



INTEGRAIS

Mudança de variável

Preceptoras:	Camila Araújo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete

Teorema 1 (GUIDORIZZI, 2001) *Toda função contínua num intervalo I admite, neste intervalo, uma primitiva.*

Teorema 2 (GUIDORIZZI, 2001) *Seja f contínua num intervalo I e sejam a e b dois números reais quaisquer em I . Seja $g : [c, d] \rightarrow I$, com g' contínua em $[c, d]$, tal que $g(c) = a$ e $g(d) = b$. Nestas condições*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du.$$

Exemplo 1. Calcule $\int_2^3 (x - 2)^8 dx$.

Solução:

Façamos $u = x - 2$. Assim,

$$\begin{cases} u = x - 2 & ; du = dx \\ x = 2 & ; u = 2 - 2 = 0 \\ x = 3 & ; u = 3 - 2 = 1 \end{cases}$$

e, dessa forma,

$$\int_2^3 (x - 2)^8 dx = \int_0^1 u^8 du = \left[\frac{u^9}{9} \right]_0^1 = \frac{1}{9}.$$

Exemplo 2. Calcule $\int_1^3 \sqrt{x+4} dx$.

Solução:

Façamos $u = x + 4$. Assim,

$$\begin{cases} u = x + 4 & ; du = dx \\ x = 1 & ; u = 1 + 4 = 5 \\ x = 3 & ; u = 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

e, dessa forma,

$$\int_1^3 \sqrt{x+4} dx = \int_5^7 \sqrt{u} du = \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_5^7 = \frac{2}{3} [\sqrt{u^3}]_5^7 = \frac{2}{3} (7\sqrt{7} - 5\sqrt{5}).$$

Exemplo 3. Calcule $\int_0^1 e^{(3x+8)} dx$.

Solução:

Façamos $3x + 8 = u$, ou seja, $x = \frac{1}{3}(u - 8)$. Assim,

$$\begin{cases} x = \frac{1}{3}(u - 8) & ; dx = \frac{1}{3} du \\ x = 0 & ; u = 3(0) + 8 = 8 \\ x = 1 & ; u = 3(1) + 8 = 11 \end{cases}$$

e, dessa forma,

$$\int_0^1 e^{(3x+8)} dx = \int_8^{11} e^u \cdot \frac{1}{3} du = \frac{1}{3} \int_8^{11} e^u du = \frac{1}{3} [e^u]_8^{11} = \frac{1}{3} (e^{11} - e^8).$$

Exemplo 4. Calcule $\int_{-2}^0 x^3 \sqrt{x^2 + 5} dx$.

Solução:

Façamos $u = x^2 + 5$. Assim,

$$\begin{cases} u = x^2 + 5 & ; \frac{1}{2} du = x dx \\ x = -2 & ; u = (-2)^2 + 5 = 9 \\ x = 0 & ; u = 0^2 + 5 = 5 \end{cases}$$

e, dessa forma,

$$\begin{aligned}
 \int_{-2}^0 x^3 \sqrt{x^2 + 5} \, dx &= \int_9^5 (u - 5) \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} \, du \\
 &= -\frac{1}{2} \int_5^9 (u - 5) \sqrt{u} \, du \\
 &= -\frac{1}{2} \int_5^9 (u^{\frac{3}{2}} - 5u^{\frac{1}{2}}) \, du \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\int_5^9 u^{\frac{3}{2}} \, du - 5 \int_5^9 u^{\frac{1}{2}} \, du \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5} \left[u^{\frac{5}{2}} \right]_5^9 - 5 \cdot \frac{2}{3} \left[u^{\frac{3}{2}} \right]_5^9 \right) \\
 &= -\frac{1}{5} \left(9^{\frac{5}{2}} - 5^{\frac{5}{2}} \right) + \frac{5}{3} \left(9^{\frac{3}{2}} - 5^{\frac{3}{2}} \right) \\
 &= \frac{-729 + 75\sqrt{5} + 675 - 125\sqrt{5}}{15} \\
 &= -\frac{54 + 50\sqrt{5}}{15}.
 \end{aligned}$$

Exemplo 5. Calcule $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx$.

Solução:

Façamos $u = \sin x$. Assim,

$$\begin{cases} u = \sin x & ; du = \cos x \, dx \\ x = 0 & ; u = \sin 0 = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} & ; u = \sin(\frac{\pi}{2}) = 1 \end{cases}$$

e, dessa forma,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \int_0^1 u^2 \, du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1^3}{3} = \frac{1}{3}.$$

Exemplo 6. Calcule $\int_0^1 x^3 \cos(x^4 + 1) \, dx$.

Solução:

Façamos $u = x^4 + 1$. Assim,

$$\begin{cases} u = x^4 + 1 & ; \frac{1}{4}du = x^3 dx \\ x = 0 & ; u = 0^4 + 1 = 1 \\ x = 1 & ; u = 1^4 + 1 = 2 \end{cases}$$

e, dessa forma,

$$\int_0^1 x^3 \cos(x^4 + 1) dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \cos u du = \frac{1}{4} [\sin u]_1^2 = \frac{1}{4} (\sin 2 - \sin 1).$$

Observação 1 Podemos resolver as integrais acima de outra maneira, calculando a integral indefinida primeiro e depois substituindo uma primitiva encontrada para aplicar o Teorema Fundamental do Cálculo. Vejamos o exemplo 6.

Exemplo 6.1. Calcule $\int_0^1 x^3 \cos(x^4 + 1) dx$.

Solução:

Vamos nos preocupar primeiro em resolver a integral indefinida

$$\int x^3 \cos(x^4 + 1) dx$$

Façamos $u = x^4 + 1$, assim, teremos $\frac{1}{4}du = x^3 dx$. Dessa forma,

$$\int x^3 \cos(x^4 + 1) dx = \frac{1}{4} \int \cos u du = \frac{1}{4} \sin u + k.$$

Como $u = x^4 + 1$, fica

$$\frac{1}{4} \sin u + k = \frac{1}{4} \sin(x^4 + 1) + k, \quad k \text{ constante.}$$

Assim,

$$\int_0^1 x^3 \cos(x^4 + 1) dx = \frac{1}{4} [\sin(x^4 + 1) + k]_0^1 = \frac{1}{4} (\sin 2 - \sin 1).$$

Referências

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo-vol. 1, 5a. edição. Editora LTC, p. 317, 318, 2001.