

Explorações de Limites

Notas de Aula

Prof. Rui - DMA - UEM.

✂ professorrui@hotmail.com

1 *Como criar seqüências numéricas.*

✂ Para criar uma seqüência de números sucessivos use comando semelhante ao seguinte.
Coloque o cursor na linha abaixo e aperte Shift+Enter.

✂ `--> for a:1 thru 7 do display(a);`

✂ Para criar uma seqüência só de números pares (ou ímpares) use comando semelhante ao seguinte.

✂ `--> for a:0 thru 10 step 2 do display(a);`

✂ Para criar uma seqüência com resultados de uma função sobre seqüência de números use comando semelhante ao seguinte.

✂ `--> for a:1 thru 10 do display(sqrt(a)/(3+sin(a)));`

✂ Para ver aproximações com ponto flutuante na seqüência anterior use:

✂ `--> for a:1 thru 10 do display(float(sqrt(a)/(3+sin(a))));`

✂ Para explorar o comportamento de $1/x$ quando x tende a infinito, pode-se usar:

✂ `--> for x:3000 thru 10000 step 1000 do
display(float(1/x));`

✂ Pode-se usar potências de 10 para atribuição do intervalo dos números da seqüência. Veja exemplo a seguir.

✂ `--> for x:3*10^5 thru 10^7 step 10^5 do
display(float(1/x));`

Para criar números positivos que se aproximam de zero, crie sequência crescente de números "a" e utilize a inversão "1/a":

```
--> for a:5000 thru 10000 step 1000 do  
      display(float(1/a));
```

Para explorar o comportamento de outras expressões, faça adaptações das rotinas anteriores.

1.1 Exemplo 1

Calcular por aproximação do coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y=x^2$ no ponto (1,1).

Vamos fazer aproximações pela direita. Precisamos criar pontos que se aproximem de $x=1$ pela direita. Isso pode ser feito com o comando:

```
--> for a:1 thru 10 step 1 do  
      display(1.0+1/a);
```

Para refinar as aproximações podemos usar:

```
--> for a:10000 thru 100000 step 10000 do  
      display(1.0 + 1/a);
```

A variação de y quando consideramos os pontos 1 e $1+(1/a)$ é igual a $[1+1/a]^2-1^2=[1+1/a]^2-1$.

A variação de x quando consideramos os pontos 1 e $1+(1/a)$ é igual a $[1+(1/a)]-1=(1/a)$.

Assim o coeficiente angular de aproximações com retas secantes pela direita pode ser obtido com as seguintes aproximações.

Faremos $1/a$ andar com passos de centésimos, partindo de $1/100$ até chegar a um milésimo, $1/1000$.

```
--> for a:100 thru 1000 step 100 do  
      display( ((1.0+1/a)^2-1)/(1.0/a) );
```

Para refinar a rotina, façamos $1/a$ partir de $1/10000$ e andar com passos de $1/10000$ até $1/1000000$ (um milionésimo).

```
--> for a:10000 thru 1000000 step 10000 do  
      display( ((1.0+1/a)^2-1)/(1.0/a) ) ;
```

Percebemos que o coeficiente angular das secantes obtidas por aproximações pela direita em $x=1$ tendem ao número 2.

Para obter aproximações dos coeficientes angulares das retas tangentes com aproximações pela esquerda façamos o seguinte:

As abscissas têm a forma $x=1-(1/a)$ e $x=1$.
Então o Δ_y tem a expressão $1^2-[1-(1/a)]^2=1-[1-(1/a)]^2$.
Então o Δ_x tem a expressão $1-[1-(1/a)]=(1/a)$.

Assim o coeficiente angular de aproximações com retas secantes pela esquerda pode ser obtido com as seguintes aproximações.

Faremos $1/a$ andar com passos de centésimos, partindo de $1/100$ até chegar a um milésimo, $1/1000$.

```
--> for a:100 thru 1000 step 100 do  
      display( (1-(1.0-1/a)^2)/(1.0/a) ) ;
```

Para refinar a rotina, façamos $1/a$ partir de $1/10000$ e andar com passos de $1/10000$ até $1/1000000$ (um milionésimo).

```
--> for a:10000 thru 1000000 step 10000 do  
      display( (1-(1.0-1/a)^2)/(1.0/a) ) ;
```

Concluimos, então, que as aproximações por retas secantes, quer pela esquerda, quer pela direita, indicam a tendência de que a reta tangente terá coeficiente angular igual a 2.

1.2 Exemplo 2

Queda livre da Torre CN de Toronto.
 Modelo de Galileu $s(x) = (4.9)(x^2)$.
 Estimar a velocidade no tempo $x=5$ segundos.

Consideremos posições nos tempos $x=5$ e $x=5+(1/a)$.

$$\Delta s = (4.9) * [5 + (1/a)]^2 - (4.9) * [5]^2$$

$$\Delta x = (1/a)$$

```
--> for a:1 thru 10 step 1 do display(((4.9)*(5+(1/a))^2-(4.9)*5^2)/(1.0/a));
```

Para refinar a rotina, façamos $1/a$ partir de $1/10000$
 e andar com passos de $1/10000$ até $1/1000000$ (um milionésimo).

```
--> for a:10000 thru 1000000 step 10000
do display(((4.9)*(5+(1/a))^2-(4.9)*5^2)/(1.0/a));
```

Podemos fazer aproximações pela esquerda.

Consideremos posições nos tempos $x=5-(1/a)$ e $x=5$.

$$\Delta s = (4.9) * [5]^2 - (4.9) * [5 - (1/a)]^2$$

$$\Delta x = (1/a)$$

```
--> for a:10000 thru 1000000 step 10000
do display(((4.9)*5^2-(4.9)*(5-(1/a))^2)/(1.0/a));
```

Percebemos, com aproximações pela esquerda e pela direita,
 que a velocidade média tende a atingir o valor 49 (m/s).

1.3 Exemplo 3

Investigar o comportamento da função $f(x) = x^2 - x + 2$ para valores próximos de $x=2$.

Vamos primeiramente definir a função na memória.

```
--> f(x):=x^2-x+2;
```

verifique a função está definida e memorizada:

```
--> f(2);f(-4);f(0);
```

Podemos fazer aproximações pela esquerda.
Consideremos posições nos tempos $x=2-(1/a)$.
Façamos $(1/a)$ se aproximar da seguinte maneira.

```
--> for a:1 thru 10 step 1 do display(f(2.0-(1.0/a)));
```

Podemos refinar a rotina.
Façamos a aproximação de milésimos até
a casa dos milionésimos.

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(f(2.0-(1.0/a)));
```

A tendência, pela esquerda é $f(x)$ atingir o valor 4.
Vejam os a tendência pela direita.

De milésimos até a casa do milionésimo.

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(f(2.0+(1.0/a)));
```

Percebemos que a tendência de $f(x)$ quando x
se aproxima de 2 pela direita também é atingir o valor 4.

Pelas estimativas numéricas que fizemos,
diremos que o limite de $f(x)$
quando x tende a 2 é igual a 4.

1.4 Exemplo 4

Estimar o valor da expressão funcional $(x-1)/(x^2-1)$
quando x tende a 1.

Vamos definir uma função com a expressão do enunciado.

```
--> g(x):=(x-1)/(x^2-1);
```

Aproximações pela direita podem ser obtidas com a seguinte rotina:
Obs: perceba que o comando é quase o mesmo anterior, só
trocamos o nome da função e o ponto base).

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(g(1.0+(1.0/a)));
```

Aproximações pela esquerda podem ser obtidas com a seguinte rotina:

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(g(1.0-(1.0/a)));
```

A exploração anterior nos leva a dizer que quando x tende a 1 a expressão $g(x)$ tende ao número 4.

1.5 Exemplo 5

Estime os valores de $h(x) = [\sqrt{x^2+9}-3]/[x^2]$ quando x tende a zero.

Vamos definir a função.

```
--> h(x):=(sqrt(x^2+9)-3)/(x^2);
```

Aproximações pela esquerda são encontradas com a seguinte rotina.

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(h(-(1.0/a)));
```

Aproximações pela direita são encontradas com a seguinte rotina.

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(h(1.0/a));
```

As explorações anteriores nos levam a dizer que o limite de $h(x)$ quando x tende a zero é igual a 1.666... .

✓ CUIDADO!

As explorações numéricas auxiliam a compreensão do cálculo de limites, mas não podemos confiar cegamente nos resultados.

Ao final do exemplo anterior o autor do livro nos fala de erros ocasionados pelas rotinas programadas nas calculadoras e softwares.

Perceba que se fizermos aproximações com centésimos de milésimos, a programação envolvida com o cálculo da raiz quadrada fará aproximações que levam ao cálculo de $3-3=0$ no numerador, e conseqüentemente, a partir de algum momento a listagem nos mostra que a expressão vale "zero". Poderíamos ser levados a dizer que o limite seria "zero".

✓ `--> for a:100000 thru 100000000 step 100000 do display(h(-1.0/a));`

✓ PORTANTO, CUIDADO com as explorações numéricas.

□ 1.6 Exemplo 6

✓ Explore o valor de $\sin(x)/x$ quando x tende a zero.

✓ Vamos definir a função.

✓ `--> m(x):=sin(x)/x;`

✓ Aproximações pela direita.

✓ `--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(m(1.0/a));`

✓ Aproximações pela esquerda.

✓ `--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(m(-1.0/a));`

✓ Somos levados a dizer que o limite de $\sin(x)/x$ quando x tende a zero é igual a 1.

□ 1.7 Exemplo 7

EXEMPLO MUITO IMPORTANTE!

Explore o valor de $\sin(\pi/x)$ quando x tende a zero.

Para registrarmos o número π devemos usar " π ".
Verifique:

```
-->  $\pi$ ;
```

```
--> float( $\pi$ );
```

Se x se aproxima pela esquerda e pela direita de $x=0$ segundo frações decimais $x=(1/10^n)$, como temos feito usualmente, obteremos o seguinte.

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(float(sin( $\pi/(1/a)$ )));
```

Aproximações pela esquerda.

```
--> for a:1000 thru 1000000 step 10000 do display(float(sin( $\pi/(-1/a)$ )));
```

Mas se os valores dos pontos que se aproximam de $x=0$ forem outros, o resultado da exploração pode ser outro!

O esboço do gráfico da função $\sin(\pi/x)$ mostra que existem pontos que se aproximam de zero, sobre os quais a função assume valor 1.

Também se observa que existem pontos que se aproximam de zero, sobre os quais a função assume valor igual a -1.

```
--> wxplot2d([sin( $\pi/x$ )], [x,-5,5]);
```

Isso mostra que devemos tomar cuidado com as explorações numéricas, pois não basta avaliar uma função sobre uma sequência que se aproxima de um valor $x=c$.

Também deve ser levado em consideração que existem diversas "maneiras" de se aproximar de um ponto $x=c$. (!!)

1.8 Exemplo 8

Explore o limite de $1/(x^2)$ quando x tende a zero.

```
--> f(x):=1/(x^2);
```

Aproximações pela direita.

```
--> for n:1000 thru 10000 step 1000 do display(f(1/n^2));
```

Rotina com valores maiores, ainda pela direita.

```
--> for n:10^7 thru 10^11 step 10^9 do display(f(1/n^2));
```

Rotina com valores grandes pela esquerda.

```
--> for n:10^7 thru 10^11 step 10^9 do display(f(-1/n^2));
```

A exploração nos leva a dizer que $f(x)$ tende a aumentar indefinidamente quando x se aproxima de zero.

1.9 Exemplo 9

Explore o limite de $(2*x)/(x-3)$ quando x tende a 3.

```
--> f(x):=(2*x)/(x-3);
```

Aproximações pela direita

```
--> for n:10^6 thru 10^8 step 10^6 do display(f(3+1/n));
```

Pela esquerda.

```
--> for n:10^6 thru 10^8 step 10^6 do display(f(3-1/n));
```

Percebemos um crescimento explosivo e positivo nas aproximações pela direita.

Percebemos um crescimento explosivo e negativo nas aproximações pela esquerda.

1.10 Exemplo 10

Explore o limite de $\tan(x)$ quando x se aproxima de $\pi/2$.

```
--> for n:10^6 thru 10^8 step 10^7 do display(tan(%pi/2+1.0/n));
```

```
--> for n:10^6 thru 10^8 step 10^7 do display(tan(%pi/2-1.0/n));
```

Explore o limite de $\ln(x)$ quando x tende a zero pela direita.

```
--> for n:10^6 thru 10^8 step 10^7 do display(log(1.0/n));
```

□ **2 Para explorar o primeiro limite fundamental, coloque o cursor nas linhas abaixo e aperte *Shift+Enter*.**

```
--> for a:1 thru 10 do display(float(sin(1/a)/(1/a)));
```

outra maneira de imprimir números racionais em notação de ponto flutuante é escrever algum número envolvido na expressão na forma desejada. Veja o exemplo a seguir.

```
--> for a:1 thru 10 do display(sin(1.0/a)/(1/a));
```

Para explorar com mais profundidade execute o seguinte comando.

```
--> for a:10^3 thru 10^5 step 10^3 do display(sin(1.0/a)/(1/a));
```

```
--> for a:10^6 thru 10^8 step 10^6 do display(sin(1.0/a)/(1/a));
```

□ **3 Para explorar o segundo limite fundamental, coloque o cursor nas linhas abaixo e aperte *Shift+Enter*.**

```
--> for a:1 thru 10 do display((cos(1.0/a)-1)/(1/a));
```

```
--> for a:10^3 thru 10^5 step 10^3 do display((cos(1.0/a)-1)/(1/a));
```

- **4 Para explorar o terceiro limite fundamental, coloque o cursor nas linhas abaixo e aperte *Shift+Enter*.**

⌞ --> for a:1 thru 10 do display((1.0+1.0/a)^a);

⌞ --> for a:10^3 thru 10^5 step 10^3 do display((1.0+1.0/a)^a);