LIMITES
Resolvendo indeterminações

Preceptoras:	Ana Clara Martins Ferreira Camila Araújo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete

Teorema 1 *(GUIDORIZZI, 2001) Sejam f e g duas funções. Se existir $r > 0$ tal que $f(x) = g(x)$ para $p - r < x < p + r, x \neq p$, e se $\lim_{x \to p} g(x)$ existir, então $\lim_{x \to p} f(x)$ também existirá e*

$$\lim_{x \to p} f(x) = \lim_{x \to p} g(x).$$

Podemos usar o teorema acima para resolver indeterminações da forma $\frac{0}{0}$, como veremos nos exemplos abaixo.

Exemplo 1. Calcule $\lim_{x \to 7} \dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$.

Solução:

Usando diferença de quadrados, podemos fatorar $\dfrac{x^2 - 49}{x - 7}$ da seguinte forma:

$$\frac{x^2 - 49}{x - 7} = \frac{x^2 - 7^2}{x - 7} = \frac{(x + 7)(x - 7)}{x - 7} = x + 7, \text{ para } x \neq 7;$$

onde $g(x) = x + 7$ é contínua em 7, portanto $\lim_{x \to 7} g(x) = g(7) = 7 + 7 = 14$.

Como

$$\frac{x^2 - 49}{x - 7} = g(x) \text{ para } x \neq 7,$$

segue do teorema, que

$$\lim_{x\to 7} \frac{x^2-49}{x-7} = \lim_{x\to 7} x+7 = 14.$$

Exemplo 2. Calcule $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$.

Solução:

Usando fatoração, conseguimos reescrever $\dfrac{x+1}{x^2+3x+2}$ da seguinte forma:

$$\frac{x+1}{x^2+3x+2} = \frac{x+1}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+2}, \text{ para } x \neq -1.$$

Como

$$\lim_{x\to -1} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{-1+2} = \frac{1}{1} = 1$$

e

$$\frac{x+1}{x^2+3x+2} = \frac{1}{x+2}, \text{ para } x \neq -1,$$

segue da observação, que

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to -1} \frac{1}{x+2} = 1.$$

Exemplo 3. Calcule, $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^3+x}\right)$.

Solução:

Subtraindo as frações, temos:

$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3+x} = \frac{x^3+x-x^2}{x^5+x^3} = \frac{x^2-x+1}{x^4+x^2}, \text{ para } x \neq 0.$$

Dessa última expressão, temos que

$$x^2-x+1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ e } x^4+x^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\},$$

além disso

$$\lim_{x\to 0}(x^2-x+1) = 0-0+1 = 1 \text{ e } \lim_{x\to 0}(x^4+x^2) = 0+0 = 0,$$

o que nos dá

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2-x+1}{x^4+x^2} = \infty.$$

Como
$$\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3+x} = \frac{x^2-x+1}{x^4+x^2}, \text{ para } x \neq 0,$$
segue da observação, que
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3+x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+1}{x^4+x^2} = \infty.$$

Exemplo 4. Calcule $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{\sqrt{8x+25}-1}{x+3}$.

Solução:

Podemos racionalizar a expressão $\dfrac{\sqrt{8x+25}-1}{x+3}$ usando a multiplicação pelo conjugado.

Assim, temos
$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{8x+25}-1}{x+3} &= \frac{\sqrt{8x+25}-1}{x+3}.\frac{\sqrt{8x+25}+1}{\sqrt{8x+25}+1}\\ &= \frac{8x+24}{(x+3)(\sqrt{8x+25}+1)}\\ &= \frac{8(x+3)}{(x+3)(\sqrt{8x+25}+1)}\\ &= \frac{8}{\sqrt{8x+25}+1}, \text{ para } x \neq -3.\end{aligned}$$

Como
$$\lim_{x\to -3}\frac{8}{\sqrt{8x+25}+1} = \frac{8}{\sqrt{8(-3)+25}+1} = \frac{8}{\sqrt{-24+25}+1} = \frac{8}{2} = 4$$
e
$$\frac{\sqrt{8x+25}-1}{x+3} = \frac{8}{\sqrt{8x+25}+1}, \text{ para } x \neq -3,$$
segue do teorema, que
$$\lim_{x\to -3}\frac{\sqrt{8x+25}-1}{x+3} = \lim_{x\to -3}\frac{8}{\sqrt{8x+25}+1} = 4.$$

Exemplo 5. Calcule $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x-1}$.

Solução:

Como o grau do pôlinomio do numerador é maior que o do denominador, podemos usar divisão de polinômios para simplificar a expressão antes de calcular o limite.

Assim, temos

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & & & -1 & x-1 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & & & x^2+x+1 \\ \cline{1-2}
& x^2 & & & \\
& -x^2 & +x & & \\ \cline{2-3}
& & x & -1 & \\
& & -x & +1 & \\ \cline{3-4}
& & & 0 &
\end{array}
$$

Dessa forma,

$$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2+x+1, \text{ para } x \neq 1.$$

Como

$$\lim_{x \to 1}(x^2+x+1) = 1^2+1+1 = 3,$$

segue da observação, que

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x^2+x+1) = 3.$$

Referências

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo-vol. 1, 5a. edição. **Editora LTC**, p. 73, 2001.