Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência
© Publicação Eletrônica do KIT http://www.dma.uem.br/kit

Os métodos de cálculo da raiz quadrada no Ensino Fundamental e Médio

Doherty Andrade[1]
Universidade Estadual de Maringá
Departamento de Matemática - 87020-900 Maringá-PR, Brazil

Resumo: Por meio do método numérico de Newton-Raphson e do método da bissecção justificamos dois métodos de cálculo da raiz quadrada muito usados no ensino fundamental para o cálculo de aproximação de $\sqrt{N}$.

Sumário

1 Introdução

Seja $N > 0$. Queremos calcular uma aproximação para $\sqrt{N}$. No ensino fundamental aprendemos e ensinamos um método baseado na divisão por 2. Isto é, com uma aproximação inicial x_0 para $\sqrt{N}$ obtemos outra aproximação melhor dada por $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{N}{x_0}\right)$. Repetindo o processo obtemos aproximações cada vez melhores. Mas por que este método funciona? Como surgiu este método?

[1]Departamento de Matemática, UEM. Julho 2009

Um outro método utilizado para o cálculo de raiz quadrada no ensino fundamental é apresentado como o método da divisão por 2. Ou dito de outra forma: tome uma aproximação por falta a e outra por excesso b para $\sqrt{N}$. Em seguida tome a média desses valores $m = \frac{a+b}{2}$. Verifique se esta média é uma aproximação por falta ou por excesso e substitua o seu valor no valor anterior correspondente e repita o processo.Por que este método funciona? Como surgiu este método?

2 Justificando o primeiro método

Para explicar a origem deste primeiro método dado por $x_1 = \dfrac{1}{2}\left(x_0 + \dfrac{N}{x_0}\right)$, tomemos a função auxiliar $f(x) = x^2 - N$. É claro que $\sqrt{N}$ é uma solução de $f(x) = 0$. Aplicando o método de Newton-Raphson à função f obtemos a seguinte função de iteração ϕ:

$$\phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^2 - N}{2x} = \frac{x + \frac{N}{x}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{N}{x}\right).$$

A expressão $\phi(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{N}{x}\right)$ explica a origem de um dos métodos do cálculo da raiz quadrada muito utilizado no ensino fundamental.

2.1 Exemplo

Como exemplo vamos calcular $\sqrt{7}$.

Tomemos como aproximação inicial $x_0 = 2$. Então, temos

$$x_1 = \frac{2 + \frac{7}{2}}{2} = 2.75.$$

Repetindo, obtemos

$$x_2 = \frac{2.75 + \frac{7}{2.75}}{2} = 2.647727273.$$

Agora vamos determinar x_3:

$$x_3 = \frac{2.647727273 + \frac{7}{2.647727273}}{2} = 2.645752048.$$

Assim, sucessivamente.

É conveniente organizar os dados em uma tabela:

k	x_k
0	2
1	2.75
3	2.647727272727
4	2.645752048381
5	2.645751311065

Note que $(2.645752048)^2 = 7.000003899$ e $(2.645751311065)^5 = 7$.

3 O método da média aritmética

Um outro método utilizado para o cálculo de raiz quadrada no ensino fundamental é apresentado como o método método da média aritmética. Ou dito de outra forma: tome uma aproximação por falta a e outra por excesso b para $\sqrt{N}$. Em seguida tome a média aritmética desses valores $m = \frac{a+b}{2}$. Verifique se esta média é uma aproximação por falta ou por excesso e substitua o seu valor no valor correspondente anterior e repita o processo.

Este método é baseado no teorema do valor intermediário aplicado à função $f(x) = x^2 - 7$, pois $f(a)f(b) < 0$ garante que existe uma raiz no intervalo $[a, b]$.

3.1 Exemplo

Vejamos o exemplo tomemos $\sqrt{7}$. Uma aproximação por falta é $a = 2$ e por excesso $b = 3$. A média é $m = 2.5$ que é uma aproximação por falta. Tomemos $m = 2.5$ no lugar de a e repetimos tomando a média $m = 2.75$. Esta é uma aproximação por excesso e entra no lugar de b. Assim, atualizamos as nossas aproximações ficando com $a = 2.5$ e $b = 2.75$. E assim sucessivamente, segue-se repetindo o processo.

É conveniente organizar os dados em uma tabela.

k	a_k	b_k	m_k
0	2	3	2.5
1	2.5	3	2.75
2	2.5	2.75	2.625
3	2.625	2.75	2.6875
4	2.625	2.6875	2.65625
5	2.625	2.65625	2.640625
6	2.640625	2.65625	2.6484375

O teorema do valor intermediário dá origem ao método da bissecção. Aplicando o método da bissecção à função $f(x) = x^2 - 7$, o método consiste em dividir ao meio o intervalo $[a, b]$ e tomar o subintervalo com extremos com aproximação por falta e aproximação por excesso. Repete-se o processo.

4 A fórmula de Bakhshali

O manuscrito Bakhshali foi descoberto há cerca de 100 atrás em uma aldeia situada hoje no Paquistão. Acredta-se que este manuscrito tenha sido produzido em 400 A.C. Ele apresenta, em palavras, a seguinte fórmula para aproximação da raiz quadrada de $\sqrt{N} = \sqrt{x^2 + y}$, onde $N = x^2 + y$.

$$\sqrt{N} = \sqrt{x^2 + y} \approx x + \frac{y}{2x} - \frac{(\frac{y}{2x})^2}{2(x + \frac{y}{2x})}$$

Para $\sqrt{54}$ temos que $54 = 7^2 + 5$ e assim $x = 7$ e $y = 5$. Subsituindo na fórmula obtem-se $\sqrt{54} = 7.348474341$

Referências

[1] de Figueiredo, D. G., Análise I. L.T.C. Rio de Janeiro, 1995.

[2] Andrade, D., Notas de aula de cálculo Numérico. Maringá, 2009.

[3] http://www.math10.com/en/maths-history/math-history-in-india/Bakhshali/bakshali.html. Acessado em 2009.