INTEGRAL
Integração por partes

Preceptoras:	Camila Araujo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete M. Webler Martins

Teorema:
Suponhamos f e g definidas e deriváveis num mesmo intervalo I. Temos:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

ou

$$f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x).$$

Supondo, então que $f'(x)g(x)$ admita primitiva em I e observando que $f(x)g(x)$ é uma primitiva de $[f(x)g(x)]'$, então $f(x)g'(x)$ também admitira primitiva em I e

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx. \tag{1}$$

que é a regra de integracao por partes.

Fazendo $u = f(x)$ e $v = g(x)$ teremos $du = f'(x)dx$ e $dv = g'(x)dx$, o que nos permite escrever a regra (1) na seguinte forma usual:

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Exemplo 1: Calcule $\int (x^3 - 2x^2)(e^x)dx$.

Com $u = x^3 - 2x^2$ e $dv = e^x dx$, temos:

$$du = (3x^2 - 4x)dx$$

e

$$v = e^x.$$

Pelo teorema:

$$\int (x^3 - 2x^2)(e^x)dx \quad = \quad (x^3 - 2x^2)(e^x) - \int (e^x)(3x^2 - 4x)dx. \qquad (2)$$

Podemos aplicar a fórmula de integração por partes novamente para resolver a integral do lado direito da igualdade, onde $u = 3x^2 - 4x$ e $dv = e^x dx$. Assim temos $du = (6x - 4)dx$ e $v = e^x$. Logo:

$$\int (e^x)(3x^2 - 4x)dx = (3x^2 - 4x)(e^x) - \int e^x(6x - 4)dx$$

$$\int (e^x)(3x^2 - 4x)dx = (3x^2 - 4x)(e^x) - 2\int e^x(3x - 2)dx. \qquad (3)$$

Novamente, temos $u = 3x - 2$ e $dv = e^x dx$. Então $du = 3dx$ e $v = e^x$. Portanto, pelo teorema:

$$\begin{aligned}
\int e^x(3x - 2)dx \quad &= \quad (3x - 2)(e^x) - \int e^x(3)dx \\
&= \quad (3x - 2)(e^x) - 3e^x + C \\
&= \quad e^x[(3x - 2) - 3] + C
\end{aligned}$$

$$\int e^x(3x - 2)dx = e^x(3x - 5) + C. \qquad (4)$$

Substituindo os resultados obtidos em (4) na integral de (3) :

$$\begin{aligned}
\int (e^x)(3x^2 - 4x)dx \quad &= \quad (3x^2 - 4x)(e^x) - 2\int e^x(3x - 2)dx \\
&= \quad (3x^2 - 4x)(e^x) - 2[e^x(3x - 5)] + C \\
&= \quad e^x[(3x^2 - 4x) - (6x - 10)] + C
\end{aligned}$$

$$\int (e^x)(3x^2 - 4x)dx = e^x(3x^2 - 10x + 10) + C. \qquad (5)$$

Substituindo (5) em (2):

$$\begin{aligned}
\int (x^3 - 2x^2)(e^x)dx &= (x^3 - 2x^2)(e^x) - \int (e^x)(3x^2 - 4x)dx \\
&= (x^3 - 2x^2)(e^x) - e^x(3x^2 - 10x + 10) + C \\
&= (e^x)[(x^3 - 2x^2) - (3x^2 - 10x + 10)] + C \\
&= (e^x)(x^3 - 2x^2 - 3x^2 + 10x - 10) + C \\
&= (e^x)(x^3 - 5x^2 + 10x - 10) + C.
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\int (x^3 - 2x^2)(e^x)dx = (e^x)(x^3 - 5x^2 + 10x - 10) + C.$$

Exemplo 2: Calcule $\int cos(x)5xdx$.

Com $u = x$ e $dv = cos(x)dx$, temos:

$$du = 1dx$$

e

$$v = sen(x).$$

Pelo teorema:

$$\begin{aligned}
\int cos(x)5xdx &= 5\int cos(x)xdx \\
&= 5[sen(x)x - \int (1)(sen(x))dx \\
&= 5[sen(x)x - (-cos(x))] + C \\
&= 5(sen(x)x + cos(x)) + C.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\int cos(x)5xdx = 5(sen(x)x + cos(x)) + C.$$

Exemplo 3: Calcule $\int lnx(x+1)dx$.

Com $u = ln(x)$ e $dv = (x+1)dx$, temos:

$$du = \frac{1}{x}dx$$

e

$$v = \frac{x^2}{2} + x.$$

Pelo teorema:

$$\begin{aligned}
\int lnx(x+1)dx &= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) ln(x) - \int \left(\frac{x^2}{2} + x\right) \frac{1}{x}dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) ln(x) - \int \left(\frac{x}{2} + 1\right) dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) ln(x) - \int \left(\frac{x}{2}\right) dx - \int 1dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) ln(x) - \frac{1}{2}\int xdx - \int 1dx \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) ln(x) - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - x + C \\
&= \left(\frac{x^2}{2} + x\right) ln(x) - \frac{x^2}{4} - x + C.
\end{aligned}$$

Logo:

$$\int lnx(x+1)dx = \left(\frac{x^2}{2} + x\right) ln(x) - \frac{x^2}{4} - x + C.$$

Exemplo 4: Calcule $\int (e^x + 1)sen(x)dx$.

Com $u = e^x + 1$ e $dv = sen(x)dx$, temos:

$$du = e^x dx$$

e

$$v = -cos(x).$$

Pelo teorema:

$$\begin{aligned}\int (e^x+1)sen(x)dx &= (e^x+1)(-cos(x)) - \int e^x(-cos(x))dx \\ &= (e^x+1)(-cos(x)) + \int e^x cos(x)dx.\end{aligned}$$

Temos então $u = cos(x)$ e $dv = e^x dx$, assim $du = -sen(x)dx$ e $v = e^x$. Também pelo teorema:

$$\begin{aligned}\int e^x cos(x)dx &= e^x cos(x) - \int e^x(-sen(x))dx \\ &= e^x cos(x) + \int e^x(sen(x))dx.\end{aligned}$$

Então $u = sen(x)$ e $dv = e^x dx$, assim $du = cos(x)dx$ e $v = e^x$. Portanto:

$$\begin{aligned}\int e^x cos(x)dx &= e^x cos(x) + \int e^x(sen(x))dx \\ \int e^x cos(x)dx &= e^x cos(x) + (e^x(senx) - \int e^x(cos(x))dx) \\ \int e^x cos(x)dx + \int e^x cos(x)dx &= e^x cos(x) + e^x(senx) \\ 2\int e^x cos(x)dx &= e^x cos(x) + e^x(senx) \\ \int e^x cos(x)dx &= \frac{e^x cos(x) + e^x(senx)}{2} + c.\end{aligned}$$

Substituindo então o valor da integral temos:

$$\begin{aligned}\int (e^x+1)sen(x)dx &= (e^x+1)(-cos(x)) + \int e^x cos(x)dx \\ &= -(e^x+1)(cos(x)) + \frac{e^x cos(x) + e^x(senx)}{2} + C.\end{aligned}$$

Logo:

$$\int (e^x + 1) sen(x) dx = -(e^x + 1)(cos(x)) + \frac{e^x cos(x) + e^x (senx)}{2} + C.$$

Referências

[1] GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo: volume 1**. 5a. edição. Editora LTC. 2001.