Números irracionais: uma pequena introdução

Doherty Andrade - UEM -2013

1. Introdução

O conceito de número irracional é recente na história da Matemática, embora a questão da representação de números por meio de fração já era conhecida por Pitágoras (570 aC- 495 aC). Há indícios que foram os Pitagóricos que primeiro demonstraram que $\sqrt{2}$ não pode ser representado por uma fração ou seja, $\sqrt{2}$ é irracional.

A demonstração atribuída a eles é muito simples e elegante. Suponha que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem inteiros positivos p e q tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

onde podemos supor que a fração $\dfrac{p}{q}$ seja irredutível, ou seja p e q são primos entre si.

Elevando ao quadrado obtemos $p^2 = 2q^2$. Isto nos diz que p^2 é par e portanto p é par. Substituindo p por $2k$, para algum k inteiro, obtemos

$$4k^2 = 2q^2. \tag{1}$$

Simplificando obtemos que

$$2k^2 = q^2, \tag{2}$$

mostrando que q^2 é par e portanto q é par. Mas isto é um absurdo, pois inicialmente tomamos p e q primos entre si. Assim, $\sqrt{2}$ não é racional.

Outra demonstração simples deste fato surgiu após demonstração do Teorema Fundamental da Aritmética. Esta demonstração inicia-se como na prova anterior supondo que $\sqrt{2}$ seja racional. Então existem inteiros positivos p e q tais que

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q},$$

onde podemos supor que a fração $\frac{p}{q}$ seja irredutível, ou seja p e q são primos entre si. Elevando ao quadrado obtemos $p^2 = 2q^2$. Isto nos diz que p^2 tem uma quantidade ímpar de fatores primos, pois é igual a $2q^2$. Mas p^2 tem uma quantidade par de fatores primos. O que é impossível. Logo, $\sqrt{2}$ não é racional.

O advento do Cálculo Diferencial e Integral trouxe novas ferramentas que possibilitaram novas formas de pensar questões antigas não resolvidas. Problemas matemáticos de enunciados simples e que não exijam profundos conhecimentos para serem compreendidos, exercem uma fascínio muito grande sobre as pessoas em geral e também sobre os matemáticos.

Nesta categoria estão a irracionalidade de e, a irracionalidade de π e o último teorema de Fermat. Na tentativa de obter uma solução para estes e outros problemas, os matemátaicos criaram teorias e demonstraram teoremas que são importantes também em outras questões.

Nestas notas vamos demonstrar que dois números especiais, os números "e"e "π", são irracionais. Muitos matemáticos do passado, desde o século XVIII, ficaram fascinados por estas questões e deram contribuições importantes: J. H. Lambert demonstrou em 1761 que π é irracional, C. Hermite demonstrou em 1874 a transcendência do número e.

2. O número e é irracional

Toda solução de uma equação polinomial da forma

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0, \tag{3}$$

em que os coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ são números inteiros, é chamada de número algébrico.

Por exemplo, os números $\sqrt{2}$ e $-\sqrt{2}$ são algébricos, pois são soluções da equação $x^2 - 2 = 0$. Também são números algébricos os números $i = \sqrt{-1}$ e $-i = -\sqrt{-1}$, pois são soluções da equação $x^2 + 1 = 0$. Existe uma relação muito forte entre números algébricos e números irracionais. Esta relação será apresentada no teorema 2.3.

Vamos precisar de alguns resultados conhecidos para demonstrar o teorema 2.3.

Teorema 2.1 (Euclides) *Se a e b são inteiros e $b \neq 0$, então existem únicos q e r inteiros satisfazendo $0 \leq r < |b|$, tais que*

$$a = qb + r. \tag{4}$$

Teorema 2.2 *Dados a e b são inteiros com pelo menos um deles não nulo, então existem x_0 e y_0 inteiros tais que*

$$ax_0 + by_0 = MDC(a, b). \tag{5}$$

Teorema 2.3 *Um número algébrico (real) é inteiro ou irracional.*

Demonstração: Seja α um número algébrico e suponha, por contradição, que $\alpha = \frac{p}{q}$, com p, q primos entre si e $q > 1$. Isto é, um número racional que não é inteiro. Como α é solução de uma equação polinomial do tipo da (3), substituindo x por α temos

$$p^n = -a_{n-1}p^{n-1}q - a_{n-2}p^{n-2}q^2 - \cdots - a_1pq^{n-1} - a_0q^n, \quad (6)$$

ou ainda

$$p^n = q\left(-a_{n-1}p^{n-1} - a_{n-2}p^{n-2}q \cdots - a_1 p q^{n-2} - a_0 q^{n-1}\right). \quad (7)$$

Logo, q divide p^n. Seja r um fator primo de q, $r \neq 1$, ($r = q$ se q for primo).

Assim, r divide p e q, o que contradiz o fato deles serem primos entre si. Assim, as soluções de (3) só poderão ser inteiras ou irracionais. $\square$

• **Exemplo 2.4** *Como o número $\sqrt{2}$ é algébrico e não-inteiro, segue do Teorema 2.3 que ele é irracional.*

Sabemos do Cálculo que

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots \tag{8}$$

Suponha que e seja racional. Então, podemos escrever $e = \frac{p}{q}$, onde p e q são primos entre si.

De (8) podemos escrever

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \cdots = \sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!}. \tag{9}$$

Agora faremos uma estimativa do segundo membro de (9). Note que

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots + \cdots\right)$$
$$< \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)^2} + \cdots + \cdots\right). \qquad (10)$$

A expressão entre parênteses acima é uma série geométrica de razão $r = \frac{1}{q+1} < 1$ cuja soma é igual a $\frac{r}{r-1}$.

Logo, temos

$$\sum_{j=q+1}^{\infty} \frac{1}{j!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}. \tag{11}$$

Voltando em (9) temos

$$0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}. \tag{12}$$

Portanto, temos

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}. \qquad (13)$$

A expressão acima envolvendo parênteses é um inteiro positivo maior do que 1, pois $q!$ cancela todos os denominadores das frações presentes. Mas isto é impossível, pois $\dfrac{1}{q} \leq 1$. Logo, concluímos que e não é racional.

3. O número π é irracional

Encontrar o valor exato do número π sempre foi um mistério e um desafio no qual pessoas de muitas civilizações diferentes trabalharam. Vejamos alguns exemplos.

- 1650 a. C - o papiro de Rhind, do Egito antigo, apresenta um procedimento para calular a área de um círculo. Nele aparece o valor $4\left(\frac{8}{9}\right)^2$ para π.
- 240 a. C. Arquimedes mostrou que π está entre $3\frac{10}{71}$ e $3\frac{10}{70}$. Mais tarde Heron popularizou o uso de $3\frac{1}{7}$ em muitos contextos práticos.
- 150 d. C. Ptolomeu, astrônomo grego, usou $\frac{377}{120}$ para π.
- 480, o sábio chinês Zu Chongzhi usou $\frac{355}{113}$ para π.

- 530, o matemático hindú Aryabhata usou $\frac{62832}{20000}$ para π.
- 1600 foi calculado um valor decimal para π com 35 casas decimais.
- 1706 Willian Jones, matemático britânico, foi o primeiro a usar a letra grega π para representar este número. Este símbolo foi adotada por grandes matemáticos como por exemplo Euler.
- 1873 Willian Shanks da Inglaterra calculou à mão um valor decimal aproximado para π com 607 casas. Ele levou mais de 15 anos nesse trabalho. Os algarismos depois do 527^0 estavam errados.

- 1949, John von Neumann usando o computador Eniac do governo americano calculou um valor decimal aproximado para π com 2035 casas em 70 horas.
- 1987 o professor Yasumasa Kanada, da universidade de Toquio, calculou um valor decimal aproximado para π com 134.217.000 casas em um super computador NEC SX-2.

UEM

Esta corrida continua até os dias de hoje. Mas nenhum destes valores é o valor exato de π. Por volta de 1765 Johan Lambert demonstrou que π é irracional, isto é, não pode ser representado por meio de uma fração. Assim, nenhuma expressão decimal, não importa quão longa, pode representar exatamente o valor de π.

Exercícios 3.1 *O matemático indiano Srinivasa Ramanujan demonstrou a seguinte igualdade*

$$\frac{1}{\pi} = \frac{\sqrt{8}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!}{(n!)^4}\frac{[1103 + 26390n]}{396^{4n}}.$$

Utilizando o Maple, calcule uma aproximação para π *utilizando* $n = 1, 2, 3, 5, 7.$

A demonstração da irracionalidade de π apresentada aqui é devido a I. Niven que se baseou no trabalho de Hermite para provar a transcendência do número e. Veja [1].

Consideremos a função

$$f(x) = \frac{x^n(1-x)^n}{n!}, \tag{14}$$

onde n é um número inteiro positivo.

Lema 3.2 *Para* $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *tem-se que* $D^k f(0) = f^{(k)}(0)$ *é inteiro.*

Demonstração: Vamos utilizar a fórmula de Leibnitz para derivada de um produto de funções g e h:

$$D^k(gh) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} D^j g \cdot D^{k-j} h, \tag{15}$$

onde $\binom{k}{j}$ são os coeficientes do Binômo de Newton:

$$\binom{k}{j} = \frac{k!}{j!(k-j)!}.$$

Aplicando a fórmula à função f temos

$$D^k f = \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{k} \left(\begin{array}{c} k \\ j \end{array} \right) D^j x^n \cdot D^{k-j} (1-x)^n. \qquad (16)$$

Observamos que

$$D^j x^n|_{x=0} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq n, \\ n!, & \text{se } j = n \end{cases}. \tag{17}$$

Logo, da (16) e (17) concluímos que

$$D^k f(0) = 0, \text{ se } k < n \tag{18}$$

e

$$D^k f(0) = \frac{1}{n!}\binom{k}{n} n! D^{k-n}(1-x)^n|_{x=0}, \text{ se } k \geq n. \tag{19}$$

Como os coeficientes binomiais são inteiros, segue que a expressão na (19) é um inteiro. Assim, o resultado segue imediatamente. $\square$

Lema 3.3 *Para* $k = 0, 1, 2, \ldots,$ *tem-se que* $D^k f(1) = f^{(k)}(1)$ *é inteiro.*

Demonstração: Basta observar que $f(1 - x) = f(x)$ e usar o lema anterior. $\square$

Se provarmos que π^2 é irracional, consequentemente π é irracional, pois quadrado de racional é também racional. Vamos provar que π^2 é irracional.

Suponha que $\pi^2 = \dfrac{p}{q}$ é racional, sendo a fração irredutível. Defina a função dada por

$$F(x) = q^n \left[\pi^{2n} f(x) - \pi^{2n-2} D^2 f(x) + \cdots + (-1)^n D^{2n} f(x)\right]. \tag{20}$$

Como consequências do Lema 3.2 e Lema 3.3 e da hipótese $\pi^2 = \frac{p}{q}$, temos que

$$F(0) \text{ e } F(1) \text{ são inteiros .} \tag{21}$$

A seguir observamos que

$$(F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x))' = F''(x)\sin(\pi x) + \pi^2 F(x)\sin(\pi x) \tag{22}$$

Um cálculo imediato de F'' nos dá

$$\left(F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)\right)' = p^n \pi^2 f(x)\sin(\pi x). \quad (23)$$

Aplicando o Teorema Fundamental do Cálculo ($\int_0^1 g'(x)dx = g(1) - g(0)$) a $g(x) = F'(x)\sin(\pi x) - \pi F(x)\cos(\pi x)$ e obtemos, em virtude de (23) que

$$p^n \pi^2 \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = \pi F(1) + \pi F(0),$$

ou seja

$$p^n \pi \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx = F(1) + F(0), \tag{24}$$

O lado direito de (24) é um número inteiro, se mostramos que para n conveniente o lado esquerdo é positivo estritamente menor do que 1, teremos chegado a um absurdo procurado.

Para $0 < x < 1$ temos

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \tag{25}$$

Usando a desigualdade (25) na (24) temos que

$$\begin{aligned} 0 &< p^n\pi \int_0^1 f(x)\sin(\pi x)dx \\ &< \pi\frac{p^n}{n!}\int_0^1 \sin(\pi x)dx = \frac{2p^n}{n!}, \end{aligned} \tag{26}$$

onde a última igualdade foi obtida fazendo a integração indicada.

Como $\lim_{n\to\infty} \frac{p^n}{n!} = 0$, temos que podemos tomar n conveniente tal que $\frac{2p^n}{n!} < 1$. E o absurdo foi encontrado. Isto termina a prova. $\square$

4. Comentários sobre o último Teorema de Fermat

Aparentemente simples, o Teorema de Fermat afirma que a equação

$$x^n + y^n = z^n,$$

não tem solução com x, y, z inteiros positivos quando o expoente n é um natural superior a 2.

Ele escreveu esse teorema na margem da página de um livro, acrescentando haver achado uma prova elegante e concisa que, por ser muito extensa, não caberia no espaço disponível.

Em uma série de conferências, Wiles, em cerca de 200 páginas resolveu a conjectura, demonstrando que ela se aplica a uma classe infinita de curvas elipticas. E o Teorema de Fermat não passaria de mero corolário dos resultados obtidos por Wiles, na opinião de muitos matemáticos presentes às reuniões realizadas no Newton Institute, de Cambridge, Reino Unido, de 21 a 23 de junho de 1993.

Parecia bom demais para ser verdade. Um erro foi encontrado e reconhecido por Wiles, em seu trabalho. Ficava ainda insolúvel o famoso teorema. Wiles dedicou mais algum tempo tentando contornar o erro encontrado pelos matemáticos encarregados de analisar a sua prova.

Em dezembro de 1993 Wiles divulgou uma mensagem eletrônica dizendo que havia de fato um salto na sua demonstração e que ele estava trabalhando para consertá-lo. Wiles admitiu que o período que passou tentando consertar o salto foi uma agonia. Em setembro de 1994 anunciou que a demonstração estava completa e fez circular dois manuscritos, um contendo a prova original com o salto e outro que continha o passo crucial que completava a demonstraçao.

Finalmente, depois de 350 anos a prova apresentada por Wiles está correta e o último Teorema de Fermat está provado.

Referências

[1] I. Niven. Irrational Numbers. Bulletin of of American Mathematical Society, 53 (1947), p. 509.

[2] D. G. de Figueiredo. Números Irracionais e transcendentes. Coleçao Iniciação Científica. 3a. Edição, 2002.