Você sabe a regra de três?

Doherty Andrade

Regra de três Simples e Compostas

Sumário

1 Introdução 1

2 Exemplos: grandezas diretamente proporcionais 4

3 Exercícios: criando habilidades 5

4 Grandezas Inversamente Proporcionais 6

5 Exemplos: grandezas inversamente proporcionais 8

6 Exercícios: criando habilidades 9

1 Introdução

Os conceitos de razão, proporção e como consequência as aplicações aos juros simples, nos ajudam a resolver problemas importantes. O método chamado *regra de três* é uma importante técnica que não pode ser desprezada. Embora importante, esse é um assunto elementar, em nível de sexta série e, portanto ao alcance de todos.

Vamos então, aos conceitos básicos necessários para o completo entendimento do assunto.

Chamamos de **grandeza** a tudo o que pode ser medido. São exemplos de grandezas, tempo, massa, velocidade, distância, temperatura etc.

Chamamos de **razão** entre dois números ao quociente entre eles. Por exemplo, a razão entre 8 e 2 é 4, pois $\frac{8}{2} = 4$. No nosso vocabulário empregamos muitas vezes o conceito de razão. A palavra razão tem origem na palavra latina *ratio* e significa divisão.

De cada 100 brasileiros, apenas 3 lêem jornais regularmente. A razão entre a quantidade de brasileiros e de leitores de jornais é $\frac{100}{3}$.

Outros exemplos em que aparece o conceito de razão:

i. **Escala**: é a razão entre o comprimento apresentado em um desenho ou maquete e o comprimento correspondente real, ambos expressos na mesma unidade de medida.

ii. **Velocidade**: é a razão entre a distância percorrida e o tempo gasto em percorrê-la.

iii. **Densidade demográfica**: é a razão entre o número total de habitantes e a área da região.

iv. **Consumo médio de combustível**: é a razão entre a distância percorrida e a quantidade de combustível gasto em percorrê-la.

v. **Gramatura de papel:** é a razão entre a massa do papel e a área do papel.

Diariamente, muitas vezes sem nos dar conta disso, estamos comparando grandezas. Vejamos alguns exemplos:

1. Se o litro da gasolina custa R$2,50, então dez litros custam R$25,00. Note, pela tabela, que aumentando a quantidade de gasolina a ser comprada, o preço também aumenta.

Qtdade de gasolina	**Preço a ser pago**
1	2,50
2	5,00
4	10,00
8	20,00
10	25,00

Vemos que dobrando a quantidade litros de gasolina, dobramos também o preço a ser pago. Aqui as grandezas comparadas foram o preço da gasolina e litros. Note que a razão entre duas quantidades de gasolina e a razão entre seus respectivos preços é a mesma. Vejamos, tomemos como exemplo as seguintes quantidades

Qtdade de gasolina	**Preço a ser pago**
4	10,00
8	20,00

Assim, temos

$$\frac{4}{8} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{10}{20} = \frac{1}{2}.$$

2. Se um operário em um dia de trabalho constrói um muro de 3 metros de comprimento, então (nas mesmas condições) para construir um muro de 24 metros ele precisará de 8 dias. Note, pela tabela, que ao aumentarmos o tempo de trabalho, aumentamos também o comprimento do muro.

Dias de trabalho	**Comprimento do muro**
1	3
2	6
4	12
8	24

Aqui as grandezas comparadas foram o tempo de trabalho e o comprimento do muro.

Note que a razão entre duas quantidades de dias de trabalho e a razão entre os respectivos comprimentos do muro é a mesma. Tomemos como exemplo as seguintes quantidades

Dias de trabalho	**comprimento do muro**
1	3
4	12

Assim, temos

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{4} \text{ e } \frac{3}{12} = \frac{1}{4}.$$

Dizemos que duas grandezas são **diretamente propocionais** quando a razão entre os valores da primeira grandeza é igual a razão entre os valores correspondentes da segunda grandeza.

Assim, no exemplo 1), a grandeza quantidade de gasolina e preço são grandezas diretamente proporcionais, pois dois valores quaisquer correspondentes dessas grandezas possuem a mesma razão, igual (nesse caso) a $\frac{1}{2}$.

No exemplo 2), a grandeza dias de trabalho e o comprimento do muro são grandezas diretamente proporcionais, pois dois valores quaisquer correspondentes dessas grandezas possuem a mesma razão, igual (nesse caso) $\frac{1}{4}$.

Chamamos de **proporção** a igualdade entre duas razões. Assim, nos exemplos 1) e 2) temos dois exemplos de proporção.

Em uma proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d},$$

a e d são denominamos extremos, b e c denominados meios.

Por propriedade dos números racionais temos

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc.$$

Em palavras temos o seguinte:
Propriedade Fundamental: Em uma proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Segue dessa propriedade, se conhecemos três números de uma proporção, então o quarto é facilmente calculado. Vem dessa propriedade o nome **Regra de Três**.

Tomemos o seguinte exemplo:

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x}.$$

Utilizando a Propriedade Fundamental, temos que

$$\frac{4}{3} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow 4x = 8 \times 3 \Leftrightarrow x = \frac{24}{4} \Leftrightarrow x = 6.$$

☞Até aqui você viu os seguintes conceitos: grandezas, razão, grandezas diretamente proporcionais, proporção, regra de três. Revise-os e tenha certeza de que os entendeu.

2 Exemplos: grandezas diretamente proporcionais

Já temos todos os elementos necessários para resolver problemas simples envolvendo grandezas diretamente proporcionais.

Primeiro exemplo: Se o litro da gasolina custa R$2,50, então quanto custam doze litros?

Vamos denominar por x o preço de 12 litros de gasolina. Assim, temos os seguintes dados:

Qtdade de gasolina	**Preço a ser pago**
1	2,50
12	x

Primeiro note que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Como há igualdade entre a razão entre os preços de gasolina e a razão entre os valores correspondentes a serem pagos, temos a seguinte proporção

$$\frac{1}{12} = \frac{2,5}{x}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $x = 12 \times 2,5 = 30,0$. Assim, por 12 litros de gasolina deve ser pago R$30,00.

Segundo exemplo: Se um operário em um dia de trabalho constrói um muro de 3 metros de comprimento, então (nas mesmas condições) em quanto tempo ele construirá um muro de 24 metros?

Vamos denominar por x o tempo que o operário leva para construir um muro de 24 metros. Temos a seguinte tabela:

Dias de trabalho	**comprimento do muro**
1	3
x	24

Primeiro note que as grandezas envolvidas são diretamente proporcionais. Como há igualdade entre a razão entre os dias gastos na construção e os valores correspondentes aos comprimentos, temos a seguinte proporção

$$\frac{1}{x} = \frac{3}{24}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $3x = 24$ e portanto $x = 8$. Assim, em 8 dias de trabalho, o operário constrói um muro de 24 metros.

Terceiro exemplo: Três amigos, João, Pedro e Miguel montaram um oficina mecânica. João entrou com R$15.000,00, Pedro com R$ 30.000,00 e Miguel com R$ 45.000,00 na sociedade. Depois de seis meses obtiveram R$ 60.000,00 de lucro. O lucro deve ser dividido, entre eles, proporcionalmente ao valor investido. Quanto cada um deve receber?

Vamos denotar por x, a parte do lucro recebida por João; y a parte do lucro recebida por Pedro e por z a parte do lucro recebida por Miguel. Assim, tem-se $x + y + z = 60.000$. Como a divisão deve ser proporcional ao capital investido, temos

$$\frac{x}{15.000} = \frac{y}{30.000} = \frac{z}{45.000} = k,$$

onde k é o valor comum das razões. Segue que $x = 15.000k$, $y = 30.000k$ e $z = 45.000k$. Assim, como $x + y + z = 60.000$ podemos escrever

$$\begin{aligned} 15.000k + 30.000k + 45.000k &= 60.000 \\ 90.000k &= 60.000 \\ k &= \frac{60.000}{90.000} \\ k &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Logo, para João temos $\frac{x}{15.000} = \frac{2}{3}$ e portanto, pela regra de três, $x = R\$10.000,00$. Para Pedro, temos $\frac{y}{30.000} = \frac{2}{3}$ e assim, pela regra de três, temos $y = R\$20.000$. Para Miguel, temos $\frac{z}{45.000} = \frac{2}{3}$. Donde $z = R\$30.000,00$

3 Exercícios: criando habilidades

1. Em um mapa cartográfico, 1 cm representam 40km. Nesse nesmo mapa quanto presentam 12cm? Resposta: 480km

2. Um carrro percorreu 300km em 3 horas e consumiu nesse trajeto 60 litros de gasolina. Pergunta-se:

   a) a velocidade média do carro. Resposta: $100km/h$

   b) o consumo médio de combustível. Resposta: 0,5 litro por quilômetro percorrido.

   c) Nas mesmas condições, em quanto tempo o carro percorreria $500km$? Resposta: 5 horas.

3. Um pai deixou 300 mil reais de herança para os seus três filhos. Esse total deve ser dividido em partes proporcionais às suas idades. André o mais novo tem 10 anos, César o do meio tem 20 anos e Rodrigo o mais velho tem 30 anos. Quanto cada um receberá? Resposta: André recebe R$50.000,00, César recebe R$ 100.000,00 e Rodrigo recebe R$ 150.000,00

4 Grandezas Inversamente Proporcionais

Assim como as grandezas diretamente proporcionais, as grandezas inversamente proporcionais também aparecem em nosso cotidiano. Vejamos alguns exemplos:

1. Com velocidade de 100 km/h um trem bala percorre uma determinada distância em 3 horas. Aumentando a velocidade para 150km/h ele percorrerá a mesma distância em 2 horas.

   Note, pela tabela, que aumentando a velocidade diminuímos o tempo de viagem.

Velocidade (km/h)	**Tempo (h)**
100	3
200	1,5
400	3/4

   Vemos que dobrando a velocidade, percorremos o mesmo percurso na metade do tempo. Aqui as grandezas comparadas foram velocidade e tempo. Note que a razão entre dois valores de velocidade e a razão entre seus respectivos tempos **não** é a mesma. Elas são inversas. Vejamos, tomemos os seguintes valores,

Velocidade (km/h)	**Tempo (h)**
100	3
200	1,5
razão=$\frac{100}{200}=\frac{1}{2}$	razão=$\frac{3}{1.5}=2$

   Assim, temos

$$\frac{100}{200}=\frac{1}{2} \text{ e } \frac{3}{1,5}=2.$$

   Observe que tomando os inversos (de uma grandeza ou de outra), temos

$$\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{1.5}}=\frac{1}{3}\times\frac{1.5}{1}=\frac{1.5}{3}=\frac{1}{2}.$$

   Logo, temos a proporção

$$\frac{100}{200}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{1.5}}=\frac{1}{2}.$$

2. Dois operários realizam uma tarefa em 6 dias. Em quanto tempo 4 operários realizam juntos o mesmo serviço?

   Note, pela tabela, que ao aumentarmos o número de trabalhadores o tempo necessário para realizar a tarefa diminui.

Número de operários	**Tempo (h)**
2	6
4	3
8	1,5

Note que a razão entre duas quantidades de dias de trabalho e a razão entre os respectivos tempo de trabalho não é a mesma. Vejamos, tomemos as seguintes quantidades

Número de operários	**Tempo (h)**
2	6
4	3
razão $= \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	razão$= \frac{6}{3} = 2$

Assim, temos que elas são inversas.

$$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{6}{3} = 2.$$

Observe que tomando os inversos (de uma grandeza ou de outra), temos

$$\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{1}{2}.$$

Logo, temos a proporção

$$\frac{2}{4} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} \times \frac{3}{1} = \frac{6}{3} = \frac{1}{2}.$$

Dizemos que duas grandezas são **inversamente propocionais** quando a razão entre dois valores quaisquer da primeira grandeza é igual ao **inverso** da razão entre os valores correspondentes da segunda grandeza.

Nos dois exemplos apresentados acima, as grandezas são inversamente proporcionais.

☞Até aqui você viu os seguintes conceitos: grandezas, razão, grandezas diretamente proporcionais, grandezas inversamente proporcionais, proporção. Revise-os e tenha certeza de que os entendeu. Estabeleça a diferença entre o conceito de grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais,

5 Exemplos: grandezas inversamente proporcionais

Já temos todos os elementos necessários para resolver problemas simples envolvendo grandezas inversamente proporcionais.

Primeiro exemplo: Com velocidade de 100 km/h um trem de alta velocidade percorre uma determinada distância em 3 horas. Aumentando a velocidade para 150km/h, em quanto tempo ele percorrerá a mesma distância?

Vamos denominar por x o tempo necessário para fazer o trajeto com velocidade de 150km/h.

Velocidade (km/h)	**Tempo (h)**
100	3
150	x

Como há igualdade entre o inverso da razão entre as velociades e os valores correspondentes ao tempo, temos a seguinte proporção

$$\frac{100}{150} = \frac{x}{3}.$$

Resolvendo essa proporção, obtemos a equação $150x = 300$. Assim, $x = 2$. Logo, aumentado a velocidade, o tempo gasto diminuirá para duas horas.

Segundo exemplo: Dois operários realizam um tarefa em 6 dias. Em quanto tempo 4 operários juntos realizam o mesmo serviço?

Vamos denominar por x o tempo que 4 operário levam para realizar a obra.

Número de operários	**Tempo**
2	6
4	x

Como as grandezas são inversamente proporcionais, temos a seguinte proporção

$$\frac{2}{4} = \frac{x}{6}$$

Resolvendo essa equação, temos $4x = 12$ e portanto $x = 3$. Assim, em 3 dias de trabalho, 4 operários realizam o tabalho.

Terceiro exemplo: Um pai deixou 104 mil reais de herança para os seus três filhos. Esse total deve ser dividido em partes inversamente proporcionais às suas idades. André o mais novo tem 2 anos, César o do meio tem 3 anos e Rodrigo o mais velho tem 4 anos. Quanto cada um receberá?

Vamos denotar por x, a parte recebida por André; y a parte recebida por César e por z a parte recebida por Rodrigo. Assim, tem-se $x + y + z = 104.000,00$. Como a divisão deve ser inversamente proporcional às idades, temos

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{4}} = k,$$

onde k é o valor comum das razões. Segue de

$$\frac{x}{\frac{1}{2}} = k, \quad \frac{y}{\frac{1}{3}} = k, \quad \frac{z}{\frac{1}{4}} = k$$

que

$$x = \frac{k}{2}, \quad y = \frac{k}{3}, \quad z = \frac{k}{4}.$$

Assim, como $x + y + z = 104.000$ podemos escrever

$$\begin{aligned} \frac{k}{2} + \frac{k}{3} + \frac{k}{4} &= 104.000 \\ \frac{6k + 4k + 3k}{12} &= 104.000 \\ \frac{13k}{12} &= 104.000 \\ k &= \frac{104.000 \times 12}{13} \\ k &= 96.000 \end{aligned}$$

Logo, para João temos $x = \frac{96.000}{2} = 48.000,00$. Para Pedro, temos $y = \frac{96.000}{3} = 32.000,00$. Para Miguel, temos $z = \frac{96.000}{4} = 24.000,00$.

Assim, temos que João receberá R$48.000,00, Pedro receberá R$32.000,00 e Miguel R$24.000,00

6 Exercícios: criando habilidades

1. Em uma empresa cinco máquinas realizam um trabalho em 36 dias. Em quanto tempo 3 máquinas juntas realizam o mesmo trabalho? Resposta: 60 dias.

2. Um carro com velocidade de 90 km/h percorre uma distância em duas horas. Quanto tempo leva para percorrer a mesma distância se aumentar a velocidade para 120km/h? Resposta: 1 hora e meia.