LIMITES
Limites laterais vs limite

Preceptoras:	Ana Clara Martins Ferreira Camila Araújo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete

Teorema 1 *(GUIDORIZZI, 2001) Sejam f uma função e p um número real e suponhamos que existam a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f. Então,*

$$\lim_{x\to p} f(x) = L \iff \begin{cases} f \text{ admite limites laterais à direita e à esquerda em } p \\ \text{e } \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = L. \end{cases}$$

Observações

1. Se $\lim_{x\to p^+} f(x)$ e $\lim_{x\to p^-} f(x)$ existirem e forem *diferentes*, então $\lim_{x\to p} f(x)$ não existirá.

2. Se existirem a e b tais que $]a, p[$ e $]p, b[$ estejam contidos em D_f e se, em p, um dos limites laterais não existir, então $\lim_{x\to p} f(x)$ não existirá.

3. Se existirem reais $r > 0$ e b tais que $]p, b[\subset D_f$ e $]p - r, p[\cap D_f = \phi$, então $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p^+} f(x)$, desde que o limite lateral à direita exista. Se ocorrer $]b, p[\subset D_f$ e $]p, p + r[\cap D_f = \phi$, então $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x)$, desde que o limite lateral à esquerda exista.

Exemplo 1. Calcule $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x+1}$.

Solução:

Pela observação 3, $\lim\limits_{x\to -1} \sqrt{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{x+1} = \lim\limits_{x\to -1^+} \sqrt{0} = 0$.

Exemplo 2. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$. Se não existir, justifique.

Solução:

Primeiramente, observamos que a função $f(x) = \dfrac{|x-2|}{x-2}$ é uma função definida por partes e pode ser reescrita como $f : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x > 2 \\ -1, & \text{se } x < 2 \end{cases}.$$

Calculando os limites laterais, temos:

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} 1 = 1$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} -1 = -1$.

Como $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{|x-2|}{x-2} \neq \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{|x-2|}{x-2}$, segue que $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{|x-2|}{x-2}$ não existe.

Exemplo 3. Calcule, se existir, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, onde $f(x) = \begin{cases} x+3, & \text{se } x \geq 1 \\ 4x, & \text{se } x < 1 \end{cases}$.

Solução:

Calculando os limites laterais:

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} x+3 = 4$ e $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 4x = 4$.

Como $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, segue que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 4$.

Referências

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo-vol. 1, 5a. edição. **Editora LTC**, p. 83–84, 2001.