DERIVADAS
Regra da cadeia

Preceptoras:	Camila Araújo Varela Valdinete Kahenler
Coordenadora:	Claudete

Teorema 1 *(GUIDORIZZI, 2001) Sejam $y = f(u)$ e $u = g(x)$ duas funções deriváveis, com $Img \subset D_f$. A composta $h(x) = f(g(x))$ é derivável e vale*

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x),\ x \in D_g.$$

Observação 1 *Na notação de Leibniz, temos*

$$\frac{dy}{du} = f'(u) \ \text{e}\ \frac{du}{dx} = g'(x).$$

Sendo a composta dada por $y = f(g(x))$, segue que

$$\frac{dy}{dx} = f'(g(x))g'(x)$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = f'(u)g'(x),\ \text{onde}\ u = g(x).$$

Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$

onde $\dfrac{dy}{du}$ deve ser calculado em $u = g(x)$.

Exemplo 1. Seja $f(x) = \cos(x^2)$. Calcule $f'(x)$.

Solução:

Observe que $y = \cos u$, onde $u = x^2$. Pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Como $\frac{dy}{du} = -\sin u$ e $\frac{du}{dx} = 2x$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = -\sin u \cdot 2x = -2x\sin(x^2).$$

Exemplo 2. Seja $f(x) = (4-3x)^3$. Calcule $f'(x)$.

Solução:

Observe que $y = u^3$, onde $u = 4-3x$. Pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Como $\frac{dy}{du} = 3u^2$ e $\frac{du}{dx} = -3$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = 3u^2 \cdot (-3) = -9(4-3x)^2.$$

Exemplo 3. Seja $f(x) = e^{(7x^2+3)}$. Calcule $f'(x)$.

Solução:

Observe que $y = e^u$, onde $u = 7x^2+3$. Pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Como $\frac{dy}{du} = e^u$ e $\frac{du}{dx} = 14x$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = e^u \cdot 14x = 14xe^{(7x^2+3)}.$$

Exemplo 4. Seja $f(x) = \ln(x^2)$. Calcule $f'(x)$, para $x \neq 0$.

Solução:

Observe que $y = \ln u$, onde $u = x^2$ Pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Como $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{u}$ e $\dfrac{du}{dx} = 2x$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u} \cdot 2x = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}.$$

Exemplo 5. Seja $f(x) = \sqrt{7x^3}$. Calcule $f'(x)$.

Solução:

Observe que $y = \sqrt{u}$, onde $u = x^2$ Pela regra da cadeia

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}.$$

Como $\dfrac{dy}{du} = \dfrac{1}{2\sqrt{u}}$ e $\dfrac{du}{dx} = 21x^2$, resulta

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 21x^2 = \frac{21x^2}{2\sqrt{7x^3}} = \frac{21x^2}{2x\sqrt{7x}} = \frac{21x}{2\sqrt{7x^3}}.$$

Referências

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo-vol. 1, 5a. edição. **Editora LTC**, p. 171, 2001.