Lenda do Jogo a Torre de Hanoi

Prof. Doherty Andrade
UEM -Brasil

2000

Resumo

O Jogo Torre de Hanoi, além de possuir uma lenda interessante, tem também muita matemática. Vamos descobrir onde?

Sumário

1 A Lenda

Conta a lenda deste jogo, que há muitos séculos num templo oriental teriam sido erguidas duas colunas de prata e uma de ouro. Ao redor de uma das colunas de prata haviam 100 discos perfurados, com raios decrescentes, colocados uns sobre os outros de modo que o maior disco fique sob o disco de menor raio. Cada devoto que visitasse o templo deveria mover um disco de uma coluna para a outra respeitando as regras do jogo. Quando todos os 100 discos estivessem sido transferidos para a coluna de ouro o mundo acabaria.

Qaunto tempo levaria? Vamos responder essa pergunta.

2 Perguntas e Respostas

Tem-se n discos de diâmetros decrescentes em volta de uma haste A, dispõe-se de outras duas hastes B e C. Queremos transferir a pilha de discos da haste A para a haste C. Veja a figura 2.

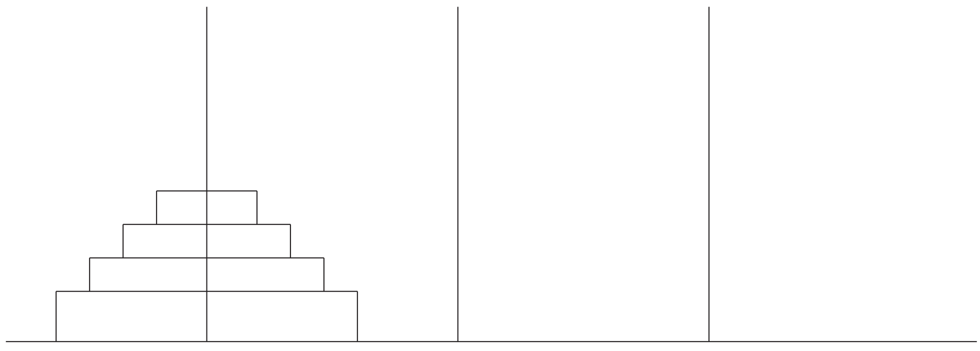

Figura 1: Situação Inicial

O problema consiste em transferir toda a pilha de discos para uma das hastes, deslocando um disco de cada vez para qualquer haste, de modo que nenhum disco seja colocado sobre o outro de diâmetro menor.

Algumas perguntas surgem imediatamente:
a) O jogo tem solução? Como resolver?
b) O jogo admite solução para todo n?
c) Qual o número mínimo de movimentos para se conseguir a solução?

A resposta para a primeira pergunta é afirmativa: o jogo admite solução para todo n. Vamos provar por indução.

Seja $P(n)$: o jogo com n discos tem solução. Seja S o conjunto dos números naturais que tornam $P(n)$ verdadeira. Claramente $P(0)$ é verdadeiro. Supondo que $P(n)$ é verdadeira, vamos supor que temos um jogo com $(n+1)$ discos. Veja figura 2.

Resolve-se o problema com os n discos superiores. Obtém-se a seguinte situação dada pela figura 2:

A seguir põe-se em C o que está em A, veja figura 2.

Finalmente resolve-se novamente o problema com n discos para colocar a pilha da haste B para a haste C e o problema dos $(n+1)$ está resolvido. Fica provado assim a possibilidade de solução do jogo para um número qualquer de discos. Segue que $S = \mathbb{N}$.

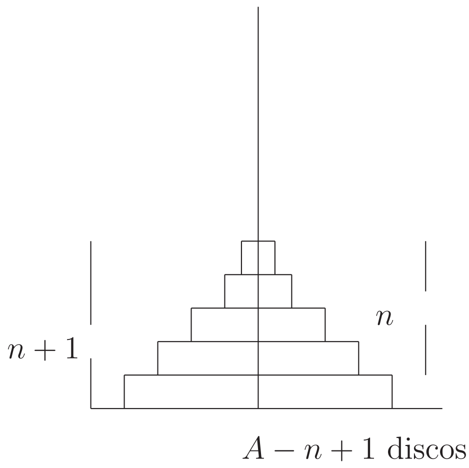

Figura 2: Problema com $n+1$ discos

Para resolver o problema com $(n+1)$ discos tivemos que resolver o problema com n discos duas vezes. Se J_n é o menor número de movimentos para resolver o problema com n discos, então $J_{n+1} = 2J_n + 1$, pois movemos uma peça a mais na última jogada.
AFIRMAÇÃO: $J_n = 2^n - 1$.
Por inspeção: $J_1 = 1$, $J_2 = 3 = 2^2 - 1$ e $J_3 = 7 = 2^3 - 1$. A demonstração é por indução, é um exercicio.

Assim, se cada segundo um devoto movesse um disco, o tempo mínimo para que ocorresse a tragédia seria $2^{100} - 1$ segundos o que dá aproximadamente 300×10^{18} séculos.

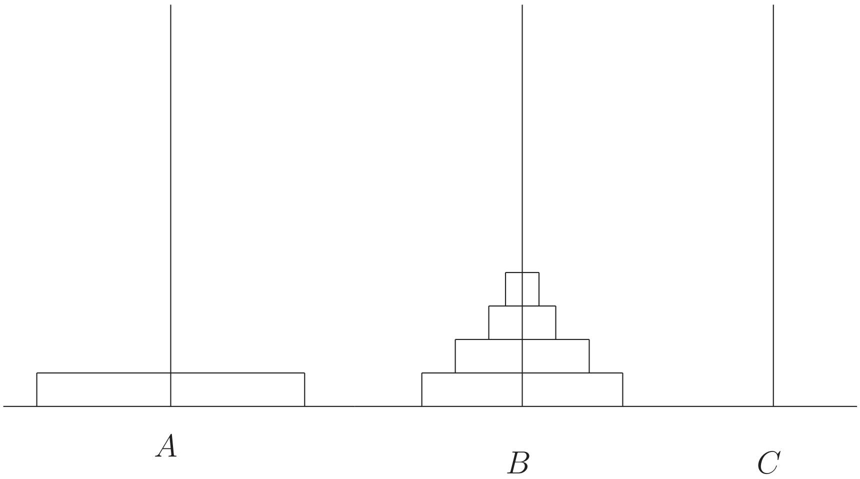

Figura 3: O Problema foi resolvido com n discos

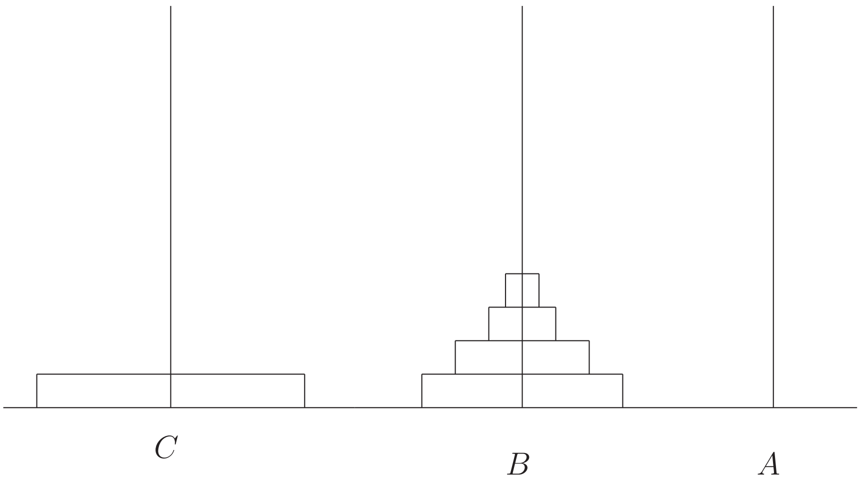

Figura 4: Resolve-se novamente o problema com n discos