Universidade Estadual de Maringá - Departamento de Matemática
Cálculo Diferencial e Integral: um KIT de Sobrevivência

Quadrados Mágicos

Prof. Doherty Andrade

Resumo: Nestas notas vamos apresentar uma breve introdução aos quadrados mágicos.

Sumário

1 Introdução

A origem dos quadrados mágicos não é conhecida, mas os antigos chineses, hindús e árabes foram os primeiros a trabalhar com os quadrados mágicos. O exemplo mais antigo é o Loh-Shu encontrado na China, tratase de um quadrado mágico de ordem 3 que data de 2850 a.C.

Um quadrado mágico é uma matriz quadrada de números inteiros positivos em que a soma de cada linha, de cada coluna, e de cada diagonal tem o mesmo valor M, chamado de constante mágica. Note que nenhum inteiro pode ser repetido em um quadrado mágico.

Por exemplo,

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Um quadrado mágico puro é uma quadrado mágico contendo apenas números inteiros consecutivos.

2 Quadrados mágicos puros de ordem 3

Um quadrado mágico de terceira ordem tem três linhas e três colunas, portanto, 9 elementos, como no exemplo acima.

Um quadrado mágico puro é uma quadrado mágico contendo inteiros consecutivos. Existem 8 maneiras de obtermos um quadrado mágico puro de terceira ordem utilizando os inteiros de 1 a 9. O número 5 está sempre no centro, e os números pares estão nos quatro cantos.

Por exemplo,o quadrado mágico puro, tem constante mágica igual a 15:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

A seguir os oito possíveis quadrados mágicos puros, obtidos de rotações e reflexões. Veja o quadro mágico original seguido de rotações e reflexões.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

,

8	3	4
1	5	9
6	7	2

,

6	1	8
7	5	3
2	9	4

,

2	7	6
9	5	1
4	3	8

8	1	6
3	5	7
4	9	2

,

6	7	2
1	5	9
8	3	4

,

2	9	4
7	5	3
6	1	8

,

4	3	8
9	5	1
2	7	6

A partir de uma quadrado mágico qualquer, podemos obter um outro quadrado mágico, multiplicado cada célula do quadrado dado por um número inteiro maior que 1 ou adicionando um inteiro em cada uma de suas células.

Em um quadrado mágico puro de terceira ordem com os inteiros 1,2,3,4,5,6,7,8 e 9, a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre 15. E em um quadrado mágico puro de quinta ordem, a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal é sempre 65. Em geral, um quadrado mágico puro de ordem n, com os números $1, 2, \ldots, n^2$, a soma de cada linha, cada coluna e cada diagonal é dada por

$$\frac{1}{2}(n^3 + n).$$

Nada foi dito aqui sobre quadrados mágicos puros contendo um número par de células, mas ainda para esses, a soma de cada linha, cada coluna e cada diagonal é dada por

$$\frac{1}{2}(n^3 + n).$$

Por exemplo,

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Teorema 2.1 *Em um quadrado mágico puro de ordem n com os números inteiros $1, 2, \ldots, n^2$ a sua constante mágica é $M = \frac{1}{2}(n^3 + n)$.*

Demonstração: Dado um quadrado mágico puro de ordem n a sua constante mágica é $M = \frac{1}{2}(n^3 + n)$. De fato, a soma de cada linha coluna e diagonal, devem ser iguais a M. Como existem n linhas, a soma de todos os elementos do quadrado mágico é nM. Essa soma deve ser igual a $1 + 2 + 3 + \ldots + n^2$. Isto é,

$$\sum_{i=1}^{n^2} i = nM.$$

Segue que

$$\frac{n^2(n^2+1)}{2} = nM.$$

De onde, obtemos que

$$M = \frac{n(n^2+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(n^3 + n\right).$$

Isto conclui a prova do teorema. □

No caso do quadrado mágico puro de ordem 3, temos que

$$M = \frac{(3^3+3)}{2} = 15.$$

Referências

[1] Andrews, W.S. "Magic Squares and Cubes", The Open Court Publishing Company, Chicago 1908.

[2] Falkner, Edward. "Games Ancient and Oriental and How To Play Them", Dover Publications, Inc., New York 1961.