo: considere $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^3$ e a região entre elas e a reta $x = 1$.Calcule o volume da rotação dessa região em torno do eixo OX. Veja



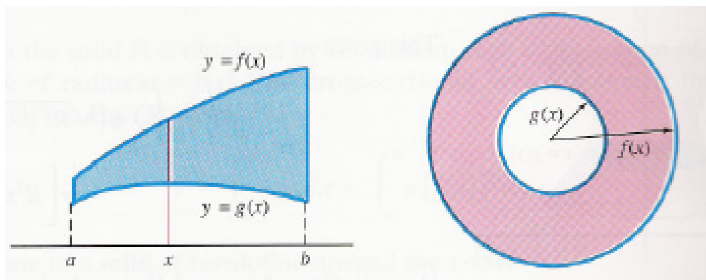
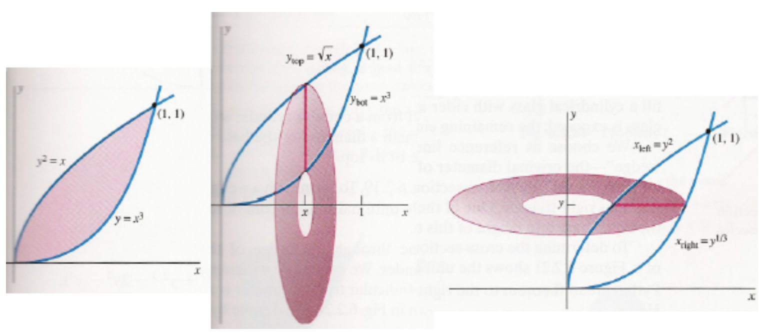


figura 7.

$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 - [g(x)]^2 dx = \pi \int_0^1 [\sqrt{x}]^2 - [x^3]^2 dx = \pi \int_0^1 x - x^6 dx = \frac{2\pi}{14}$.

Se a mesma região é rodada em torno do eixo OY

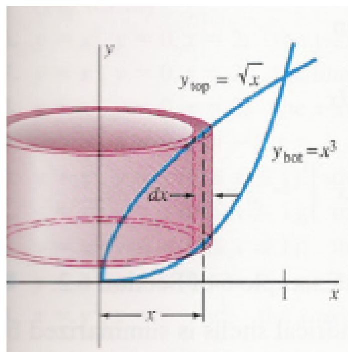
$V = \pi \int_a^b [F(y)]^2 - [G(y)]^2 dy = \pi \int_0^1 [y^{1/3}]^2 - [y2]^2 dx = \pi \int_0^1 y^{2/3} - y^4 dx = \frac{2\pi}{5}$.



3 Volume pelo método das cascas cilindrincas

Suponha que temos uma região sob o gráfico de $f : [a, b] \to R$ e queremos obter o volume obtido pela rotação de R em torno do eixo OY. O volume é dado por

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx \tag{6}$$



Rodando em torno do eixo OX, temos

$$V = 2\pi \int_c^d y g(y) dy \tag{7}$$