LIMITES
Limites Infinitos

Preceptoras:	Camila Araujo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete Matilde Webler Martins

Teorema:

$$1)\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) & = & +\infty\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) & = & +\infty;\end{cases}$$

$$2)\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) & = & L,\text{ L real,}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) & = & +\infty\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) & = & +\infty,\text{se L}>0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) & = & -\infty,\text{ se L}<0;\end{cases}$$

$$3)\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) & = & -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) & = & +\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = -\infty;$$

$$4)\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) & = & L,\text{ L real,}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) & = & +\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = +\infty;$$

$$5)\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) & = & L,\text{ L real,}\\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) & = & -\infty\end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) = -\infty;$$

$$6)\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) & = & +\infty\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)+g(x)] & = & -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) & = & +\infty;\end{cases}$$

$$7)\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) & = & L,\text{ L real,}\\ \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) & = & +\infty\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) & = & -\infty,\text{ se L}>0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)g(x) & = & +\infty,\text{ se L}<0.\end{cases}$$

Observe que o teorema anterior continua válido de substituirmos "$x \to +\infty$"por "$x \to -\infty$"ou por "$x \to p^-$"ou por "$x \to p^+$"ou por "$x \to p$".

Exemplo 1: Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(x^3 + 2x^2\right)$.

Nesse caso temos $f(x) = x^3$ e $g(x) = 2x^2$. Então temos:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty;$$

e pela propriedade 2:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 2 \cdot \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty;$$

Logo, pela propriedade 1:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} x^3 + x^2 &= \lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x\to+\infty} (x^3 + x^2) = +\infty.$$

Exemplo 2: Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1}{x^2} - x\right)$.

Com $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $g(x) = -x$, temos:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} -x = \lim_{x\to-\infty} -1 \cdot \lim_{x\to-\infty} x.$$

Pela propriedade 7, com $f(x) = -1$ e $g(x) = x$, temos $L = -1$, logo $L < 0$, portanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} &= \lim_{x\to-\infty} -1 \cdot \lim_{x\to-\infty} x \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

Logo, pela propriedade 4:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x^2}-x\right)=+\infty.$$

Exemplo 3: Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}(x^3-1)\left(-2x^4+\frac{1}{x}+1\right)$.

Vamos considerar $f(x)=(x^3-1)$ e $g(x)=\left(-2x^4+\dfrac{1}{x}+1\right)$. Então:
Pela propriedade 4:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x^3-1)=+\infty;$$

Pela propriedade 5:

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^4+\frac{1}{x}+1\right)=-\infty;$$

pois:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-2x^4\right)=-\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+1\right)=0.$$

Portanto, pela propriedade 3 temos:

$$\lim_{x\to+\infty}(x^3-1)\left(-2x^4+\frac{1}{x}+1\right)=-\infty.$$

Exemplo 4: Calcule $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-x\right)(-x^2+2)$.

Vamos considerar $f(x)=\left(\dfrac{1}{x}-x\right)$ e $f(x)=(-x^2+2)$. Então:
Pela propriedade 5:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-x\right)=-\infty,$$

pois:

$$\lim_{x\to+\infty}(-x)=-\infty,$$

e

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0;$$

Pela propridedade 5:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(-x^2+2)=-\infty.$$

Portanto, pela propriedade 6 temos:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+x\right)(-x^2+2)=+\infty.$$

Referências

[1] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: volume 1.**5a. edição. Editora LTC; 2001.