LIMITES
Limites no Infinito

Preceptoras:	Ana Clara Martins Ferreira Camila Araujo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete Matilde Webler Martins

Teorema 1: Sejam f e g duas funcões tais que $\text{Im}f \subset D_g$ e $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$:

1.1) Se g for continua em a, então:

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

1.2) Se g não estiver definida em a e se $\lim_{u\to a} g(u)$ existir, então:

$$\lim_{x\to+\infty} g(f(x)) = \lim_{u\to a} g(u).$$

Teorema 2: Seja k uma constante e suponhamos que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = L_2$. Então:

2.1) $\lim_{x\to+\infty} [f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$.

2.2) $\lim_{x\to+\infty} kf(x) = k \lim_{x\to+\infty} f(x) = kL_1$.

2.3) $\lim_{x\to+\infty} [f(x)g(x)] = L_1 \cdot L_2$.

2.4) $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$, desde que $L_2 \neq 0$.

Observação: Os teoremas acima continuam válidos se substituirmos "$x \to +\infty$"por "$x \to -\infty$".

Exemplo 1: Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{1}{x^3} \right)$.

Nesse caso temos $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$.
Observe que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} \quad = \quad \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^3$$

Se $g(x) = \dfrac{1}{x}$ e $f(x) = x^3$, então temos $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.
Logo, pela propriedade 1.1:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} \right)^3 &= \lim_{u \to 0} \left(u^3 \right) \\ &= 0^3 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x^3} \right) = 0.$$

Exemplo 2: Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\dfrac{1}{x} - 5 \right)$.

Pela propriedade 2.1 com $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = -5$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} - 5 \right) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \to -\infty} 5 \\ &= (0 - 5) \\ &= -5. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\frac{1}{x} - 5 \right) = -5.$$

Exemplo 3: Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^3 - x - 1}{2x^4 + 2x^3 + 1}$.

Vamos colocar em evidencia a mais alta potencia de x que ocorre no numerador e proceder da mesma forma no denominador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x - 1}{2x^4 + 2x^3 + 1} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right)}{x^4\left(2 + 2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right)}{\left(2 + 2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)}
\end{aligned}$$

Pela propriedade 2.4 com $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^4}$ e $g(x) = 2 + 2\frac{1}{x} + \frac{1}{x^4}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right)}{\left(2 + 2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 + 2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)}
\end{aligned}$$

Pela propriedade 2.1:

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^3} - \dfrac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2 + 2\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^4}\right)} = \frac{\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}\right)}{\left(\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}\right)}$$

Pela propriedade 2.2, com $k = 2$ e $f(x) = \frac{1}{x}$:

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \lim\limits_{x\to+\infty} 2\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}}$$

Veja que as expressões do tipo $\frac{1}{x^n}$ tendem a zero quando x tende a $+\infty$, então:

$$\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^3} - \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + 2\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} + \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^4}} = \frac{0-0-0}{2+2\cdot 0+0}.$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x-1}{2x^4+2x^3+1} = 0.$$

Exemplo 4: Calcule $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^{-4}}+1\right)\cdot\left(\dfrac{1}{x}+2\right)$.

Podemos resolver esse exercício utilizando a propriedade 2.3, onde $f(x) = (\sqrt{x^{-4}}+1)$ e $g(x) = (\frac{1}{x}+2)$. Então:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{-4}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{-4}}+1\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+2\right)\\
&= \left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}+\lim_{x\to+\infty}1\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}+\lim_{x\to+\infty}2\right)\\
&= (0+1)\cdot(0+2)\\
&= (1)(2)\\
&= 2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^{-4}}+1\right)\cdot\left(\frac{1}{x}+2\right) = 2.$$

Referências

[1] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: volume 1.**5a. edição. Editora LTC; 2001.