

Integração por Substituição Trigonométrica

Prof. Doherty Andrade

I. Integrar é uma técnica, assim como derivar. Existem muitas técnicas de integração: integração por substituição, integração por partes, integração por frações parciais, integração por substituição trigonométrica. Todas bem simples, é só pegar o jeito.

Continuando veremos a integração por substituição trigonométrica. Usada quando o integrando contém uma das seguintes formas $\sqrt{a^2 - b^2 x^2}$, $\sqrt{a^2 + b^2 x^2}$ e $\sqrt{b^2 x^2 - a^2}$.

Vejam os alguns exemplos:

(a) $\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx$ faça a substituição $x = \frac{a}{b} \sin u$

(b) $\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$ faça a substituição $x = \frac{a}{b} \tan u$

(c) $\int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx$ faça a substituição $x = \frac{a}{b} \sec u$

Fazendo essas substituições obteremos integrais na variável u . A expressão da integral na variável original x pode ser obtida por meio do auxílio de um triângulo retângulo. Como se faz?

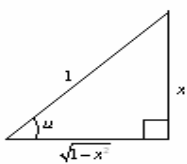
II. Exemplo: Calcule a integral $\int \sqrt{1 - x^2} dx$ fazendo a substituição $x = \sin u$.

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \int \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u du = \int \cos^2 u du = \int \frac{1 + \cos(2u)}{2} du = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin(2u)$$

Ou seja,

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} \sin(2u) = \frac{1}{2} u + \frac{1}{4} 2 \sin(u) \cos(u) = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \sin(u) \cos(u)$$

Voltando a variável original: faça um triângulo indicando a substituição trigonométrica realizada



Do triângulo vemos que $\cos u = \sqrt{1 - x^2}$ e como $x = \sin u$. Assim temos

$$\int \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{2} x \sqrt{1 - x^2}.$$

III. Algumas observações (relembrando as funções trigonométricas)

1. Definições

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$	$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$
$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$	$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$

2. Identidades trigonométricas

$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$	$\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$
$\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$	

3. Soma de arcos

$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$	$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$
$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$	

4. Arco duplo

$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$	$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$
$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$	$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$
$\cos(2x) = 1 - 2 \sin^2(x)$	$\sin^2(x) \cos^2(x) = \frac{1 - \cos(4x)}{8}$

5. Arco metade

$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$
$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$
$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)(1 + \cos x)}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{(1 + \cos x)^2}} = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

6. Derivadas das funções trigonométricas

$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x)$	$\frac{d}{dx} \sec(x) = \sec(x) \tan(x)$
$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$	$\frac{d}{dx} \csc(x) = -\csc(x) \cot(x)$

$\frac{d}{dx} \tan(x) = \sec^2(x)$	$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx} \cot(x) = -\csc^2(x)$	$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$	

7. Tabela de conversão

No cálculo de integrais por substituição trigonométrica utilizamos o auxílio do triângulo retângulo para expressar a integral na variável original. Mas podemos utilizar a tabela abaixo para realizar a mesma tarefa. Esta tabela é usada para responder a seguinte pergunta: dado funções trigonométricas φ e ψ , o que é $\varphi(\arcsin(\psi(x)))$? Vejamos como funciona.

Tabela de conversão						
φ / ψ	Seno	Cosseno	Tangente	Cossecante	Secante	Cotangente
Seno	x	$\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
Cosseno	$\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
Tangente	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{x}$
Cossecante	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$	x	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	$\sqrt{1+x^2}$
Secante	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{1+x^2}$	$\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$	x	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$
Cotangente	$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x^2-1}$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	x

Esta pergunta pode ser respondida seguindo os seguintes passos.

1. Determine uma equação que relacione $\varphi(u)$ e $\psi(u)$: Por exemplo,

$$f(\varphi(u), \psi(u)) = 0$$

2. Faça $u = \arcsin(\psi(x))$, então:

$$f(\varphi(\arcsin(\psi(x))), \psi(\arcsin(\psi(x))) = 0$$

$$f(\varphi(\arcsin(\psi(x))), x) = 0$$

3. Resolva esta equação para $\varphi(\arccsc(x))$.

Exemplo. O que é $\cot(\arccsc(x))$?

1. Sabemos que essas funções estão relacionadas por

$$\cot^2 u + 1 = \csc^2 u.$$

2. Fazendo $u = \arccsc(x)$:

$$\begin{aligned}\cot^2(\arccsc(x)) + 1 &= \csc^2(\arccsc(x)), \\ \cot^2(\arccsc(x)) + 1 &= x^2.\end{aligned}$$

3. Resolva esta equação para $\cot(\arccsc(x))$:

$$\begin{aligned}\cot^2(\arccsc(x)) &= x^2 - 1, \\ \cot(\arccsc(x)) &= \pm\sqrt{x^2 - 1},\end{aligned}$$

Esta expressão está na quarta coluna da tabela.

IV. Exercícios : Calcule as integrais e utilize a tabela para exprimir a integral na variável x .

(a) $\int \sqrt{a^2 - b^2 x^2} dx$ substituição $x = \frac{a}{b} \sin u$

(b) $\int \sqrt{a^2 + b^2 x^2} dx$ substituição $x = \frac{a}{b} \tan u$

(c) $\int \sqrt{b^2 x^2 - a^2} dx$ substituição $x = \frac{a}{b} \sec u$

(d) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{4 + x^2}} dx$ substituição $x = 2 \tan(u)$

(e) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 4}} dx$ substituição $x = 2 \sec(u)$