



DERIVADAS

Definição formal

Preceptoras:	Camila Araújo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete

Definição 1 (GUIDORIZZI, 2001) Sejam f uma função e p um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se derivada de f em p e indica-se por $f'(p)$. Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Se f admite derivada em p , então diremos que f é derivável ou diferenciável em p .

Observação 1 Segue das propriedades dos limites que

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Assim

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} \text{ ou } f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p + h) - f(p)}{h}.$$

Exemplo 1. Seja $f(x) = x^2 - 5x$. Calcule $f'(x)$, usando a definição de derivada.

Solução:

Sabemos pela definição que

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - 5(x+h) - (x^2 - 5x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - 5x - 5h - x^2 + 5x}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2 - 5h}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x + h - 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h - 5 \\ &= 2x + 0 - 5 \\ &= 2x - 5. \end{aligned}$$

Exemplo 2. Seja $f(x) = x^3$. Calcule $f'(x)$, usando a definição de derivada.

Solução:

Sabemos pela definição que

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h}.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \\&= 3x^2 + 3x0 + 0^2 = 3x^2.\end{aligned}$$

Exemplo 3. Seja $f(x) = \sqrt{x} + 3$. Calcule $f'(3)$, usando a definição de derivada.

Solução:

Sabemos pela definição que

$$f'(p) = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

Logo, segue que

$$\begin{aligned}f'(3) &= \lim_{h \rightarrow 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} \\&= \lim_{h \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} + 3 - (\sqrt{3} + 3)}{x - 3} \\&= \lim_{h \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3} \\&= \lim_{h \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{(\sqrt{x} - \sqrt{3})(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\&= \lim_{h \rightarrow 3} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{3})} \\&= \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{3}} \\&= \frac{1}{2\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Referências

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo-vol. 1, 5a. edição.
Editora LTC, p. 137, 138, 2001.